5. cvičení z FKP

1) Zjistěte, zda je funkce f spojitá, dále ve kterých bodech má f derivaci a ve kterých bodech je f holomorfní, je-li

a) $f(z) = \overline{z}$,

b) $f(z) = |z|^2$,

c) $f(z) = \operatorname{Re} z$,

d) $f(z) = z^3$,

e) $f(z) = \mathrm{e}^z$,

f) $f(z) = \ln z$,

g) $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$,

h) $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z}{z}$ pro $z \neq 0$ a současně $f(0) = 0$,

i) $f(z) = (\operatorname{Re} z)^3$,

j) $f(z) = \overline{z}^2$,

k) $f(z) = \mathrm{e}^{\overline{z}}$,

l) $f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{\overline{z}}$,

m) $f(z) = -z^2 - 3z + 2$,

n) $f(z) = \cosh z$,

o) $f(z) = \sin z$,

p) $f(z) = z \cdot |z|$.

2) Uvažujme $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}$. Ověřte pro f platnost C-R podmínek v bodě $(0, 0)$. Má funkce f derivaci v bodě 0?

3) Určete, zda je funkce $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ harmonická na oblasti Ω, je-li

a) $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 + xy + 2023$, $\Omega = \mathbb{C}$,

b) $\varphi(x, y) = \arg(x + iy)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

c) $\varphi(x, y) = 2 \sin x \cdot \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$, $\Omega = \mathbb{C}$,

d) $\varphi(x, y) = \mathrm{e}^{-2x} \cdot \sin(2y) - x^2 + y^2 + 2023$, $\Omega = \mathbb{C}$,

e) $\varphi(x, y) = xy - \frac{y}{x^2+y^2}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

f) $\varphi(x, y) = \operatorname{Re}(\ln(x + iy))$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.