6. cvičení z FKP

1) Najděte (existuje-li) na oblasti Ω holomorfní funkci $f = u + iv$, je-li

a) $u(x,y) = 2xy - 2y$, $\Omega = \mathbb{C}$,

b) $u(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + 2$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

c) $v(x,y) = y^2 - 3x^2 + 6y - 2x + 5$, $\Omega = \mathbb{C}$,

d) $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2$, $\Omega = \mathbb{C}$, $f(i) = 0$,

e) $v(x,y) = 2x^3y - 2xy^3 + 2xy + 1$, $\Omega = \mathbb{C}$, $f(2) = 12 + i$,

e) $u(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y)$, $\Omega = \mathbb{C}$, $f(1) = \mathrm{e}$,

g) $v(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, $f(-1) = -\pi i$,

h) $v(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, $f(-1) = 0$.

2) Vypočtěte integrál $\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, je-li

a) $f(z) = \operatorname{Re} z$, $\langle\gamma\rangle$ je úsečka s počátečním bodem 0 a koncovým bodem $1+i$, γ je jednoduchá křivka.

b) $f(z) = |z|\overline{z}$, $\langle\gamma\rangle$ je hranice množiny $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$,

c) $f(z) = \operatorname{Im} z$, $\langle\gamma\rangle$ je jednotková kružnice se středem v bodě 0,

d) $f(z) = \overline{z}$, $\langle\gamma\rangle$ je jednotková kružnice se středem v bodě 0,

e) $f(z) = |z|$, $\langle\gamma\rangle$ je jednotková kružnice se středem v bodě 0,

f) $f(z) = 3z^2 - 1$, $\langle\gamma\rangle$ je obdélník s vrcholy $-1,\ 2,\ 2+i,\ -1+i$,

g) $f(z) = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$, $\langle\gamma\rangle$ je obdélník s vrcholy $-1,\ 2,\ 2+i,\ -1+i$.

V příkladech b) - g) uvažujeme, že γ je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka.

3) Vypočtěte integrál $\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, je-li

a) $f(z) = z^2$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{it}$, $t \in \langle 0, \pi\rangle = D\gamma$,

b) $f(z) = |z|^2$, $D\gamma = \langle 0, 5\rangle$, $\gamma(t) = t$ pro $t \in \langle 0, 2\rangle$,

$$\gamma(t) = (\tfrac{i}{2} - 1)t + 4 - i \text{ pro } t \in \langle 2, 4\rangle,$$

$$\gamma(t) = i(5 - t) \text{ pro } t \in \langle 4, 5\rangle,$$

c) $f(z) = |z|\overline{z}$, γ je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka, přičemž $\langle\gamma\rangle$ je hranice množiny $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 3 \wedge \operatorname{Re} z < 0\}$,

d) $f(z) = 4z^3 - 2z + 1$, $\gamma(t) = 1 - t + it$, $t \in \langle 0, 1\rangle = D\gamma$.