4. cvičení z FKP

1) Určete reálnou a imaginární část funkce f, je-li

a) $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$,

b) $f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{z \cdot \bar{z}}$,

c) $f(z) = \cos z$,

d) $f(z) = z^4 - 3z^2 + 1$.

2) Vypočtěte

a) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z}$,

b) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{z \cdot \bar{z}}$,

c) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z \cdot \operatorname{Re} z}{|z|}$,

d) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z^2}{|z|^2}$,

e) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z^3}{|z|^2}$,

f) $\lim\limits_{z \to -i} \frac{z^2 + z(i+1) + i}{z^2 + 1}$.

3) Ukažte, že funkce $f(z) = \arg z$ je nespojitá v bodě -1.

4) Znázorněte množinu $\langle \varphi \rangle = \{\varphi(t) :\ t \in D\varphi\}$, je-li

a) $\varphi(t) = -2 + it$, $D\varphi = \langle 0, 2 \rangle$,

b) $\varphi(t) = t - i(t^3 - 1)$, $D\varphi = \langle -1, 1 \rangle$,

c) $\varphi(t) = 1 + \mathrm{e}^{-it}$, $D\varphi = \langle 0, 2\pi \rangle$,

d) $\varphi(t) = \mathrm{e}^{3it} - 1 + i$, $D\varphi = \langle -\pi, \pi \rangle$,

e) $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{i2\pi t}, & t \in \left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\rangle, \\ ti - i, & t \in \left\langle \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right\rangle. \end{cases}$

5) Parametrizujte množinu Ω (tzn. najděte křivku φ takovou, aby $\langle \varphi \rangle = \Omega$), je-li

a) $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} :\ |z + i - 1| = \sqrt{2} \right\}$,

b) Ω je úsečka s krajními body $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$,

c) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} z = 6 \operatorname{Re} z \}$,

d) $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} \frac{1}{\bar{z}} = 3 \right\}$.

6) Znázorněte množinu Ω a rozhodněte, zda je Ω oblastí (popř. zda je alespoň otevřená), je-li

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C}: \ |z-1-i| < 1 \ \vee \ |z-3-i| < 1\}$,

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C}: \ |z-i| < 2 \ \wedge \ |z+i| < 2\}$,

c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C}: \ |z-i| > |z+i|\}$,

d) $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C}: \ |z| < 2 \ \wedge \ |z-1| > \frac{1}{2} \ \wedge \ |z+1| > \frac{1}{2}\right\}$,

e) $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C}: \ |\operatorname{Re} z| < 1 \ \wedge \ |\operatorname{Im} z| < 1 \ \wedge \ \arg z \neq \frac{\pi}{2}\right\}$,

f) $\Omega = \{z \in \mathbb{C}: \ 2|z-1| < |z|\}$.