Derivace komplexní funkce komplexní proměnné

$f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existuje-li limita vpravo a je-li konečná

---

f je holomorfní na množině Ω $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f'(z)$ existuje pro každé $z \in \Omega$

---

f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ f je holomorfní na nějakém okolí $U(z_0)$

„existence derivace f v bodě ještě nezaručuje, že je f v tomto bodě holomorfní (potřebujeme derivaci i na nějakém okolí tohoto bodu)"

Tvrzení 1 f má derivaci v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ f je spojitá v bodě z_0

Tvrzení 2 (nutná a postačující podmínka existence derivace v bodě)

$$f = u + iv \text{ má derivaci v bodě } z_0 = x_0 + iy_0$$

$$\Updownarrow$$

současně platí:

1) u a v jsou diferencovatelné[1] v (x_0, y_0)
2) u a v splňují v bodě (x_0, y_0) tzv. Cauchyho–Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Navíc:

$$f'(z_0) \text{ existuje} \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

[1]Diferencovatelnost funkce $\varphi: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ v bodě (x_0, y_0) je zaručena spojitostí obou prvních parciálních derivací φ v (x_0, y_0). Pokud φ není spojitá v (x_0, y_0), znamená to, že φ není diferencovatelná v (x_0, y_0).

Samotné Cauchyho–Riemannovy podmínky jsou tedy pouze nutnou, nikoliv postačující, podmínkou pro existenci derivace funkce v daném bodě.

Postačující, nikoliv nutnou, podmínkou existence derivace funkce $f = u + iv$ v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ je spojitost obou prvních parciálních derivací funkcí u a v v bodě (x_0, y_0) splňujících navíc Cauchyho–Riemannovy podmínky.

Buď $M \subset \mathbb{R}^2$ otevřená.

$\varphi : \ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ je harmonická na množině M

$\Updownarrow$ def.

současně platí:

1) φ je třídy C^2 na M

2) $\triangle\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ na M

Často budeme (ne příliš přesně) psát, že „φ je harmonická na $\Omega \subset \mathbb{C}$“ místo správného „$\varphi$ je harmonická na $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + iy \in \Omega\}$“.

Tvrzení 3 f je holomorfní na otevřené množině Ω a $n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$f^{(n)}$ je holomorfní na Ω

„derivací holomorfní funkce získáme opět holomorfní funkci“

Tvrzení 4 $f = u + iv$ je holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$

$\Downarrow$

u a v jsou harmonické na Ω

$u,\ v : \ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ jsou harmonicky sdružené na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$

$\Updownarrow$ def.

současně platí:

1) u a v jsou harmonické na Ω

2) u a v splňují Cauchyho–Riemannovy podmínky na Ω

Tvrzení 5 Harmonicky sdružené funkce tvoří právě reálné a imaginární části holomorfních funkcí.

Tvrzení 6 Nechť u resp. v je harmonická funkce na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Potom existuje až na ryze imaginární resp. reálnou konstantu jednoznačně určená funkce $f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ taková, že

1) f je holomorfní na Ω,

2) pro každé $x + iy \in \Omega$ platí: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ resp. $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$.