Funkce komplexní proměnné

komplexní funkce komplexní proměnné: $f:\ \mathbb{C}_\infty \supset Df \ \longmapsto\ Hf \subset \mathbb{C}_\infty$

např.: $f(z) = \frac{1}{z}$, $Df = \mathbb{C}_\infty$ … jednoznačná
($\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ a pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ máme $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$)

$f(z) = z^2$, $Df = \mathbb{C}_\infty$ … jednoznačná
($\infty^2 = \infty$ a pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$)

$f(z) = \operatorname{Arg} z$, $Df = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ … nekonečněznačná

$f(z) = \arg z$, $Df = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ … jednoznačná

$f(z) = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ … pro $Df = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ právě n-značná

---

exponenciální funkce $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$

definiční obor: $\mathbb{C}$

obor hodnot: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x > 0$)

jednoznačná

$$\mathrm{e}^{z+2\pi i} = \mathrm{e}^{x+iy+2\pi i} = \mathrm{e}^x(\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y) = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^z,$$

a proto je e^z $2\pi i$-periodická

Eulerova identita: $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$

---

goniometrické funkce

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

jednoznačné

$\sin z$ a $\cos z$ jsou 2π-periodické (plyne ihned z $2\pi i$-periodicity e^z)

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(z+2\pi)}{\cos(z+2\pi)} = \frac{\sin(z+\pi)\cos\pi + \cos(z+\pi)\sin\pi}{\cos(z+\pi)\cos\pi - \sin(z+\pi)\sin\pi} = \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \operatorname{tg}(z+\pi),$$

a proto jsou $\operatorname{tg} z$ a $\operatorname{cotg} z$ π-periodické

Eulerův vzorec: $\forall z \in \mathbb{C}:\quad \mathrm{e}^{iz} = \cos z + i \sin z$

hyperbolické funkce

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{cotgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

---

logaritmická funkce ... inverzní funkce k exponenciální funkci

$$\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} : \ e^w = z\}$$

definiční obor: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Pro $z \neq 0$ položme $\operatorname{Ln} z = u + iv$, tj.

$$e^{u+iv} = z,$$

$$e^u(\cos v + i \sin v) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z,$$

a proto

$$u = \ln|z| \quad \wedge \quad v = \varphi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$

tedy

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ukázali jsme tedy, že pro $z \neq 0$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

hlavní hodnota logaritmu $\ln z = \ln|z| + i \arg z$
definiční obor: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

---

mocninná funkce $z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z, \quad n \in \mathbb{N}$
$z^n = \frac{1}{z^{-n}}, \quad -n \in \mathbb{N}$
$z^a = \{e^{as} : \ s \in \operatorname{Ln} z\} \overset{\text{ozn.}}{=} e^{a\operatorname{Ln} z}, \quad a \in \mathbb{C}, \ \pm a \notin \mathbb{N}$