Poznámky k integrálu komplexní funkce reálné/komplexní proměnné

Jordanova věta $\gamma \ldots$ jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{C}$

$$\Downarrow$$

$\mathbb{C}_\infty \setminus \langle\gamma\rangle = \Omega_1 \cup \Omega_2$, kde Ω_1 a Ω_2 jsou disjunktní, neprázdné a jednoduše souvislé oblasti, jejichž společnou hranicí je $\langle\gamma\rangle$

$\Omega_1 = \operatorname{int}\gamma \ldots$ vnitřek křivky γ (neobsahuje ∞)
$\Omega_2 = \operatorname{ext}\gamma \ldots$ vnějšek křivky γ (obsahuje ∞)

Nechť $f = u + iv : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Definujme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (u(t) + iv(t))\,\mathrm{d}t \overset{\text{def.}}{=} \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Buď $\gamma : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{C}$ po částech hladká křivka a buď $f = u + iv : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ spojitá na $\langle\gamma\rangle$. Definujme

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def.}}{=} \int_{(\gamma)} u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + i\int_{(\gamma)} v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

kde integrály na pravé straně rovnosti jsou křivkové integrály 2. druhu (γ chápeme jako křivku v $\mathbb{R}^2$).

pomůcka: $f(z)\,\mathrm{d}z = (u + iv)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$

Nechť $\gamma : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{C}$ je hladký oblouk a nechť funkce $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ je spojitá na $\langle\gamma\rangle$. Pak platí

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cauchyho věta Nechť f je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak pro každou uzavřenou po částech hladkou křivku γ v oblasti Ω platí

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

zobecnění Cauchyho věty Nechť $\Omega = \operatorname{int}\gamma$, kde γ je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka v $\mathbb{C}$. Pak pro každou funkci $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, která je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle\gamma\rangle$, platí

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Cauchyho věta pro vícenásobně souvislou oblast Buďte

$$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$$

takové jednoduché uzavřené po částech hladké a kladně orientované křivky v $\mathbb{C}$, že pro každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí:

$$\langle\gamma_i\rangle \subset \operatorname{ext}\gamma_j \quad \text{pro } i \neq j, \quad \langle\gamma_i\rangle \subset \operatorname{int}\gamma.$$

Množina

$$\Omega = \operatorname{int}\gamma \cap \operatorname{ext}\gamma_1 \cap \operatorname{ext}\gamma_2 \cap \cdots \cap \operatorname{ext}\gamma_n$$

je tudíž $(n+1)$-násobně souvislou oblastí. Je-li $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle\gamma\rangle \cup \langle\gamma_1\rangle \cup \langle\gamma_2\rangle \cup \cdots \cup \langle\gamma_n\rangle$, platí

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Cauchyho integrální vzorce Nechť γ je jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v $\mathbb{C}$ a nechť funkce $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ je holomorfní na $\Omega = \operatorname{int}\gamma$ a spojitá na $\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle\gamma\rangle$. Potom

$$\forall z_0 \in \Omega : \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

„hodnoty f v Ω jsou určeny hodnotami f na $\langle\gamma\rangle$“

Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall z_0 \in \Omega : \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$