

7. cvičení z FKP

V příkladech 1) – 4) předpokládejme, že γ je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná po částech hladká křivka.

1) Pomocí Cauchyho integrálních vzorců spočtěte

$$\int_{\gamma} g(z) dz, \quad \text{je-li } \langle \gamma \rangle = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{a}$$

a) $g(z) = \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{2}},$

b) $g(z) = \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2},$

c) $g(z) = \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^3},$

d) $g(z) = \frac{\sin z}{z^2 - (\frac{\pi}{2})^2}.$

2) Pomocí Cauchyho integrálních vzorců spočtěte

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{z - 2i} dz,$$

je-li

a) $\langle \gamma \rangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\},$

b) $\langle \gamma \rangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$

3) Pomocí Cauchyho integrálních vzorců spočtěte

$$\int_{\gamma} \frac{z + 4}{z^2 + 2z + 5} dz,$$

je-li

a) $\langle \gamma \rangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$

b) $\langle \gamma \rangle = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 - i| = 2\}.$

4) Pomocí Cauchyho integrálních vzorců spočtěte

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz, \quad \text{je-li } \langle \gamma \rangle = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = \frac{3}{2} \right\}.$$

5) Vypočtěte

$$\int_{\gamma} \frac{z + 4}{z^2 - 2z} dz, \quad \text{je-li } \gamma(t) = 1 + 2e^{it}, \quad t \in \langle -2\pi, 4\pi \rangle.$$

6) Buď

$$\gamma(t) = \begin{cases} 3e^{it}, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ i(3 + \frac{\pi}{2} - t), & t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 3 \rangle, \\ t - \frac{\pi}{2} - 3, & t \in \langle \frac{\pi}{2} + 3, \frac{\pi}{2} + 6 \rangle. \end{cases}$$

Vypočtěte

$$\text{a) } \int_{\gamma} |z| dz, \quad \text{b) } \int_{\gamma} z^2 dz.$$

7) Buď $\gamma(t) = 2i + e^{-it}$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$. Vypočtěte

$$\text{a) } \int_{\gamma} \frac{z^2 + i}{z} dz, \quad \text{b) } \int_{\gamma} \frac{z^2 + i}{z - 2i} dz, \quad \text{c) } \int_{\gamma} \frac{z^2 + i}{z - 3i} dz.$$

8) Buď $\gamma(t) = 3e^{i2\pi t}$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$. Vypočtěte $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 - 7z + 10} dz$.

9) Buď $\gamma(t) = -4e^{i\pi t}$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$. Vypočtěte $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$.

10) Buď $\gamma(t) = \frac{-2 + e^{-4\pi it}}{2}$, $t \in \langle 0, 4 \rangle$. Vypočtěte $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2 - 1)^3}$.

11) Buď γ jednoduchá uzavřená kladně orientovaná po částech hladká křivka taková, že

$$-2 \in \text{int}\gamma, \quad i \in \text{int}\gamma, \quad 1 \in \text{ext}\gamma.$$

Vypočtěte $\int_{\gamma} \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2}$.

12) Buď

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\frac{3}{2} + t)(1 - i), & t \in \langle -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle, \\ 1 + e^{i\pi t}, & t \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \\ 1 + (\frac{3}{2} - t)i, & t \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle. \end{cases}$$

Vypočtěte $\int_{\gamma} z^2 dz$.

13) Vypočtěte

$$\text{a) } \int_0^{1+i} e^z dz, \quad \text{b) } \int_0^i z^2 \sin z dz.$$