

1. cvičení z FKP

1) Určete $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$, je-li

a) $z = \frac{3 - 5i}{2 + 3i}$,

b) $z = (1 + i)^2 + 2i^{19}$,

c) $z = i - \frac{\overline{1 + 3i}}{2}$.

2) Dokažte, že pro každá $z, w \in \mathbb{C}$ platí, že

a) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,

b) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ (pokud $w \neq 0$),

c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

d) $|z - w| \geq ||z| - |w||$ (obrácená trojúhelníková nerovnost).

3) Zapište číslo z v goniometrickém tvaru, je-li

a) $z = -\sqrt{3} + i$,

b) $z = -\frac{4}{1 + i}$.

4) Dokažte (Moivreovu větu):

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \varphi \in \mathbb{R}) : (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

5) Určete $\operatorname{Arg} z$ a $\operatorname{arg} z$, je-li

a) $z = \frac{3 - i}{2 + i}$,

b) $z = (-\sqrt{3} - i)^{36}$,

c) $z = -1 - \sqrt{5}i$.

6) Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí

a) $z^2 = 4i$,

b) $z^3 = -8$,

c) $z^n = 1, n \in \{2, 3, 4\}$,

d) $\left(\frac{z+2}{z-2}\right)^2 = -3 - 4i$,

e) $z^3 = i$.

7) Určete z^m , je-li

a) $z = 16, m = \frac{1}{4}$,

b) $z = (6 + 4i)(3 - 2i) + 1, m = \frac{1}{3}$.