Limita posloupnosti

okolí bodu $z \in \mathbb{C}$: $U(z,\varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} : \ |w - z| < \varepsilon\}$

okolí bohu ∞: $U(\infty,\varepsilon) = \left\{w \in \mathbb{C} : \ |w| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\}$

„čím menší je ε, tím větší je $\frac{1}{\varepsilon}$ a tím „blíže“ jsme nekonečnu“

Buď $z \in \mathbb{C}_\infty$ a buď (z_n) posloupnost v $\mathbb{C}_\infty$.

$$\lim z_n = z \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : \ n > n_0) : \ z_n \in U(z,\varepsilon)$$

Místo $\lim z_n = z$ můžeme psát také $z_n \to z$.

Tvrzení 1 Nechť $z_n = x_n + iy_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ a $z = x + iy$. Pak

$$\lim z_n = z \quad \Leftrightarrow \quad [\lim x_n = x \quad \wedge \quad \lim y_n = y].$$

„konvergence po složkách“

Tvrzení 2 $\lim z_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim |z_n| = \infty$

Tvrzení 3 $\lim z_n = z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \lim |z_n| = |z|$ (Pozor, obrácené tvrzení neplatí.)

Tvrzení 4 $\lim z_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim |z_n| = 0$

Tvrzení 5

$$\lim z^n = \begin{cases} \infty, & \text{je-li } |z| > 1, \\ \text{neexistuje}, & \text{je-li } |z| = 1 \text{ a } \arg z \neq 0, \\ 1, & \text{je-li } |z| = 1 \text{ a } \arg z = 0 \text{ (tj. } z = 1), \\ 0, & \text{je-li } 0 \leq |z| < 1. \end{cases}$$

Tvrzení 6

$$\left. \begin{array}{l} |z_n| \to r \in \mathbb{R}^+ \\ \arg z_n \to \varphi \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad z_n \to r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$