

3. cvičení z FKP

1) Určete a znázorněte množinu $M = \{\frac{1}{z} : z \in \Omega\}$, je-li

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 - \sqrt{3}i| = 2\}$,

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z)^2 = (\operatorname{Im} z)^2\}$,

c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| = 2\}$,

d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\frac{z}{2}) = 0\}$.

2) Určete a znázorněte množinu $M = \{f(z) : z \in \Omega\}$, je-li

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{3} \leq \arg z < \pi\}$, $f(z) = z^2$,

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq \frac{2}{3}\pi\}$, $f(z) = e^z + 1$,

c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2} \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) = e^{i\bar{z}}$,

d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -1\}$, $f(z) = -2z^2 + 3$.

3) Ukažte, že pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí

a) $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$,

b) $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

4) Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$,

b) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,

c) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

5) Vypočtěte

a) $e^{3+8\pi i}$,

b) $\sin(\frac{\pi}{2} + 3i)$,

c) $\cos i - \cosh 1$, $\cosh i - \cos 1$, $\sin i - i \sinh 1$, $-i \sinh i - \sin 1$,

d) $\operatorname{Ln}(3 + 4i)$, $\ln(3 + 4i)$,

e) $\ln(-1 \cdot i)$, $\ln(-1) + \ln i$,

f) $(\sqrt{2})^{2i}$,

g) $(-1)^{1+3i}$,

h) $i^{(i^i)}$,

i) $(-1 + \sqrt{3}i)^{-12}$.

6) Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí

a) $\cos z = 3i$,

b) $z^3 - 2z^2 + 5z = 0$,

c) $\sin z = i$.