Limita komplexní funkce, křivky a oblasti

Pod pojmem komplexní funkce budeme rozumět funkci jednoznačnou.

Buď $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Funkci $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ resp. $v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definovanou na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in Df\}$ předpisem

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \quad \text{resp.} \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

nazýváme reálnou resp. imaginární částí funkce f. Píšeme $f = u + iv$.

Buď $f : \mathbb{C}_\infty \mapsto \mathbb{C}_\infty$ a $z_0, a \in \mathbb{C}_\infty$.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad [\, z_0 \neq z_n \to z_0 \quad \Rightarrow \quad f(z_n) \to a \,]^1$$

Tvrzení 1 $\lim_{z \to z_0} f(z) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall U(a)\, \exists P(z_0)\, \forall z \in P(z_0) : \ f(z) \in U(a)$

Tvrzení 2 $f = u + iv : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad a = \alpha + i\beta$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \quad \wedge \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = \beta \right]$$

Buď $f : \mathbb{C}_\infty \mapsto \mathbb{C}_\infty$.

$$f \quad \text{je spojitá v bodě } z_0 \in \mathbb{C}_\infty \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

f je spojitá na množině $M \subset \mathbb{C}_\infty$, platí-li pro každé $z_0 \in M$

$$\left. \begin{array}{r} z_n \to z_0 \\ (z_n) \subset M \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad f(z_n) \to f(z_0)$$

---

komplexní funkce reálné proměnné: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}_\infty$

Buď $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}_\infty$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}_\infty$.

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = a \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad [\, t_0 \neq t_n \to t_0 \quad (\text{v } \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f(t_n) \to a \,]$$

Podobně jako u komplexní funkce komplexní proměnné se zavede spojitost v bodě a na množině.

[1] $z_0 \neq z_n \to z_0$ znamená, že $z_n \to z_0$ a pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $z_n \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$

Křivkou v $\mathbb{C}_\infty$ (resp. v $\mathbb{C}$) rozumíme každou spojitou komplexní funkci reálné proměnné $\gamma: I \mapsto \mathbb{C}_\infty$ (resp. $\gamma: I \mapsto \mathbb{C}$), kde $I = D\gamma \subset \mathbb{R}$ je interval.

---

geometrický obraz křivky: $\langle\gamma\rangle = \{\gamma(t): t \in Df\} \subset \mathbb{C}_\infty$

Křivka γ je parametrizací množiny M, pokud $\langle\gamma\rangle = M$.

---

otevřená množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$: $(\forall z \in M)\, \exists U(z): U(z) \subset M$

„s každým svým bodem obsahuje množina i nějaké okolí tohoto bodu“

uzavřená množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$: $\mathbb{C}_\infty \setminus M$ je otevřená

uzávěr množiny $M \subset \mathbb{C}_\infty$:

$$\overline{M} = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \text{ existuje posloupnost } (z_n) \subset M \text{ taková, že } z_n \to z\}$$

ekvivalentně: $\overline{M}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující M

---

oddělené množiny $A, B \subset \mathbb{C}_\infty$: $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$

souvislá množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$: M nelze zapsat jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin, tzn.:

$$\left.\begin{array}{r} M = A \cup B \\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad [\, A = \emptyset \ \vee \ B = \emptyset \,]$$

„souvislá množina je z jednoho kusu“

---

oblast $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$: Ω je otevřená a souvislá množina

$$(\forall z_1, z_2 \in \Omega)\, (\exists \gamma : \langle a, b\rangle \mapsto \Omega): \ \gamma(a) = z_1 \quad \wedge \quad \gamma(b) = z_2$$

„každé 2 body z Ω lze spojit křivkou v Ω“

$M \subset \mathbb{C}_\infty$, komponenta K množiny M: 1) $K \subset M$, K je souvislá a
2) je-li $K^* \subset M$ souvislá množina obsahující K, je $K^* = K$

„komponentou množiny je každá její maximální souvislá podmnožina“

n-násobně souvislá oblast $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$: Ω je oblast a $\mathbb{C}_\infty \backslash \Omega$ má právě n různých komponent

jednoduše souvislá oblast: jednonásobně souvislá oblast