

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

**Řešení 2D Neumannovy úlohy s Laplaceovým
operátorem nepřímou metodou hraničních
prvků**

**Solution of 2D Neumann boundary value
problems with Laplace operator by indirect
boundary element method**

Zadání bakalářské práce

Student: **Robert Skopal**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: **Řešení 2D Neumannovy úlohy s Laplaceovým operátorem nepřímou metodou hraničních prvků**
Solving 2D Neumann problem with Laplace operator using indirect boundary element method

Zásady pro vypracování:

Cílem této bakalářské práce je seznámit se s metodou potenciálů (tzv. nepřímou metodou hraničních elementů) jakožto metodou řešení eliptických okrajových úloh s tou podstatnou výhodou, že při diskretizaci úlohy se pracuje pouze se sítí na hranici domény (diskretizace vnitřku oblasti není potřeba v případě, že nás zajímají pouze hraniční hodnoty řešení). Tato metoda hledá řešení okrajové úlohy ve tvaru příslušného potenciálu s neznámou hustotou. Student, který si vybere toto téma pro svou bakalářskou práci, by měl metodu potenciálů aplikovat na Neumannovu úlohu s Laplaceovým operátorem v rovině, k diskretizaci odvozené hraniční integrální rovnice použít kolokační metodu a řešení numericky realizovat v prostředí Matlab. Získané výsledky je vhodné porovnat s příslušným analytickým řešením úlohy.

Student bude postupovat v těchto krocích:

- 1) Ujasnění si pojmů vnější/vnitřní Dirichletova/Neumannova/smíšená okrajová úloha s Laplaceovým operátorem v rovině.
- 2) Seznámení se s pojmem fundamentálního řešení Laplaceova operátoru v rovině a s tzv. větou o reprezentaci, která tvoří základ metody hraničních elementů.
- 3) Získání přehledu o základních vlastnostech potenciálů v rovině pro případ Laplaceova operátoru.
- 4) Formulace řešení 2D Neumannovy úlohy s Laplaceovým operátorem pomocí vhodného potenciálu s neznámou hustotou (na hranici). V případě, že si student zvolí řešit i vnější Neumannovu úlohu, je vhodné se seznámit s tzv. Kelvinovou transformací, jež umožní převedení řešení vnější úlohy na řešení vnitřní úlohy.
- 5) Diskretizace příslušné hraniční integrální rovnice kolokační metodou a použití vhodné regularizace matice tuhosti.
- 6) Implementace problému v Matlabu a provedení série numerických experimentů na konkrétních úlohách.
- 7) Výpočet řešení uvnitř oblasti pomocí získané numerické aproximace hustoty potenciálu a srovnání výsledků s analytickým řešením.
- 8) Nakonec je vhodné srovnat získané výsledky s některým z doménových přístupů (např. s metodou sítí).

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Olaf Steinbach: Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. Springer 2008.
- [2] Jiří Bouchala: Úvod do Boundary Elements Method. Slidy vytvořené pro zimní školu v rámci konference SNA'07, http://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/Bouchala_BEM.pdf, 2007.
- [3] Karel Rektorys a spolupracovníci: Přehled užití matematiky II. Prometheus, 1995.
- [4] Jan Zapletal: Aplikace metody hraničních prvků na řešení Dirichletovy - Neumanovy okrajové úlohy.

Bakalářská diplomová práce, VŠB-TUO, 2009.

[5] Kendall Atkinson, Weimin Han: Theoretical Numerical Analysis. Texts in Applied Mathematics, Springer, 2001.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Marie Sadowská, Ph.D.**

Datum zadání: 18.11.2011

Datum odevzdání: 04.05.2012



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě, 26.4.2012


.....

Rád bych na tomto místě poděkoval Ing. Marii Sadowské, Ph.D. za ochotu a trpělivost při vedení této bakalářské práce.

Dále bych rád poděkoval Ing. Alexandrovi Markopoulosovi, Ph.D za kontrolu implementace FDM pomocí srovnání s výsledky získanými metodou FEM a doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D. za rady poskytnuté k teoretické části.

Abstrakt

Tato práce se zabývá nepřímou metodou hraninčných prvků, tzv. metodou potenciálů, a její aplikací pro řešení 2D vnitřních a vnějších Neumannových úloh s Laplaceovým operátorem. Principem metody je hledání řešení ve tvaru potenciálu a přeformulování okrajového problému na základě hraničních vlastností daného potenciálu na integrální rovnici, která je pak v této práci řešena pomocí kolokační metody. Pro řešení vnějších úloh je navíc využita Kelvinova transformace, díky které přeformulujeme vnější úlohu na neomezené oblasti na úlohu vnitřní. Přesnost metody je pak pro vnitřní i vnější úlohy porovnávána s metodou sítí.

Klíčová slova

Nepřímá metoda hraničních prvků, metoda potenciálů, věta o třech potenciálech, Neumannova úloha, Laplaceova rovnice, metoda kolokace, metoda sítí

Abstract

In this work the Indirect Boundary Element Method and its use in solving 2D interior and exterior Neumann boundary value problem with Laplace operator is presented. Method is based on finding the solution in the form of one of the potentials and reformulating the boundary value problem into integral equations based on the potential boundary properties. In this work these equations are solved using the collocation method. For exterior boundary value problem we use the Kelvin transformation which allows us to transform the problem on unlimited domain into an interior boundary value problem. Precision of the method is consequently compared with results given by the Finite Difference Method for either inner and outer problems.

Key words

Indirect boundary element method, representation formula, Neumann boundary value problem, Laplace equation, collocation method, finite difference method

Seznam použitých zkratk a symbolů

\mathbb{R}	množina všech reálných čísel
\mathbb{R}^+	množina všech kladných reálných čísel, tj. $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$
\mathbb{R}^n	n -rozměrný euklidovský prostor
$\mathbb{R}^{n \times n}$	prostor všech reálných matic řádu $n \times n$
\mathbb{N}	množina všech přirozených čísel
$\ \cdot\ $	euklidovská norma v \mathbb{R}^n , tj. $\ x\ := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
$\langle \cdot; \cdot \rangle$	euklidovský skalární součin v \mathbb{R}^n , tj. $\langle x; y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
$U(x)$	okolí bodu x
$\partial\Omega$	hranice množiny Ω
$\overline{\Omega}$	uzávěr množiny Ω
$f _{\Omega}$	zúžení funkce f na množinu Ω
Δ	Laplaceův operátor, tj.: $\Delta u(x) := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)$
∇	gradient funkce
■	konec (náznaku) řešení příkladu
□	konec důkazu
δ_{abs}	absolutní chyba
δ_{rel}	relativní chyba
FDM	metoda sítí - Finite Diference Method

Obsah

1	Úvod	2
2	Harmonické funkce a fundamentální řešení	3
3	Potenciály v \mathbb{R}^2	5
3.1	Potenciál jednoduché vrstvy	6
3.2	Potenciál dvojvrstvy	7
3.3	Newtonův potenciál	8
4	Okrajové úlohy s Poissonovou rovnicí	10
4.1	Fyzikální interpretace	11
5	Metoda potenciálů pro vnitřní Neumannovu úlohu s Laplaceovou rovnicí	13
5.1	Výpočet hustoty pomocí kolokační metody	13
5.2	Vyčíslení matice soustavy	14
5.3	Dopočtení řešení úlohy pomocí známé hustoty	16
6	Řešení vnější Neumannovy úlohy s Laplaceovou rovnicí	17
6.1	Stručně o Kelvinově transformaci	17
6.2	Převod vnější Neumannovy úlohy na vnitřní	17
7	Numerické experimenty	19
7.1	Stručně o metodě sítí (FDM)	19
7.2	Vnitřní Neumannova úloha	21
7.3	Vnější Neumannova úloha	24
8	Závěr	30
	Reference	31

1 Úvod

Nepřímá metoda hraničních prvků (IDBEM - InDirect Boundary Element Method)[7], někdy také označována jako metoda potenciálů, je jednou z numerických metod užívaných k řešení okrajových úloh. Představuje tak možnou alternativu pro přímou metodu hraničních prvků (DBEM - Direct Boundary Element Method)[7] nebo běžně používané doménové metody, jako např. metodu konečných prvků (FEM - Finite Element Method)[7] nebo metodu sítí (FDM - Finite Difference Method)[5].

Oproti přímé variantě je zde řešení hledáno ve tvaru jednoho z potenciálů a k jeho vypočtení jsou využity hraniční vlastnosti daného potenciálu a znalost fundamentálního řešení daného diferenciálního operátoru. 2D okrajový problém se tímto zredukuje na integrální rovnice na 1D hranici a obdobně 3D problém na integrální rovnice na 2D hranici. Oproti FEM a FDM tak vzniká velká výhoda v tom, že není třeba diskretizovat celou oblast ale pouze její hranici. Pro větší přesnost řešení tak stačí opět pouze jemnější diskretizace hranice a ne celé oblasti. Tato výhoda se projeví zejména při řešení vnějších úloh, kdy se původní úloha na neomezené oblasti převede (i s pomocí Kelvinovy transformace) na problém na hranici a řešení se dopočte pouze v požadovaných bodech. V případě FEM či FDM se naproti tomu typicky diskretizuje velká část dané neomezené oblasti, což v případě metody potenciálů odpadá. Výše zmíněné hraniční integrální rovnice jsou v této práci řešeny tzv. kolokační metodou.

V kapitolách 2 a 3 se budeme věnovat harmonickým funkcím, fundamentálnímu řešení Laplaceovy rovnice v rovině a potenciálům v \mathbb{R}^2 , což jsou nezbytné znalosti potřebné k pro metodu potenciálů. Dále se v kapitole 4 seznámíme s vybranými typy vnitřních i vnějších okrajových úloh, včetně Neumannovy úlohy, která je hlavním předmětem našeho zájmu. Jejím řešením pomocí metody potenciálů se pak zabývají kapitoly 5 a 6. V případě vnější Neumannovy úlohy je využita Kelvinova transformace [1], díky níž převedeme úlohu na neomezené oblasti na úlohu vnitřní. V poslední kapitole jsou prezentovány výsledky provedených numerických experimentů.

2 Harmonické funkce a fundamentální řešení

Definice 2.1 (Oblast v \mathbb{R}^2)

Množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nazveme oblastí, platí-li současně, že Ω je:

1. **otevřená**, tj. $(\forall x \in \Omega) (\exists U(x)) : U(x) \subset \Omega$,
2. **souvislá**, tj. libovolné dva body z Ω lze spojit křivkou ležící v Ω .

Definice 2.2 (Harmonické funkce v oblasti v \mathbb{R}^2)

1. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená¹ oblast. Řekneme, že funkce $u \in C^2(\Omega)$ je harmonická v Ω , jestliže

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega.$$

2. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ neomezená² oblast. Řekneme, že funkce $u \in C^2(\Omega)$ je harmonická v Ω , jestliže současně platí:

- $\Delta u = 0 \text{ v } \Omega$,
- $u = \mathcal{O}(1)$ pro $\|x\| \rightarrow \infty, x \in \Omega^3$.

Příklad 2.1 Buď $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, u(x) := 1/(x_1^2 + x_2^2)$, pak

$$(\forall x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| > 1) : |u(x)| = \frac{1}{\|x\|^2} < 1.$$

Platí tedy, že $u = \mathcal{O}(1)$ pro $\|x\| \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

Příklad 2.2 Buď $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, u(x) := x_1 \cdot x_2$, pak

$$u = \mathcal{O}(1) \text{ pro } \|x\| \rightarrow \infty, x \in \Omega_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x_1} > x_2 > 0 \right\}, \quad (1)$$

neboť $\forall x \in \Omega_1 : |u(x)| = x_1 \cdot x_2 < x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = 1$.

Příklad 2.3 Funkce $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, u(x) := 1$ je harmonická v každé omezené i neomezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Příklad 2.4 Funkce $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, u(x) := x_1 \cdot x_2$ je harmonická v každé omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tato funkce je dále harmonická např. na neomezené oblasti Ω_1 , která je definována v (1), avšak není harmonická např. na neomezené oblasti $\Omega_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - 1 < x_2 < x_1 + 1\}$.

¹Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená, pokud existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in \Omega : \|x\| \leq c$.

²Neomezená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je taková, která není omezená.

³ $u = \mathcal{O}(1)$ pro $\|x\| \rightarrow \infty, x \in \Omega \Leftrightarrow (\exists M > 0)(\exists R > 0)(\forall x \in \Omega : \|x\| > R) : |u(x)| \leq M$.

Definice 2.3 (Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice v rovině) Funkci $U : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$U(x, y) := -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\|,$$

nazýváme **fundamentální** (elementární) **řešení Laplaceovy rovnice v rovině**⁴.

Pozorování 2.1 Buď $y \in \mathbb{R}^2$ libovolné pevné. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}^2$ různé od y platí

$$\Delta_x U(x, y) := \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}(x, y) = 0.$$

Důkaz : Buď $y \in \mathbb{R}^2$ libovolné pevné a $x \in \mathbb{R}^2$ libovolný bod různý od y . Pak platí:

$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, proto pro $i = 1, 2$ máme:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\|x - y\|} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x_i - y_i)}{\|x - y\|} = \frac{y_i - x_i}{2\pi \|x - y\|^2} \text{ a}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - 2(x_i - y_i)(x_i - y_i)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} = \frac{2(x_i - y_i)^2 - \|x - y\|^2}{2\pi \|x - y\|^4}.$$

$$\text{Odtud pak : } \Delta_x U(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\|x - y\|^2 - 2(x_1 - y_1)^2 + \|x - y\|^2 - 2(x_2 - y_2)^2}{\|x - y\|^2} = \underline{0}.$$

□

Platí tedy, že pro každé pevně zvolené $y \in \mathbb{R}^2$ je funkce $x \mapsto U(x, y)$ harmonická v každé omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$. Na druhou stranu však funkce $x \mapsto U(x, y)$ není harmonická v žádné neomezené oblasti \mathbb{R}^2 .

Úmluva 2.1 V celém textu bude nyní U značit fundamentální řešení Laplaceovy rovnice v rovině dle definice 2.3.

⁴Laplaceova rovnice má tvar $\Delta u = 0$.

3 Potenciály v \mathbb{R}^2

Věta 3.1 (O třech potenciálech / O reprezentaci)

Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak pro všechna $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Delta u(y) U(x, y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn}(y) U(x, y) ds_y - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{dU}{dn_y}(x, y) ds_y.$$

Důkaz : Jedná se o klasický výsledek, jehož důkaz si lze přečíst např. v [6], str. 15-16. □

Ve větě 3.1 značí

- $n(y)$... vnější jednotkový normálový vektor k $\partial\Omega$ v bodě $y \in \partial\Omega$,
- $\frac{du}{dn}$... derivaci funkce u podle vnější normály.

V našem případě:

$$\frac{du}{dn}(y) = \langle \nabla u(y); n(y) \rangle \text{ a } \frac{dU}{dn_y}(x, y) = \langle \nabla_y U(x, y); n(y) \rangle.$$

Přímým výpočtem dále dostaneme, že

$$\frac{dU}{dn_y}(x, y) = \frac{\langle x - y; n(y) \rangle}{2\pi \|x - y\|^2}.$$

Poznámka 3.1 Speciálně pro řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ Laplaceovy rovnice v rovině pak díky větě o reprezentaci platí

$$\forall x \in \Omega : u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn}(y) U(x, y) ds_y - \int_{\partial\Omega} \frac{dU}{dn}(x, y) u(y) ds_y.$$

Definice 3.1 (Potenciály v \mathbb{R}^2)

Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí. Funkce $v, w, \varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dané předpisy

- $v(x) := - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \ln \|x - y\| ds_y,$
- $w(x) := - \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{d}{dn_y} \ln \|x - y\| ds_y,$
- $\varphi(x) := - \int_{\Omega} \rho(y) \ln \|x - y\| dy,$

postupně nazýváme

- potenciál jednoduché vrstvy,
- potenciál dvojrstvy,

- Newtonův (objemový) potenciál.

Funkce $\mu, \sigma, \rho : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ nazýváme hustoty příslušných potenciálů.

Poznámka 3.2 Všimněme si, že první integrál ve větě o reprezentaci je Newtonův potenciál s hustotou $\frac{1}{2\pi}\Delta u$, druhý integrál je potenciál jednoduché vrstvy s hustotou $\frac{1}{2\pi}\frac{du}{dn}$ a třetí integrál je potenciál dvojvrstvy s hustotou $\frac{1}{2\pi}u$.

3.1 Potenciál jednoduché vrstvy

Věta 3.2 (O vlastnostech potenciálu jednoduché vrstvy)

Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí a $\mu \in C(\partial\Omega)$. Pak platí, že

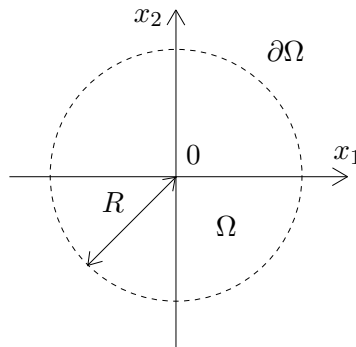
- v je spojitá funkce na \mathbb{R}^2 ,
- $\Delta v = 0$ v Ω i v $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$,
- $\forall x \in \partial\Omega$:

$$\left[\frac{dv}{dn}\right]_{\text{int}}(x) := \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{dv}{dn}(x + \alpha n(x)) = \pi\mu(x) - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{d}{dn_x} \ln \|x - y\| ds_y$$

$$\left[\frac{dv}{dn}\right]_{\text{ext}}(x) := \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{dv}{dn}(x + \alpha n(x)) = -\pi\mu(x) - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{d}{dn_x} \ln \|x - y\| ds_y$$

Tedy $\forall x \in \partial\Omega : \left[\frac{dv}{dn}\right]_{\text{int}}(x) - \left[\frac{dv}{dn}\right]_{\text{ext}}(x) = 2\pi\mu(x)$, z čehož plyne, že potenciál v má na $\partial\Omega$ skok v derivaci podle vnější normály vzhledem k $\partial\Omega$.

Příklad 3.1 Nechť $\Omega := B_R(0) := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| < R\}$, $R > 0$, $\mu(y) := 1 \forall y \in \partial\Omega$. Určeme nyní předpis daného potenciálu jednoduché vrstvy.



Obrázek 1: Oblast $\Omega := B_R(0)$.

Náznak řešení: Pro parametrizaci $\partial\Omega$ využijeme transformaci do polárních souřadnic:

$$y_1(t) = R \cos t, \quad y_2(t) = R \sin t, \quad \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

a stejně tak bod $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ zapíšeme jako

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad \text{kde } r \in \mathbb{R}^+ \text{ a } \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Z definice 3.1 pak máme

$$v(r, \varphi) = -\frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \ln(r^2 + R^2 - \underbrace{2R(r \cos \varphi \cos t + r \sin \varphi \sin t)}_{2Rr \cos(\varphi-t)}) dt.$$

Integrál následně vypočteme např. pomocí [4], str. 520, vzorec č. 50:

$$v(x) = \begin{cases} -2\pi R \ln \|x\| & \text{pro } \|x\| \geq R, \\ -2\pi R \ln R & \text{pro } R \geq \|x\| > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Jelikož pro $x = (0, 0)$ máme $v(x) = -\int_{\partial B_R(0)} \ln \overbrace{\|y\|}^R ds_y = -2\pi R \ln R$, můžeme výsledek (2) dále upravit na

$$v(x) = \begin{cases} -2\pi R \ln \|x\| & \text{pro } \|x\| \geq R, \\ -2\pi R \ln R & \text{pro } R \geq \|x\|, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Pro $R := 1$ je potenciál v znázorněn na obrázku 2(a). ■

3.2 Potenciál dvojvrstvy

Věta 3.3 (O vlastnostech potenciálu dvojvrstvy)

Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí a $\sigma \in C(\partial\Omega)$, pak platí:

- $w|_{\partial\Omega}$ je spojitá funkce,
- $\Delta w = 0$ v Ω i v $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$,
- $\forall x_0 \in \partial\Omega$ platí:

$$w_{\text{int}}(x_0) := \lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} w(x) = -\pi\sigma(x_0) + w(x_0),$$

$$w_{\text{ext}}(x_0) := \lim_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \ni x \rightarrow x_0} w(x) = \pi\sigma(x_0) + w(x_0).$$

Tedy $\forall x_0 \in \partial\Omega$: $w_{\text{int}}(x_0) - w_{\text{ext}}(x_0) = -2\pi\sigma(x_0)$. Potenciál dvojvrstvy má tedy na $\partial\Omega$ skok ve funkční hodnotě.

Příklad 3.2 Necht' $\Omega := B_R(0) := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| < R\}$ a $R > 0$ (viz obr. 1). Dále buď $\sigma(y) := 1$
 $\forall y \in \partial\Omega$. Určeme nyní předpis daného potenciálu dvojvrstvy.

Náznak řešení: Podobně jako v případě potenciálu jednoduché vrstvy využijeme transformaci do polárních souřadnic

$y_1(t) = R \cos t$, $y_2(t) = R \sin t$ a $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, kde $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{R\}$ a $t, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Odtud pak

$$w(r, \varphi) = R \int_0^{2\pi} \frac{r \cos(\varphi - t) - R}{r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\varphi - t)} dt, \text{ kde } r \neq R \wedge r \neq 0, \quad (3)$$

což můžeme přepsat na součet dvou integrálů $I_1(R, \varphi) + I_2(R, \varphi)$, kde

$$I_1(R, \varphi) = Rr \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi - t)}{r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\varphi - t)} dt = 5 \begin{cases} \frac{2\pi R^2}{r^2 - R^2} & \text{pro } r > R, \\ \frac{2\pi r^2}{R^2 - r^2} & \text{pro } 0 < r < R, \end{cases}$$

$$I_2(R, \varphi) = -R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\varphi - t)} dt = 5 \begin{cases} \frac{-2\pi R^2}{r^2 - R^2} & \text{pro } r > R, \\ \frac{-2\pi R^2}{R^2 - r^2} & \text{pro } 0 < r < R. \end{cases}$$

Platí tedy:

- $\|x\| > R$: $I_1 + I_2 = 0$,
- $0 < \|x\| < R$: $I_1 + I_2 = -2\pi$,
- $\|x\| = 0$: $w(0, 0) = \int_{\partial B_R(0)} \frac{\langle -y; \frac{y}{R} \rangle}{\|y\|^2} ds_y = -2\pi$,
- $\|x\| = R$: $w(x) = R \int_0^{2\pi} \frac{R(\cos(\varphi - t) - 1)}{2R^2(1 - \cos(\varphi - t))} dt = -\pi$,

odtud

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \|x\| > R, \\ -2\pi & \text{pro } \|x\| < R, \\ -\pi & \text{pro } \|x\| = R, \end{cases} x \in \mathbb{R}^2.$$

Pro $R := 1$ je potenciál w znázorněn na obrázku 2(b). ■

3.3 Newtonův potenciál

Věta 3.4 (O vlastnostech Newtonova (objemového) potenciálu)

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí a $\rho \in C(\overline{\Omega})$, pak platí:

- $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

⁵Vyjádřeno pomocí [4], str. 520, vzorec č. 39.

- $\Delta\varphi = 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$.

Příklad 3.3 Nechť $\Omega := B_R(0) := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| < R\}$ a $R > 0$ (viz obr. 1) a $\rho(y) := 1 \forall y \in \partial\Omega$. Určeme nyní předpis daného Newtonova potenciálu.

Náznak řešení: Při výpočtu použijeme velmi podobný postup jako v případě potenciálu jednoduché vrstvy. Po transformaci do polárních souřadnic

$$y_1(r, t) = r \cos t, \quad y_2(r, t) = r \sin t \quad \text{a} \quad x_1 = \alpha \cos \gamma, \quad x_2 = \alpha \sin \gamma,$$

$$\text{kde } r \in \langle 0, R \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \text{a} \quad t, \gamma \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

a s využitím [4], str. 520, vzorec č. 50 dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \gamma) &= \int_0^R r \left[-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(\alpha^2 + r^2 - 2r\alpha \cos(\gamma - t)) dt \right] dr = \\ &= \begin{cases} -\pi R^2 \ln \alpha & \text{pro } \alpha \geq R, \\ -\pi R^2 \ln R + \frac{\pi(R^2 - \alpha^2)}{2} & \text{pro } 0 < \alpha < R. \end{cases} \end{aligned}$$

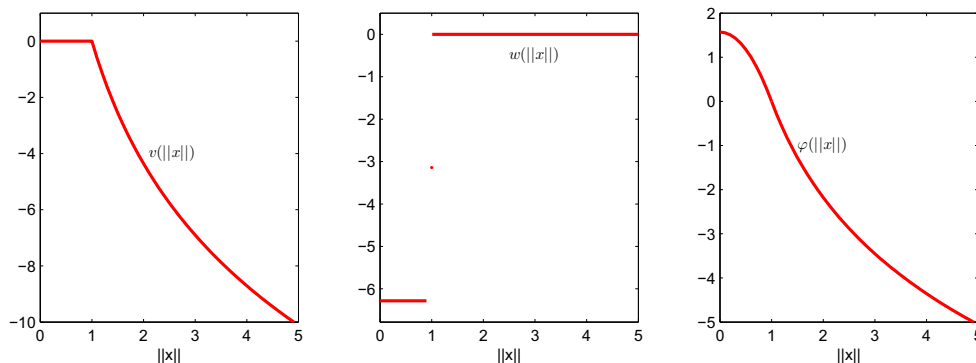
Speciálně pro $x = (0, 0)$ platí, že

$$\varphi(0, 0) = - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r \ln r \, dr \right) dt = -2\pi \int_0^R r \ln r \, dr = -\pi R^2 \ln R + \frac{\pi R^2}{2},$$

a proto

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\pi R^2 \ln \|x\| & \text{pro } \|x\| \geq R, \\ -\pi R^2 \ln R + \frac{\pi(R^2 - \|x\|^2)}{2} & \text{pro } \|x\| \leq R, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Pro $R := 1$ je potenciál φ znázorněn na obr. 2(c). ■



Obrázek 2: Potenciál jednoduché vrstvy (a), potenciál dvojvrstvy (b), Newtonův potenciál (c) pro jednotkové hustoty a $\Omega := B_1(0)$.

4 Okrajové úlohy s Poissonovou rovnicí

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí. Uvažujme Poissonovou rovnici

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \quad f \in C(\overline{\Omega}),$$

a nějakou z následujících okrajových podmínek na hranici:

Dirichletova:

$$u = g \text{ na } \partial\Omega, \quad g \in C(\partial\Omega), \quad (4)$$

Neumannova:

$$\frac{du}{dn} = h \text{ na } \partial\Omega, \quad h \in C(\partial\Omega), \quad (5)$$

Newtonova:

$$\alpha u + \frac{du}{dn} = \beta \text{ na } \partial\Omega, \quad \alpha, \beta \in C(\partial\Omega), \quad \alpha \neq 0 \text{ na } \partial\Omega, \quad (6)$$

smíšená:

$$u = g \text{ na } \Gamma_1 \text{ a } \frac{du}{dn} = h \text{ na } \Gamma_2, \text{ kde } \begin{matrix} \emptyset \neq \Gamma_1 \subset \partial\Omega & \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega \\ \emptyset \neq \Gamma_2 \subset \partial\Omega & \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \end{matrix} \text{ a } \begin{matrix} g \in C(\Gamma_1) \\ h \in C(\Gamma_2) \end{matrix}. \quad (7)$$

Vnitřní okrajovou úlohou s Poissonovou rovnicí tedy budeme rozumět úlohu ve tvaru

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \\ \text{jedna z okrajových podmínek (4) - (7).}$$

Uvažujme dále Poissonovou rovnici

$$-\Delta u = f \text{ v } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \quad f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega),$$

a tzv. radiační podmínku⁶, např. $u = \mathcal{O}(1)$ pro $\|x\| \rightarrow \infty$ ⁷.

Vnější okrajovou úlohou s Poissonovou rovnicí pak budeme rozumět úlohu ve tvaru

$$-\Delta u = f \text{ v } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \\ \text{jedna z okrajových podmínek (4) - (7),}^8 \\ \text{předepsaná radiační podmínka.}$$

Pro jednoduchost teď na chvíli uvažujme pouze vnitřní okrajovou úlohu. Často je výhodné, aby zadání okrajové úlohy obsahovalo místo Poissonovy rovnice rovnici Laplaceovu. V takových případech pak řešení dané úlohy hledáme ve tvaru $u = u_p + v$, kde u_p je tzv. partikulární řešení, z čehož plyne, že $-\Delta u_p = f \text{ v } \Omega$. Tedy $f = -\Delta u = -\Delta u_p - \Delta v$ a odtud pak $-\Delta v = f + \Delta u_p = 0 \text{ v } \Omega$. Podobně převedeme i příslušnou okrajovou podmínku:

⁶Radiační podmínka klade určité omezení na „chování funkce v ∞ “.

⁷V tomto případě máme na mysli, že $(\exists M > 0)(\exists R > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| > R) : |u(x)| < M$.

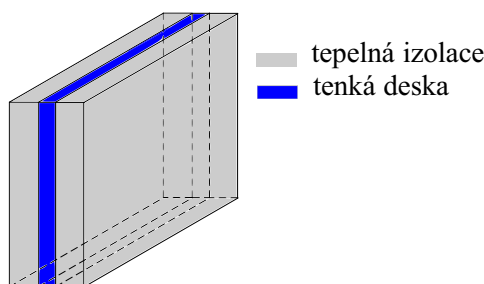
⁸V tomto případě n značí vnější jednotkový normálový vektor k hranici oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$.

- Dirichletova: $u = g$ na $\partial\Omega \implies u_p + v = g$ na $\partial\Omega \implies v = g - u_p$ na $\partial\Omega$.
- Neumannova: $\frac{du}{dn} = h$ na $\partial\Omega \implies \frac{d(u_p+v)}{dn} = h$ na $\partial\Omega \implies \frac{dv}{dn} = h - \frac{du_p}{dn}$ na $\partial\Omega$.
- Newtonova: $\alpha u + \frac{du}{dn} = \beta$ na $\partial\Omega \implies \alpha u_p + \alpha v + \frac{du_p}{dn} + \frac{dv}{dn} = \beta$ na $\partial\Omega \implies \alpha v + \frac{dv}{dn} = \beta - \alpha u_p - \frac{du_p}{dn}$ na $\partial\Omega$.

Pokud se jedná o smíšenou okrajovou úlohu, převedeme okrajovou podmínku na každé z částí Γ dle výše zmíněných pravidel. Při převodu vnějších úloh pak musí partikulární řešení u_p splňovat i zadanou radiační podmínku.

4.1 Fyzikální interpretace

Pro lepší představu budeme význam okrajových úloh demonstrovat na následujícím fyzikálním problému (více lze najít např. v [3]). Uvažujme tenkou⁸ desku tvaru Ω , z obou „bočních“ stran dokonale odizolovanou tepelnou izolací (viz obr. 3). Předpokládejme, že je vyrobena z homogenního⁹, isotropního¹⁰ materiálu s koeficientem tepelné vodivosti 1 a nejsou zde přítomny žádné vnitřní zdroje tepla (vzniklé např. chemickou reakcí, protékáním elektrického proudu apod).



Obrázek 3: Z bočních stran tepelně odizolovaná tenká deska.

Vnitřní okrajová úloha

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{v } \Omega, \\ \frac{du}{dn} &= h \quad \text{na } \Gamma := \partial\Omega \end{aligned}$$

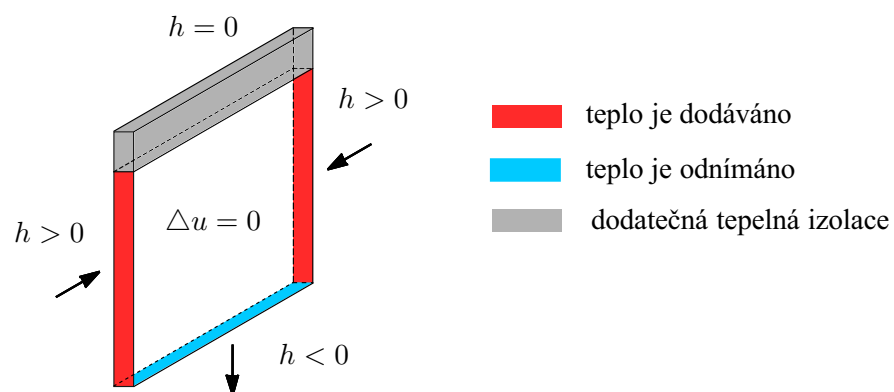
pak popisuje stacionární (ustálené) vedení tepla v této desce. Funkce u má pak význam teploty desky v daném bodě. Výměna tepla může probíhat pouze přes hrany desky a je dána hodnotami $\frac{du}{dn} = h$ ($-\frac{du}{dn}$ má pak význam tepelného toku¹¹). Je-li $h = 0$, pak na dané části Γ k výměně nedochází (např. díky dodatečné tepelné izolaci). Je-li $h > 0$ (resp. $h < 0$) na části Γ , pak je na příslušné části hranice deska ohřívána (resp. ochlazována), viz. obr. 4.

⁸Tloušťka desky je zanedbatelná vzhledem k jejím ostatním rozměrům.

⁹Tepelná vodivost nezávisí na poloze v desce.

¹⁰Tepelná vodivost nezávisí na směru.

¹¹Množství tepla, které proteče průřezem desky za jednotku času.



Obrázek 4: Stacionární vedení tepla v tenké desce.

Pro vnější úlohu bychom mohli uvažovat podobnou interpretaci s tím, že hranice Γ by představovala okraj zařízení pro regulaci teploty, kterým by do okolního homogenního, isotropního prostředí sálalo (resp. bylo odebíráno) teplo. V našem případě by však opět muselo platit, že do tepelné výměny nezasahují žádné jiné podněty, které by měly vliv na ohřívání (resp. ochlazování) vzduchu.

5 Metoda potenciálů pro vnitřní Neumannovu úlohu s Laplaceovou rovnicí

Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $h \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme vnitřní úlohu s Laplaceovou rovnicí

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ v } \Omega, \\ \frac{du}{dn} &= h \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Řešení úlohy (8) budeme hledat ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy, tj.

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \ln ||x - y|| ds_y, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Z věty 3.2 víme, že pro všechna $x \in \partial\Omega$ platí

$$\left[\frac{du}{dn} \right]_{\text{int}}(x) = \pi\mu(x) - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{d}{dn_x} \ln ||x - y|| ds_y,$$

a proto

$$h(x) = \pi\mu(x) - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{d}{dn_x} \ln ||x - y|| ds_y, \quad x \in \partial\Omega. \quad (9)$$

Nutnou a zároveň postačující podmínkou řešitelnosti úlohy (8) je, aby $\int_{\partial\Omega} h ds = 0$. Toto řešení je jednoznačné až na aditivní konstantu a je dáno vztahem

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \ln ||x - y|| ds_y, \quad x \in \bar{\Omega},$$

kde hustota μ je řešením rovnice (9).

5.1 Výpočet hustoty pomocí kolokační metody

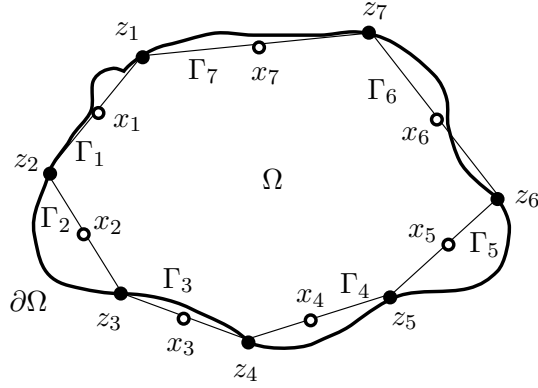
Rovnici (9) budeme přibližně řešit tzv. kolokační metodou. Hranici $\partial\Omega$ nahradíme systémem úseček $\{\Gamma_i\}_{i=1}^n$. Označme pomocí z_i a z_{i+1} koncové uzly dílku Γ_i a pomocí x_i střed dílku Γ_i , tzn. $x_i := \frac{z_i + z_{i+1}}{2}$, $i = 1, \dots, n-1$, a $x_n := \frac{z_n + z_1}{2}$, viz obr. 5. Oblast Ω tedy nahradíme mnohoúhelníkem, jehož hranice je tvořena úsečkami Γ_i .

Platnost (9) pak budeme požadovat ve všech bodech x_i , $i = 1, \dots, n$, tzn.

$$h(x_i) = \pi\mu(x_i) - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{d}{dn_x} \ln ||x_i - y|| ds_y, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde

$$\frac{d}{dn_x} \ln ||x_i - y|| = \frac{\langle x_i - y; n(x_i) \rangle}{||x_i - y||^2}.$$



Obrázek 5: Diskretizace hranice oblasti Ω .

Dále budeme předpokládat, že μ je konstantní na každém dílku Γ_i , tj. $\mu(y) = \mu_i = \text{konst.}$ pro každé $y \in \Gamma_i$. Výsledný systém lineárních rovnic tedy vypadá následovně:

$$h(x_i) = \pi\mu_i - \sum_{j=1}^n \mu_j \int_{\Gamma_j} \frac{\langle x_i - y; n(x_i) \rangle}{\|x_i - y\|^2} ds_y, \quad i = 1, \dots, n.$$

Maticově pak

$$(\pi I - A)\mu = h, \quad (10)$$

kde

$$A[i, j] := a_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\langle x_i - y; n(x_i) \rangle}{\|x_i - y\|^2} ds_y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$h[i] = h(x_i), \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

a I značí jednotkovou matici řádu n . Vyřešením soustavy (10) pak získáme přibližné řešení rovnice (9).

5.2 Vyčíslení matice soustavy

Ukažme nyní, jak v soustavě (10) vyčíslit matici A , jejíž prvky jsou dány vztahem

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\langle x_i - y; n(x_i) \rangle}{\|x_i - y\|^2} ds_y, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Je zřejmé, že pokud budou vektory $x_i - y$ a $n(x_i)$ navzájem kolmé, tedy Γ_i a Γ_j budou ležet v jedné přímce, bude platit

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{0}{\|x_i - y\|^2} ds_y = 0.$$

Pro získání zbylých prvků parametrizujeme jednotlivé dílky Γ_j s krajními uzly z_j a z_{j+1} pomocí

$$y(t) = tz_{j+1} + (1-t)z_j, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

a z definice křivkového integrálu dostáváme

$$a_{ij} = \frac{\|\beta\|}{\|z_{i+1} - z_i\|} \int_0^1 \underbrace{\frac{\langle \alpha; \tilde{n}_i \rangle + t \langle \beta; \tilde{n}_i \rangle}{\|\alpha\|^2 + 2t \langle \alpha; \beta \rangle + t^2 \|\beta\|^2}}_{=:J} dt, \quad (12)$$

kde

$$\alpha := x_i - z_j, \quad \beta := z_j - z_{j+1}$$

a \tilde{n}_i značí vnější (ne nutně jednotkový) normálový vektor ke Γ_i , daný vztahem

$$\tilde{n}_i = (b_{i+1} - b_i, a_i - a_{i+1}),$$

kde a_i, b_i značí souřadnice uzlu z_i , tzn. $z_i = (a_i, b_i)$ a $z_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1})$. Zaveďme navíc

$$K := \langle \alpha; \tilde{n}_i \rangle, \quad L := \langle \beta; \tilde{n}_i \rangle, \quad M := \|\alpha\|^2, \quad N := \langle \alpha; \beta \rangle \quad \text{a} \quad O := \|\beta\|^2.$$

Integrál ze vztahu (12) tak můžeme přepsat jako

$$J = \int_0^1 \frac{K + tL}{M + 2Nt + Ot^2} dt$$

a po výpočtu, např. s pomocí symbolické knihovny MATLABu, dostáváme, že

- $J = \frac{1}{O\sqrt{MO - N^2}} \left(\frac{L}{2} \sqrt{MO - N^2} \ln \frac{M + 2N + O}{M} + (KO - LN) \left(\operatorname{arctg} \frac{N + O}{\sqrt{MO - N^2}} - \operatorname{arctg} \frac{N}{\sqrt{MO - N^2}} \right) \right)$ pro $N^2 \neq MO$,
- $J = \frac{L\sqrt{M} - K\sqrt{O}}{O(\sqrt{M} + \sqrt{O})} - \frac{L}{O} + \frac{K}{\sqrt{MO}} + \frac{L}{O} \ln \frac{\sqrt{M} + \sqrt{O}}{\sqrt{M}}$ pro $N = \sqrt{MO}$,
- $J = \frac{L\sqrt{M} + K\sqrt{O}}{O(\sqrt{M} - \sqrt{O})} - \frac{L}{O} - \frac{K}{\sqrt{MO}} + \frac{L}{O} \ln \frac{\sqrt{M} - \sqrt{O}}{\sqrt{M}}$ pro $N = -\sqrt{MO}$.

Všimněme si, že pokud je oblast Ω konvexní¹², pak vždy platí, že $N^2 \neq MO$, tj. $|\langle \alpha; \beta \rangle| \neq \|\alpha\| \|\beta\|$ (nezapomeňme, že jsme v situaci, kdy Γ_i a Γ_j neleží v jedné přímce).

¹²Oblast Ω je konvexní, pokud pro každou dvojici bodů $a, b \in \Omega$ a $t \in \langle 0, 1 \rangle$ platí, že $at + b(1-t) \in \Omega$.

5.3 Dopočetí řešení úlohy pomocí známé hustoty

Z úvodu kapitoly 5 víme, že řešení úlohy (8) hledáme ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy. K dispozici již máme přibližné hodnoty hustoty potenciálu na jednotlivých dílcích Γ_i , tedy

$$u(x) \approx - \sum_{j=1}^n \mu_j \underbrace{\int_{\Gamma_j} \ln \|x - y\| ds_y}_{=: I_j(x)}, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (13)$$

Za pomoci stejné parametrizace úseček Γ_j , jako v podkapitole 5.2, a značení

$$\alpha := x - z_j \text{ a } \beta := z_j - z_{j+1}$$

můžeme integrál ze vztahu (13) přepsat jako

$$I_j(x) = \frac{\|z_{j+1} - z_j\|}{2} \int_0^1 \ln(\|\alpha\|^2 + 2t \langle \alpha; \beta \rangle + t^2 \|\beta\|^2) dt.$$

- V případě, že $x \in \Gamma_j$, pak

$$I_j(x) = \begin{cases} \|\beta\| (\ln \|\beta\| - 1) & \text{pro } \|\alpha\| = 0 \vee \|\alpha\| = \|\beta\|, \\ \|\alpha\| (\ln \|\alpha\| - 1) + (\|\beta\| - \|\alpha\|) (\ln(\|\beta\| - \|\alpha\|) - 1) & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Pro případ, že $x \in \Omega$, zavedme navíc následující značení:

$$P := \|\alpha\|^2, \quad Q := \langle \alpha; \beta \rangle, \quad R := \|\beta\|^2 \text{ a } S := \|z_{j+1} - z_j\|$$

a přepíšme integrál $I_j(x)$ jako

$$I_j(x) = \frac{S}{2} \int_0^1 \ln(P + 2Qt + Rt^2) dt.$$

Odtud pak, např. za pomoci symbolické knihovny MATLABu, dostáváme, že

- $I_j(x) = \frac{S}{2R} \left((Q + R) \ln(P + 2Q + R) - 2R - Q \ln P + 2\sqrt{PR - Q^2} \left(\arctg \frac{Q + R}{\sqrt{PR - Q^2}} - \arctg \frac{Q}{\sqrt{PR - Q^2}} \right) \right)$ pro $Q^2 \neq PR$,
- $I_j(x) = S \left(\left(\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{R}} + 1 \right) (\ln(\sqrt{P} + \sqrt{R}) - 1) - \frac{\sqrt{P}(\ln P - 2)}{2\sqrt{R}} \right)$ pro $Q = \sqrt{PR}$,
- $I_j(x) = S \left(\left(-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{R}} + 1 \right) (\ln(\sqrt{P} - \sqrt{R}) - 1) + \frac{\sqrt{P}(\ln P - 2)}{2\sqrt{R}} \right)$ pro $Q = -\sqrt{PR}$.

Opět si všimněme, že pokud je Ω konvexní, pak vždy platí $Q^2 \neq PR$, tj. $|\langle \alpha; \beta \rangle| \neq \|\alpha\| \|\beta\|$ (nezapomeňme, že jsme v situaci, kdy x neleží na $\partial\Omega$).

6 Řešení vnější Neumannovy úlohy s Laplaceovou rovnicí

Z kapitoly 4 víme, že vnější Neumannovou úlohou s Laplaceovou rovnicí rozumíme úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ v } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \\ &\text{předepsaná okrajová podmínka,} \\ &\text{předepsaná radiační podmínka,} \end{aligned} \tag{14}$$

kde Ω je omezená oblast s dost hladkou hranicí. Je zřejmé, že v tomto případě nemůžeme přímo aplikovat metodu potenciálů jako v případě vnitřní úlohy, jelikož pracujeme na neomezené oblasti, na které nelze zajistit splnění radiační podmínky, která by omezovala potenciál jednoduše vrstvy v nekonečnu. Nejprve tedy bude třeba úlohu vhodně přeformulovat. K tomu využijeme tzv. Kelvinovu transformaci, díky níž přetransformujeme neomezenou oblast $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ na oblast omezenou a přeformulujeme úlohu (14) tak, že budeme schopni získat její řešení pomocí metody potenciálů.

V této kapitole popíšeme Kelvinovu transformaci jen velmi stručně, neboť pro naše potřeby je již vyčerpávajícím způsobem popsána v [8], popř. [1].

6.1 Stručně o Kelvinově transformaci

Nechť $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí obsahující počátek $(0,0)$ a $\Omega_e := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i$. Uvažujme transformaci $\tau : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definovanou jako

$$\tau(x, y) = (\xi, \eta) := \frac{1}{r^2}(x, y), \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Pro každou funkci $u \in C(\overline{\Omega}_e)$ definujeme funkci \hat{u} tak, že

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \hat{u}(\tau(x, y)) := u(x, y) \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}_e.$$

Funkci \hat{u} pak nazýváme Kelvinovou transformací funkce u .

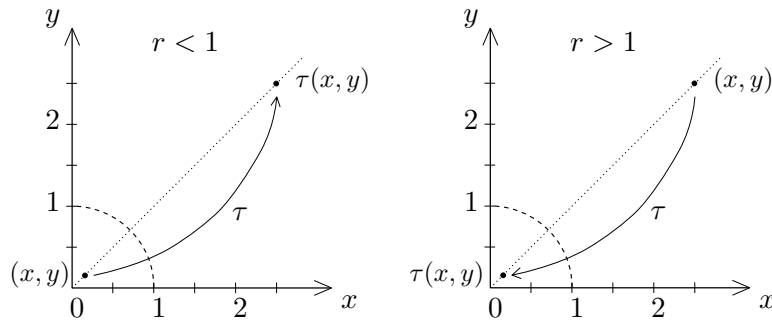
Všimněme si, že platí:

- $\tau(x, y)$ leží na polopřímce vycházející z počátku $(0, 0)$ a procházející bodem (x, y) ,
- lze ukázat, že $\|\tau(x, y)\| = \frac{1}{r} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, viz obr. 6,
- lze ukázat, že $\tau(\tau(x, y)) = (x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tj. $\tau^{-1} = \tau$,
- τ zobrazuje Ω_e na omezenou oblast.

6.2 Převod vnější Neumannovy úlohy na vnitřní

Jak již bylo zmíněno, našim cílem je převést vnější Neumannovu úlohu s Laplaceovou rovnicí na úlohu vnitřní. Tohoto docílíme následovně

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ v } \Omega_e, & \xrightarrow{\tau} & \Delta \hat{u} = 0 & \text{ v } \tau(\Omega_e), \\ \frac{du}{dn} &= h \text{ na } \partial\Omega_e, & & \frac{d\hat{u}}{d\hat{n}}(\xi, \eta) = \frac{1}{\delta^2} h(\tau(\xi, \eta)) & \text{ pro } (\xi, \eta) \in \tau(\partial\Omega_e), \end{aligned}$$



Obrázek 6: Kelvinova transformace.

kde $\delta := \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ a \hat{n} značí vnější jednotkový normálový vektor k hranici $\tau(\Omega_e)$. Podrobný popis toho, jak odvodit vztahy mezi Δu a $\Delta \hat{u}$ a $\frac{du}{dn}$ a $\frac{d\hat{u}}{dn}$ lze najít např. v [8], str. 18-21 nebo v [1].

Součástí zadání vnější okrajové úlohy je i radiční podmínka „omezující“ funkci v nekonečnu. Víme, že s rostoucí normou, se při Kelvinově transformaci obrazy postupně přibližují k počátku (pro $\|x\| > 1$). Můžeme si představit, že obrazem nekonečna tak bude počátek a hodnota „omezující“ funkci v nekonečnu bude přímo hodnota v počátku:

$$u(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \text{ pro } \|x\| \rightarrow \infty \xrightarrow{\tau} \hat{u}(0,0) = 0.$$

Lze ukázat (viz [1], str. 529-530), že podmínka řešitelnosti

$$\int_{\partial\Omega_e} h \, ds = 0 \tag{15}$$

implikuje $\int_{\tau(\partial\Omega_e)} \frac{1}{\delta^2} h(\tau(\xi, \eta)) ds = 0$, a proto je transformovaná vnější úloha za podmínky (15) (viz úvod kapitoly 5) jednoznačně řešitelná.

Poté co známe řešení \hat{u} transformované úlohy, získáme řešení u naší původní úlohy „zpětnou“ transformací

$$(x, y) \xrightarrow{\tau} (\xi, \eta), \quad u(x, y) = \hat{u}(\xi, \eta).$$

7 Numerické experimenty

V této kapitole budeme porovnávat přibližná řešení pro vnitřní i vnější okrajové úlohy získaná pomocí metody potenciálů a metody sítí s příslušnými analytickými řešeními. Jako měřítko využijeme tzv. absolutní a relativní chyby definované jako

$$\delta_{abs} := |u - u_{ex}| \text{ a } \delta_{rel} := \frac{\|u - u_{ex}\|}{\|u_{ex}\|},$$

kde u představuje vektor numerického řešení v daných uzlech získaný některou z výše zmíněných metod a u_{ex} pak uzlové hodnoty analytického řešení. Jelikož řešení vnitřní Neumannovy úlohy není jednoznačné, jsou hodnoty u_{ex} uzlové hodnoty jednoho zvoleného analytického řešení. Absolutní chybu δ_{abs} chápeme jako vektor uzlových absolutních odchylek přibližného a přesného řešení.

Poznamenejme ještě, že v kapitole 4 jsme po funkcích definující okrajové podmínky chtěli, aby byly spojité na dané části hranice. Úlohy však mají dobrý smysl i v případech, že funkce definující okrajovou podmínku je nespojitá. Tyto se objevují i v našich experimentech.

Veškerá implementace byla provedena v MATLABu a všechny soustavy lineárních rovnic jsou ve všech následujících úlohách řešeny přímým řešičem, konkrétně Gaussovou eliminací pomocí zpětného lomítka.

7.1 Stručně o metodě sítí (FDM)

Principem FDM je pokrytí dané omezené oblasti vhodnou sítí uzlů a nahrazení derivací diferencemi v těchto uzlech, čímž se daný okrajový problém převede na řešení soustavy lineárních rovnic.

Ukažme nyní pouze stručně, jak aproximovat derivace v jednotlivých uzlech s tím, že se omezíme pouze na vnitřní Neumannovu okrajovou úlohu s Laplaceovou rovnicí na čtvercové oblasti Ω , tzn. síť bude pravidelná a „rovnoběžná“ (viz obr. 7(a)) se souřadnými osami. Podrobný popis i další informace o FDM pak lze najít např. v [5], str. 507.

1. Nahrazení druhé derivace diferencí

Označme jednotlivé uzly sítě $x_{i,j}$ a nechť h značí vzdálenost mezi sousedními uzly - krok. Druhou derivaci nahradíme diferencí:

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}. \quad 13$$

Označme pro jednoduchost (viz též obr. 7(a))

- ve směru osy x_1 : $u_{i,j} := u(x_{i,j})$, $u_{i-1,j} := u(x_{i-1,j})$ a $u_{i+1,j} := u(x_{i+1,j})$,
- ve směru osy x_2 : $u_{i,j} := u(x_{i,j})$, $u_{i,j-1} := u(x_{i,j-1})$ a $u_{i,j+1} := u(x_{i,j+1})$.

Odtud pak

$$\begin{aligned} \Delta u(x_{i,j}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{i,j}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{i,j}) \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = \\ &= \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}). \end{aligned}$$

¹³Řád nahrazení je $\mathcal{O}(h^2)$.

2. Aproximace Neumannovy podmínky

K aproximaci normálových derivací na hranici využijeme tzv. dopředné a zpětné diference

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ a } f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h},^{14}$$

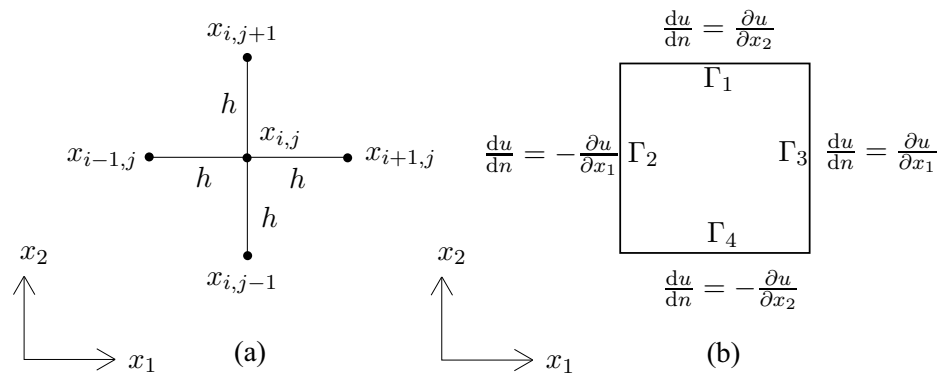
kterými zjistíme přibližné hodnoty parciálních derivací v daném uzlu. Vzhledem k tomu, že je naše síť „rovnoběžná“ se souřadnými osami, dostáváme tak přímo hodnoty normálových derivací, avšak zatím ne nutně se správným znaménkem. Pomocí vztahu

$$\frac{du}{dn}(x) = \langle \nabla u(x); n(x) \rangle = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \cdot n_i(x) \right),$$

kde $n(x) = (n_1(x), n_2(x))$ značí vnější jednotkový normálový vektor k hranici v daném bodě x , již dostaneme normálové derivace ve správném tvaru (viz obr. 7(b)), tj.

- $\frac{du}{dn}(x_{i,j}) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}$ pro $x_{i,j} \in \Gamma_1$,
- $\frac{du}{dn}(x_{i,j}) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{h}$ pro $x_{i,j} \in \Gamma_2$,
- $\frac{du}{dn}(x_{i,j}) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$ pro $x_{i,j} \in \Gamma_3$,
- $\frac{du}{dn}(x_{i,j}) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{h}$ pro $x_{i,j} \in \Gamma_4$.

Jediným problémem pak zůstávají rohové uzly čtverce, ve kterých normálová derivace neexistuje. Tyto uzly proto při výpočtu neuvažujeme.



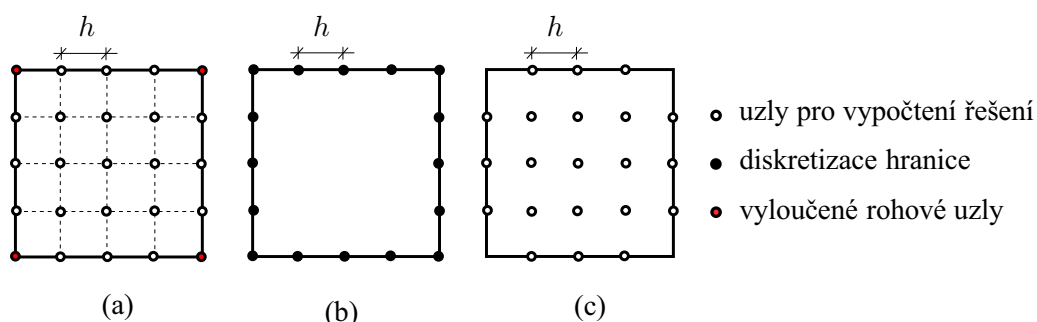
Obrázek 7: Indexace (a) a výpočet normálových derivací (b).

FDM je značně omezena tvarem (resp. složitostí) dané oblasti, kterou je třeba pokrýt. V našich experimentech s vnitřní Neumannovou úlohou se proto omezíme pouze na čtvercové oblasti, které pokryjeme pravidelnou sítí.

¹⁴Řád obou nahrazení je $\mathcal{O}(h)$.

7.2 Vnitřní Neumannova úloha

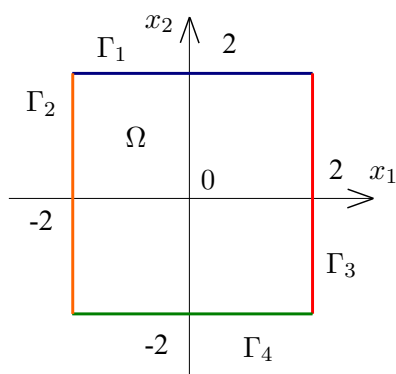
Pro to, abychom mohli porovnávat přesnost řešení získaného pomocí metody potenciálů s přesností řešení získaného metodou sítí, je třeba danou hranici/oblast adekvátně diskretizovat. Toho docílíme tak, že stejný krok h , který použijeme pro diskretizaci hranice v metodě potenciálů, poté použijeme i jako krok pravidelné sítě použité pro metodu sítí, viz obr. 8. V případě metody potenciálů pak použijeme pro dopočtení řešení z vypočtené hustoty potenciálu uvnitř stejné uzly jako v případě metody sítí.



Obrázek 8: Příklad diskretizace čtvercové oblasti pro metodu sítí (a), diskretizace hranice čtvercové oblasti pro metodu potenciálů (b) a uzly pro dopočtení řešení metodou potenciálů (c).

Jelikož řešení vnitřní Neumannovy úlohy není jednoznačné, musíme u obou metod dodat vhodnou regularizační podmínku. Navíc, aby naše porovnání bylo korektní, je nutné, abychom u obou metod volili stejné přesné partikulární řešení. Pro metodu sítí používáme regularizační podmínku $\int_{\Omega} u = 0$ a pro metodu potenciálů volíme $\int_{\partial\Omega} u = 0$. Naše experimenty jsou voleny tak, že obě tyto regularizace dávají stejné přesné řešení.

Vnitřní úlohy budeme uvažovat na čtvercové oblasti $\Omega := (-2, 2)^2$, viz obr. 9.



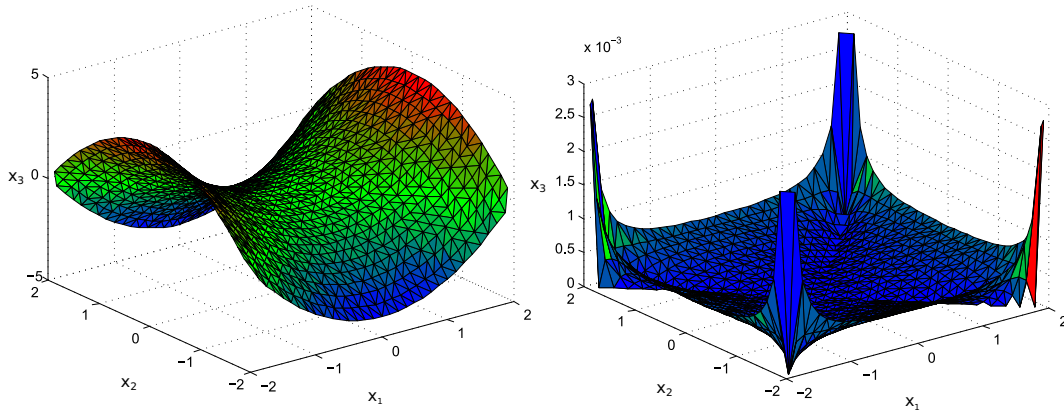
Obrázek 9: Oblast Ω a části její hranice.

Uvažujme následující vnitřní Neumannovu úlohu

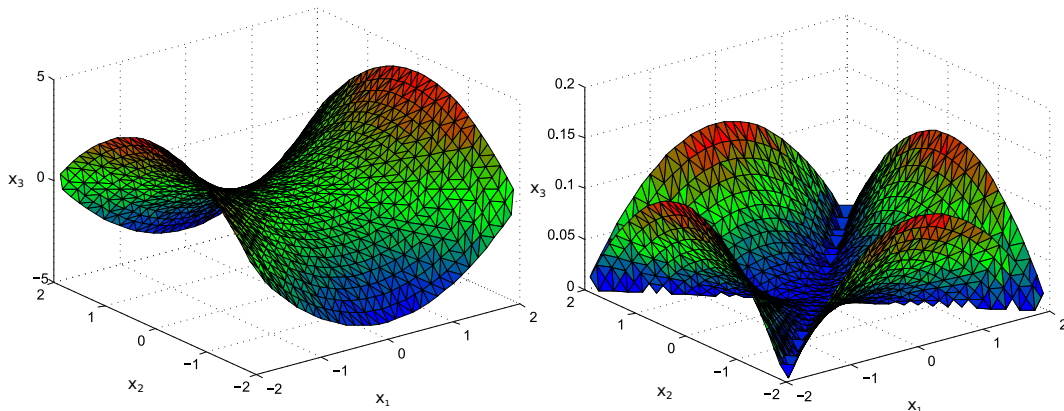
$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega := (-2, 2)^2,$$

$$\frac{du}{dn}(x_1, x_2) = \begin{cases} -2x_2 & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \\ -2x_1 & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \\ 2x_1 & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Gamma_3, \\ 2x_2 & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Gamma_4. \end{cases} \quad (16)$$

Lze ukázat, že analytickým řešením (16) je funkce $u_{ex,c}(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. V obou případech mají regularizované úlohy řešení $u_{ex,0}$. Řešení a příslušné absolutní chyby pro diskretizaci hranice 128 uzly lze vidět na obrázcích 10 a 11, relativní chyby pak uvádí tabulka 1.



Obrázek 10: Řešení úlohy (16) pomocí metody potenciálů (vlevo), absolutní chyba (vpravo).



Obrázek 11: Řešení úlohy (16) pomocí metody sítí (vlevo), absolutní chyba (vpravo).

Uzlů na hranici	Uzlů celkem	δ_{rel} (metoda potenciálů)	δ_{rel} (metoda sítí)
64	285	$9,738 \cdot 10^{-4}$	$6,667 \cdot 10^{-2}$
128	1085	$2,308 \cdot 10^{-4}$	$3,226 \cdot 10^{-2}$
256	4221	$5,453 \cdot 10^{-5}$	$1,587 \cdot 10^{-2}$
512	16637	$1,297 \cdot 10^{-5}$	$7,874 \cdot 10^{-3}$

Tabulka 1: Relativní chyby

Počet uzlů na hranici v tabulce 1 odpovídá počtu uzlů na hranici včetně rohových uzlů vyloučených při FDM¹⁵ a počet uzlů celkem pak odpovídá počtu uzlů, ve kterých je oběma metodami vypočteno řešení¹⁵, viz obr. 8 (a) a (c).

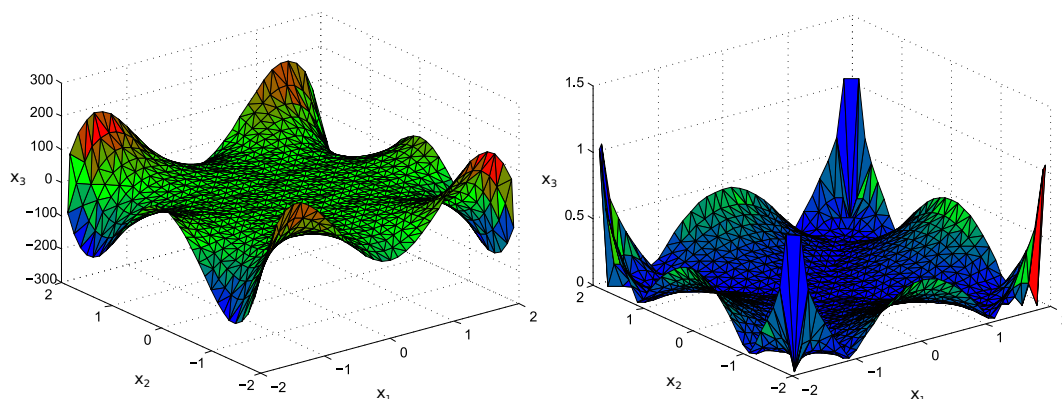
Uvažujme dále úlohu

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega := (-2, 2)^2,$$

$$\frac{du}{dn}(x_1, x_2) = \begin{cases} -6x_2^5 + 60x_1^2x_2^3 - 30x_1^4x_2 & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \\ -30x_1x_2^4 + 60x_1^3x_2^2 - 6x_1^5 & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \\ 30x_1x_2^4 - 60x_1^3x_2^2 + 6x_1^5 & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Gamma_3, \\ 6x_2^5 - 60x_1^2x_2^3 + 30x_1^4x_2 & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Gamma_4. \end{cases} \quad (17)$$

Lze ukázat, že analytickým řešením úlohy (17) je funkce $u_{ex,c}(x_1, x_2) := x_1^6 - 15x_1^4x_2^2 + 15x_1^2x_2^4 - x_2^6 + c$, kde $c \in \mathbb{R}$. V obou případech mají regularizované úlohy řešení $u_{ex,0}$.

Na obrázcích 12 a 13 vidíme řešení jednotlivými metodami a příslušné absolutní chyby při diskretizaci hranice 128 uzly. Relativní chybu pro různé diskretizace pak uvádí tabulka 2.

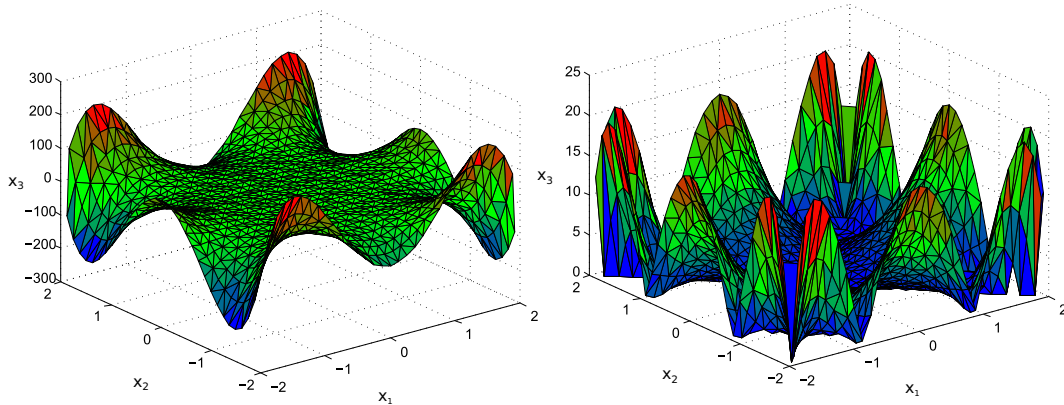


Obrázek 12: Řešení úlohy (17) pomocí metody potenciálů (vlevo), absolutní chyba (vpravo).

Uzlů na hranici	Uzlů celkem	δ_{rel} (metoda potenciálů)	δ_{rel} (metoda sítí)
64	285	$1,487 \cdot 10^{-2}$	$2,853 \cdot 10^{-1}$
128	1085	$3,679 \cdot 10^{-3}$	$1,322 \cdot 10^{-1}$
256	4221	$9,006 \cdot 10^{-4}$	$6,382 \cdot 10^{-2}$
512	16637	$2,212 \cdot 10^{-4}$	$3,137 \cdot 10^{-2}$

Tabulka 2: Relativní chyby

¹⁵Stejného významu budeme užívat i v následujících tabulkách.

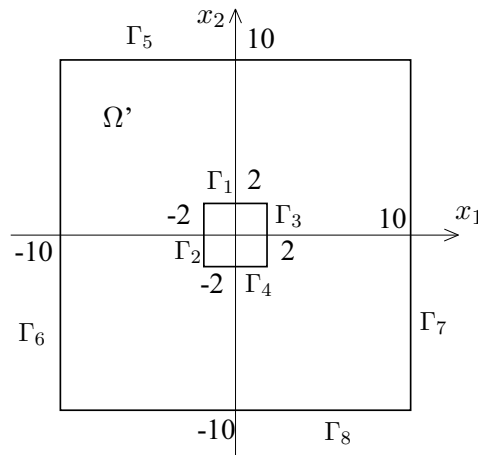


Obrázek 13: Řešení úlohy (17) pomocí metody sítí (vlevo), absolutní chyba (vpravo).

7.3 Vnější Neumannova úloha

Pro řešení úloh metodou sítí nebude v této podkapitole využita Kelvinova transformace. Postupujeme tak, že z dané neomezené oblasti Ω vyjmeleme část obsahující hranici a její dostatečně velké okolí. Dostaneme tak omezenou oblast a na takto nově vzniklé hranici předepíšeme vhodnou Neumannovu podmínku.

V následujících příkladech definujeme $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{(-2, 2)^2}$ a pro metodu sítí pak část $\Omega' := (-10, 10)^2 \setminus \overline{(-2, 2)^2}$, viz obr. 14.



Obrázek 14: Část oblasti Ω uvažovaná pro metodu sítí.

Pro srovnání přesnosti obou metod je opět třeba oblast Ω a její hranici vhodně diskretizovat, stejně jako v případě vnitřní úlohy, viz obr. 15.

Uvažujme úlohu

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{(-2, 2)^2},$$

$$\frac{du}{dn}(x) = \begin{cases} (x_2^2 - x_1^2)/\|x\|^4 & \text{pro } x = (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \\ -2x_1x_2/\|x\|^4 & \text{pro } x = (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \\ 2x_1x_2/\|x\|^4 & \text{pro } x = (x_1, x_2) \in \Gamma_3, \\ (x_1^2 - x_2^2)/\|x\|^4 & \text{pro } x = (x_1, x_2) \in \Gamma_4, \end{cases} \quad (18)$$

$$u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \text{ pro } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Lze ukázat, že analytickým řešením (18) je funkce $u_{ex}(x) := x_2/\|x\|^2$. Pro to, abychom na tuto úlohu mohli aplikovat metodu sítí, je třeba definovat vhodnou Neumannovu podmínku na části $\cup_{i=5}^8 \Gamma_i$ (viz obr. 14), volme

$$\frac{du}{dn} = 0 \text{ na } \cup_{i=5}^8 \Gamma_i$$

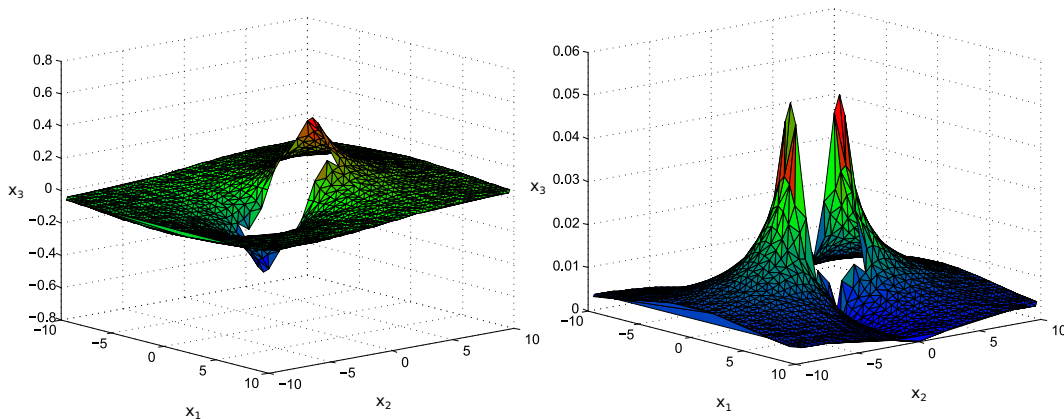
a pro řešení metodou potenciálů úlohu převést pomocí Kelvinovy transformace na úlohu vnitřní. Dle podkapitoly 6.2 tedy dostáváme transformovanou úlohu ve tvaru

$$\Delta \hat{u} = 0 \text{ v } \tau(\Omega),$$

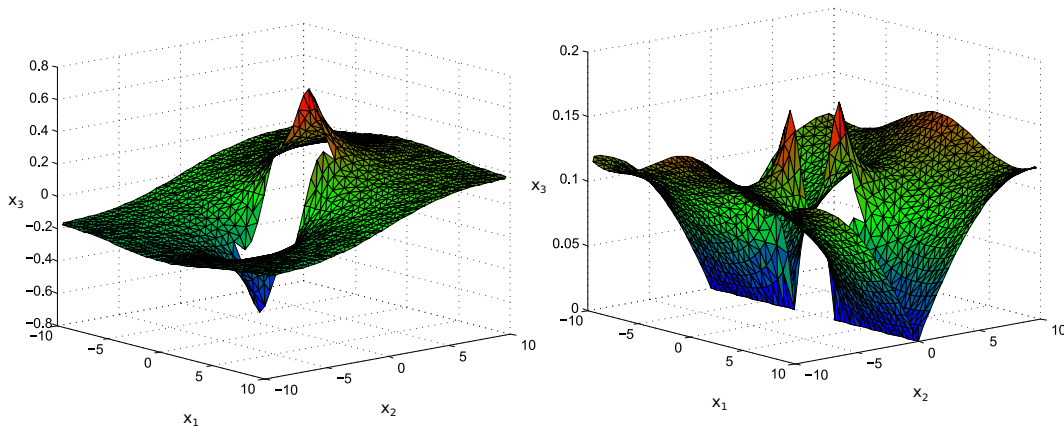
$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{n}}(\xi, \eta) = \begin{cases} (\eta^2 - \xi^2)/\|(\xi, \eta)\|^2 & \text{pro } (\xi, \eta) \in \tau(\Gamma_1), \\ -2\xi\eta/\|(\xi, \eta)\|^2 & \text{pro } (\xi, \eta) \in \tau(\Gamma_2), \\ 2\xi\eta/\|(\xi, \eta)\|^2 & \text{pro } (\xi, \eta) \in \tau(\Gamma_3), \\ (\xi^2 - \eta^2)/\|(\xi, \eta)\|^2 & \text{pro } (\xi, \eta) \in \tau(\Gamma_4), \end{cases}$$

$$\hat{u}(0, 0) = 0.$$

Řešení a příslušné absolutní chyby pro diskretizaci části hranice $\cup_{i=1}^4 \Gamma_i$ 32 uzly lze vidět na obrázcích 17 a 18, relativní chyby pak uvádí tabulka 3.



Obrázek 17: Řešení úlohy (18) pomocí metody potenciálů (vlevo), absolutní chyba (vpravo).



Obrázek 18: Řešení úlohy (18) pomocí metody sítí (vlevo), absolutní chyba (vpravo).

Uzlů na hranici	Uzlů celkem	δ_{rel} (metoda potenciálů)	δ_{rel} (metoda sítí)
32	1624	$7,384 \cdot 10^{-2}$	$7,895 \cdot 10^{-1}$
64	6328	$4,324 \cdot 10^{-2}$	$6,296 \cdot 10^{-1}$
128	24952	$2,366 \cdot 10^{-2}$	$5,632 \cdot 10^{-1}$

Tabulka 3: Relativní chyby

Uvažujme dále úlohu

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{(-2, 2)^2},$$

$$\frac{du}{dn}(x) = \begin{cases} x_2(3x_1^2 - x_2^2)/(2\|x\|^6) & \text{pro } x = (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \\ -x_1(x_1^2 - 3x_2^2)/(2\|x\|^6) & \text{pro } x = (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \\ x_1(x_1^2 - 3x_2^2)/(2\|x\|^6) & \text{pro } x = (x_1, x_2) \in \Gamma_3, \\ -x_2(3x_1^2 - x_2^2)/(2\|x\|^6) & \text{pro } x = (x_1, x_2) \in \Gamma_4, \end{cases} \quad (19)$$

$$u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right) \text{ pro } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Lze ukázat, že analytickým řešením (19) je funkce $u_{ex}(x) := (x_1^2 - x_2^2)/(4\|x\|^4)$. Pro řešení metodou sítí opět volme, že

$$\frac{du}{dn} = 0 \text{ na } \cup_{i=5}^8 \Gamma_i$$

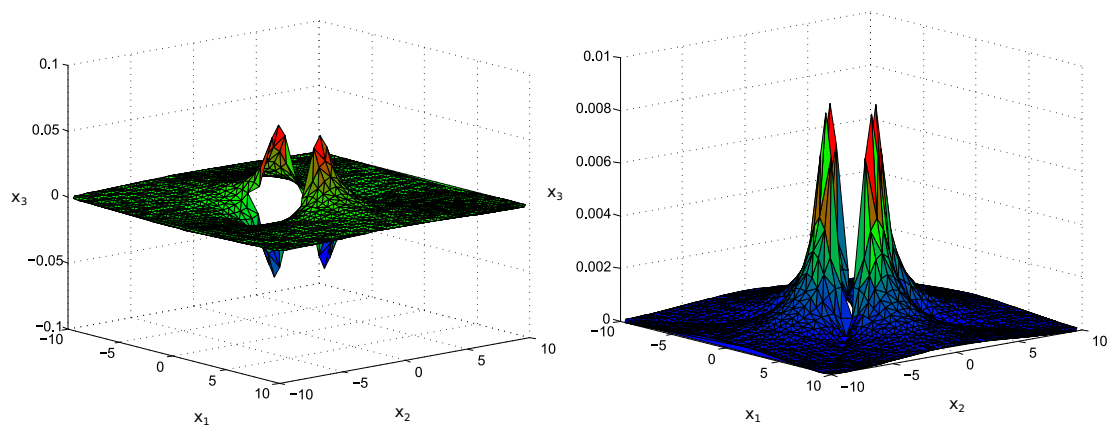
a pro řešení metodou potenciálů převedme úlohu (19) na vnitřní úlohu

$$\Delta \hat{u} = 0 \text{ v } \tau(\Omega),$$

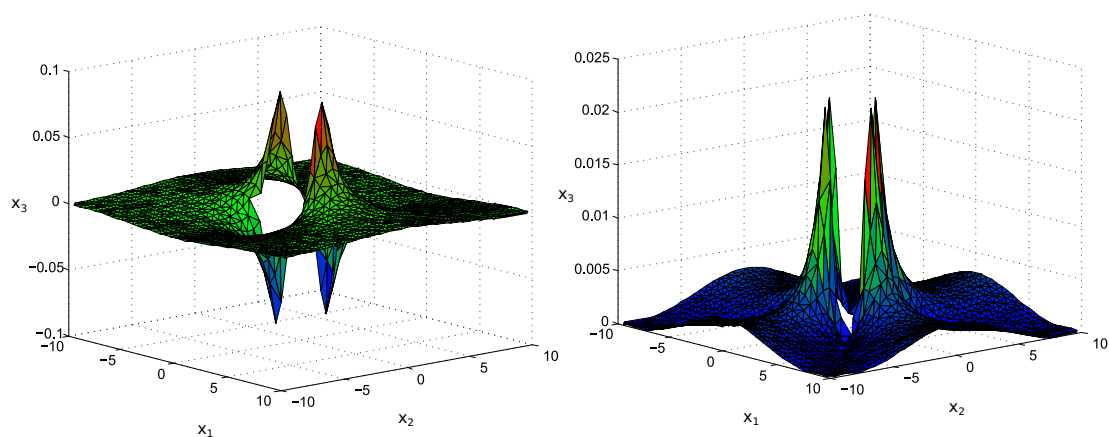
$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{n}}(\xi, \eta) = \begin{cases} \eta(3\xi^2 - \eta^2)/(2\|(\xi, \eta)\|^2) & \text{pro } (\xi, \eta) \in \tau(\Gamma_1), \\ \xi(3\eta^2 - \xi^2)/(2\|(\xi, \eta)\|^2) & \text{pro } (\xi, \eta) \in \tau(\Gamma_2), \\ \xi(\xi^2 - 3\eta^2)/(2\|(\xi, \eta)\|^2) & \text{pro } (\xi, \eta) \in \tau(\Gamma_3), \\ \eta(\eta^2 - 3\xi^2)/(2\|(\xi, \eta)\|^2) & \text{pro } (\xi, \eta) \in \tau(\Gamma_4), \end{cases}$$

$$\hat{u}(0, 0) = 0.$$

Řešení a příslušné absolutní chyby pro diskretizaci části hranice $\cup_{i=1}^4 \Gamma_i$ 32 uzly lze vidět na obrázcích 19 a 20, relativní chyby pak v tabulce 4.



Obrázek 19: Řešení úlohy (19) pomocí metody potenciálů (vlevo), absolutní chyba (vpravo).



Obrázek 20: Řešení úlohy (19) pomocí metody sítí (vlevo), absolutní chyba (vpravo).

Uzlů na hranici	Uzlů celkem	δ_{rel} (metoda potenciálů)	δ_{rel} (metoda sítí)
32	1624	$1,197 \cdot 10^{-1}$	$3,028 \cdot 10^{-1}$
64	6328	$6,420 \cdot 10^{-2}$	$1,687 \cdot 10^{-1}$
128	24952	$3,391 \cdot 10^{-2}$	$1,162 \cdot 10^{-1}$

Tabulka 4: Relativní chyby

8 Závěr

V této práci jsme se zabývali nepřímou metodou hraninčných prvků, tzv. metodou potenciálů, jež je jednou z možných alternativ k přímé metodě hraničních prvků nebo běžně užívaným doménovým přístupům pro řešení okrajových úloh, jako např. metodě konečných prvků nebo metodě sítí.

Postupně jsme si představili fundamentální řešení Laplaceovy rovnice v rovině, větu o reprezentaci a především jednotlivé potenciály v \mathbb{R}^2 , jež jsou nezbytné pro metodu potenciálů. Dále jsme se seznámili s problematikou vnitřních a vnějších okrajových úloh a vybranými typy okrajových podmínek, včetně Neumannovy okrajové úlohy s Laplaceovým operátorem, která byla v této práci hlavním předmětem našeho zájmu. Pro lepší pochopení jsme fyzikální význam této úlohy demonstrovali na stacionárním vedení tepla v tenké desce. Pro řešení vnějších úloh jsme použili Kelvinovu transformaci, díky níž jsme schopni převést vnější úlohu na neomezené oblasti na úlohu vnitřní.

Přesnost metody potenciálů jsme porovnávali s metodou sítí. Z výsledků prezentovaných v poslední kapitole vidíme, že jak pro vnitřní tak pro vnější úlohy jsou výsledky získané pomocí metody potenciálů daleko přesnější než v případě metody sítí. Navíc víme, že pro případné zpřesnění výsledků metody sítí by bylo třeba provést jemnější diskretizaci celé oblasti, zatímco v případě metody potenciálů bychom si vystačili pouze s jemnější diskretizací hranice, z čehož pramení jedna z největších výhod metody potenciálů a metody hraničních prvků.

Reference

- [1] K. Atkinson, W. Han: *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*
Springer, 2005
- [2] J. Bouchala: *Úvod do Boundary Elements Method*
Slidy vytvořené pro zimní školu v rámci konference SNA' 07, 2007
http://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/Bouchala_BEM.pdf
- [3] J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*
Skripta VUT Brno, 2000
- [4] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky I*
Prometheus, 1995
- [5] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky II*
Prometheus, 1995
- [6] M. Sadowská: *Řešení variačních nerovnic pomocí hraničních integrálních rovnic*
Diplomová práce, VŠB-TUO, 2005
http://homel.vsb.cz/~sad015/publications/IngThesis/diplomova_prace_ms.pdf
- [7] O. Steinbach: *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems*
Springer, 2008
- [8] J. Zapletal: *Aplikace metody hraničních prvků na řešení Dirichletovy-Neumannovy okrajové úlohy*
Bakalářská práce, VŠB-TUO, 2009
<http://am.vsb.cz/theses/bakalari/2009/pdfs/zap150.pdf>