# Odmocnina z komplexního čísla

$n$-tá odmocnina: $\quad z = \sqrt[n]{w} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad w = z^n \quad (w \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$

---

$\sqrt[n]{0} = 0$

Pro $w \neq 0$ nabývá $\sqrt[n]{w}$ právě $n$ různých hodnot. Ukažme si to.

Buď $w = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Hledáme $z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ tak, aby

$$w = z^n.$$

Tedy

$$r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n\,(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),$$

a proto

$$r = \rho^n \quad \text{a} \quad \varphi + 2k\pi = n\theta,\ k \in \mathbb{Z},$$

takže

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{a} \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(Pro hodnoty $k = 0, 1, \ldots, n-1$ dostaneme různé hodnoty $z$, poté se už nám začínají opakovat.) Odvodili jsme tedy vzoreček:

$$w = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0,$$

$$\underline{\sqrt[n]{w} = \left\{ \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) :\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.}$$

Výše uvedená množina obsahuje body na kružnici se středem v 0 a poloměrem $\sqrt[n]{r}$, které tvoří vrcholy pravidelného $n$-úhelníku vepsaného do této kružnice.