Fast Multipole Boundary Element Method (FMM-BEM) pro 2D Laplaceovu rovnici

M.S.

K203

25. 2. 2010

Inspirace a literatura

Yijun Liu a Naoshi Nishimura
The fast multipole boundary element method for potential problems: A tutotial
Engineering Analysis with Boundary Elements 30 (2006) 371–381

Ken-ichi Yoshida
Applications of Fast Multipole Method to Boundary Integral Equation Method
PhD Thesis, Kyoto University (2001)

Úvod

Conventional BEM vs. FMM BEM

BEM

- Úlohu „na oblasti" přeformulujeme na úlohu „na hranici oblasti",

Conventional BEM vs. FMM BEM

BEM

- Úlohu „na oblasti“ přeformulujeme na úlohu „na hranici oblasti“, čímž snížíme dimenzi diskrétní úlohy

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{N\times N} \;\ldots\; \text{hustá matice tuhosti.}$$

Conventional BEM vs. FMM BEM

BEM

- Úlohu „na oblasti“ přeformulujeme na úlohu „na hranici oblasti“, čímž snížíme dimenzi diskrétní úlohy

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{N \times N} \ \ldots \ \text{hustá matice tuhosti.}$$

Conventional BEM

- Vyčíslení A: $\mathcal{O}(N^2) \quad \Rightarrow \quad N_{max} \approx 10^4$

Conventional BEM vs. FMM BEM

BEM

- Úlohu „na oblasti" přeformulujeme na úlohu „na hranici oblasti", čímž snížíme dimenzi diskrétní úlohy

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{N\times N} \ \dots \text{ hustá matice tuhosti.}$$

Conventional BEM

- Vyčíslení A: $\mathcal{O}(N^2) \quad \Rightarrow \quad N_{max} \approx 10^4$
- Porovnej s FEM: A ... řídká, vyčíslení A: $\mathcal{O}(N)$

Conventional BEM vs. FMM BEM

BEM

- Úlohu „na oblasti“ přeformulujeme na úlohu „na hranici oblasti“, čímž snížíme dimenzi diskrétní úlohy

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N} \ \ldots \text{ hustá matice tuhosti.}$$

Conventional BEM

- Vyčíslení A: $\mathcal{O}(N^2) \quad \Rightarrow \quad N_{max} \approx 10^4$
- Porovnej s FEM: A ... řídká, vyčíslení A: $\mathcal{O}(N)$

FMM BEM

- Matice A se nevyčísluje ani neaproximuje (např. low rank bloky - ACA)

Conventional BEM vs. FMM BEM

BEM

- Úlohu „na oblasti“ přeformulujeme na úlohu „na hranici oblasti“, čímž snížíme dimenzi diskrétní úlohy

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{N \times N} \ \ldots \ \text{hustá matice tuhosti.}$$

Conventional BEM

- Vyčíslení A: $\mathcal{O}(N^2) \quad \Rightarrow \quad N_{max} \approx 10^4$
- Porovnej s FEM: A ... řídká, vyčíslení A: $\mathcal{O}(N)$

FMM BEM

- Matice A se nevyčísluje ani neaproximuje (např. low rank bloky - ACA)
- Předpokládá se použití iteračního řešiče (CG, GMRES)

Conventional BEM vs. FMM BEM

BEM

- Úlohu „na oblasti“ přeformulujeme na úlohu „na hranici oblasti“, čímž snížíme dimenzi diskrétní úlohy

$$\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N} \ \dots \text{ hustá matice tuhosti.}$$

Conventional BEM

- Vyčíslení A: $\mathcal{O}(N^2) \quad \Rightarrow \quad N_{max} \approx 10^4$
- Porovnej s FEM: A ... řídká, vyčíslení A: $\mathcal{O}(N)$

FMM BEM

- Matice A se nevyčísluje ani neaproximuje (např. low rank bloky - ACA)
- Předpokládá se použití iteračního řešiče (CG, GMRES)
- Jedná se o

$$\text{urychlení výpočtu součinu } \mathsf{A}\mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_i \ \dots \ i\text{−tá iterace řešení,}$$

Conventional BEM vs. FMM BEM

BEM

- Úlohu „na oblasti“ přeformulujeme na úlohu „na hranici oblasti“, čímž snížíme dimenzi diskrétní úlohy

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ ... hustá matice tuhosti.}$$

Conventional BEM

- Vyčíslení A: $\mathcal{O}(N^2) \quad \Rightarrow \quad N_{max} \approx 10^4$
- Porovnej s FEM: A ... řídká, vyčíslení A: $\mathcal{O}(N)$

FMM BEM

- Matice A se nevyčísluje ani neaproximuje (např. low rank bloky - ACA)
- Předpokládá se použití iteračního řešiče (CG, GMRES)
- Jedná se o

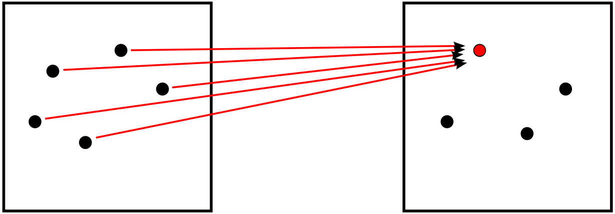
$$\text{urychlení výpočtu součinu } \mathrm{A}\mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_i \text{ ... } i\text{−tá iterace řešení,}$$

vedoucí ke složitosti $\mathcal{O}(N) \quad \Rightarrow \quad N_{max} \approx 10^6$

Conventional BEM vs. FMM BEM

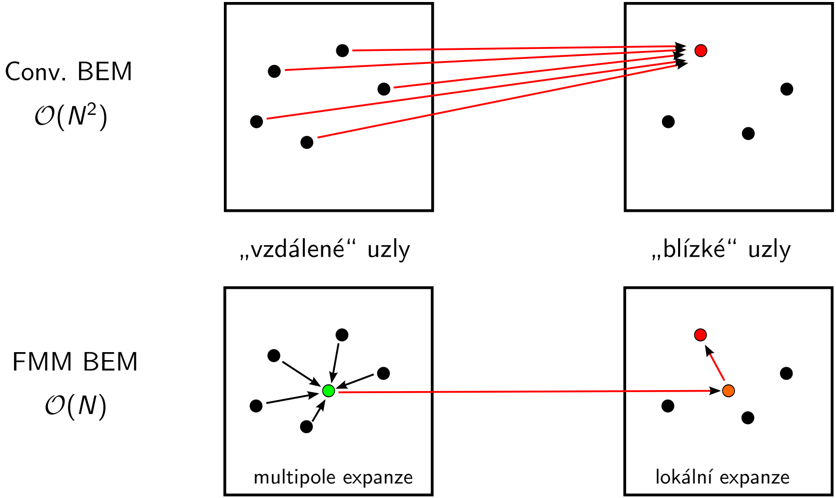
Conv. BEM

$\mathcal{O}(N^2)$



Conventional BEM vs. FMM BEM

▸ 2D FMM ▸ Multipole expanze ▸ M2L



2D Conventional BEM

2D smíšená úloha s Laplaceovou rovnicí

▸ Dirichlet ▸ Mixed

$$\boxed{\begin{aligned} \triangle u &= 0 \ \text{ v } \ \Omega \\ u &= h_1 \ \text{ na } \ \Gamma_1 \\ t \equiv \frac{\partial u}{\partial n} &= h_2 \ \text{ na } \ \Gamma_2 \end{aligned}}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ... omezená s dost hladkou hranicí

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma = \partial\Omega$

$h_1 \in L^2(\Gamma_1),\ h_2 \in L^2(\Gamma_2)$

2D smíšená úloha s Laplaceovou rovnicí

▸ Dirichlet ▸ Mixed

$$\boxed{\begin{aligned} \triangle u &= 0 \text{ v } \Omega \\ u &= h_1 \text{ na } \Gamma_1 \\ t \equiv \frac{\partial u}{\partial n} &= h_2 \text{ na } \Gamma_2 \end{aligned}}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ... omezená s dost hladkou hranicí

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma = \partial\Omega$

$h_1 \in L^2(\Gamma_1)$, $h_2 \in L^2(\Gamma_2)$

Věta o reprezentaci: Řešení Laplaceovy rovnice v Ω je dáno vztahem

$$\boxed{u(x) = \int_\Gamma t(y) G(x,y)\, \mathrm{d}s_y - \int_\Gamma u(y) F(x,y)\, \mathrm{d}s_y, \quad x \in \Omega,}$$

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|x-y\|, \qquad F(x,y) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y, n(y))}{\|x-y\|^2}.$$

Limitním přechodem $\Omega \ni x \to \Gamma$ získáme 1. hraniční rovnici:

$$\boxed{\frac{1}{2}u(x) = \int_\Gamma t(y)G(x,y)\,\mathrm{d}s_y - \int_\Gamma u(y)F(x,y)\,\mathrm{d}s_y, \quad x \in \Gamma.}$$

Diskrétní úloha

Pro diskretizaci 1. hraniční rovnice zvolme např. kolokační metodu:

$$\frac{1}{2}u(x_i) = \int_\Gamma t(y)G(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y - \int_\Gamma u(y)F(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y, \quad i = 1, \dots, N$$

Diskrétní úloha

Pro diskretizaci 1. hraniční rovnice zvolme např. kolokační metodu:

$$\frac{1}{2}u(x_i) = \int_\Gamma t(y)G(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y - \int_\Gamma u(y)F(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y, \quad i = 1, \dots, N$$

Pro jednoduchost použijeme po částech konst. hraniční prvky ψ_j:

$$u(y) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j\psi_j(y), \quad t(y) \approx \sum_{j=1}^{N} t_j\psi_j(y)$$

Diskrétní úloha

Pro diskretizaci 1. hraniční rovnice zvolme např. kolokační metodu:

$$\frac{1}{2}u(x_i) = \int_\Gamma t(y)G(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y - \int_\Gamma u(y)F(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y, \quad i = 1, \dots, N$$

Pro jednoduchost použijeme po částech konst. hraniční prvky ψ_j:

$$u(y) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j\psi_j(y), \quad t(y) \approx \sum_{j=1}^{N} t_j\psi_j(y)$$

Dostaneme tedy

$$\boxed{\tfrac{1}{2}u_i = \sum_{j=1}^{N} g_{ij}t_j - \sum_{j=1}^{N} f_{ij}u_j, \quad i = 1, \dots, N}$$

$$g_{ij} = \int_{\Gamma_j} G(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y, \quad f_{ij} = \int_{\Gamma_j} F(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y.$$

Poslední rovnici v rámečku lze maticově zapsat jako:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & \cdots & f_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix}$$

Poslední rovnici v rámečku lze maticově zapsat jako:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & \cdots & f_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix}$$

S ohledem na předepsané okrajové podmínky naší úlohy získáváme soustavu

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N},$$

Poslední rovnici v rámečku lze maticově zapsat jako:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & \cdots & f_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix}$$

S ohledem na předepsané okrajové podmínky naší úlohy získáváme soustavu

$$\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

přičemž

- vektor neznámých $\mathbf{x}$ obsahuje uzlové hodnoty u na Γ_2 a uzlové hodnoty t na Γ_1,

Poslední rovnici v rámečku lze maticově zapsat jako:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & \cdots & f_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix}$$

S ohledem na předepsané okrajové podmínky naší úlohy získáváme soustavu

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N},$$

přičemž

- vektor neznámých $\mathbf{x}$ obsahuje uzlové hodnoty u na Γ_2 a uzlové hodnoty t na Γ_1,
- matice A je hustá a (obecně) nesymetrická,

Poslední rovnici v rámečku lze maticově zapsat jako:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & \cdots & f_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix}$$

S ohledem na předepsané okrajové podmínky naší úlohy získáváme soustavu

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

přičemž

- vektor neznámých $\mathbf{x}$ obsahuje uzlové hodnoty u na Γ_2 a uzlové hodnoty t na Γ_1,
- matice A je hustá a (obecně) nesymetrická,
- vyčíslení A má složitost $\mathcal{O}(N^2)$.

2D FMM BEM formulace

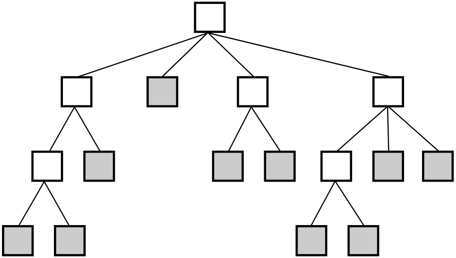
2D FMM

- Vztah element-element „přeneseme“ na vztah buňka-buňka ◂ Conv. BEM vs. FMM BEM

2D FMM

- Vztah element-element „přeneseme“ na vztah buňka-buňka
- Buňky mají hierarchické uspořádání (quad-tree)

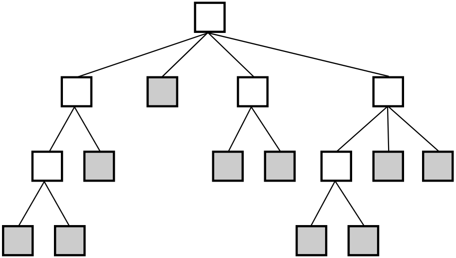
Conv. BEM vs. FMM BEM



M2M L2L

2D FMM

- Vztah element-element „přeneseme“ na vztah buňka-buňka Conv. BEM vs. FMM BEM
- Buňky mají hierarchické uspořádání (quad-tree)



M2M L2L

- Listové buňky obsahují specifikovaný počet elementů

Komplexní značení

kolokační uzel

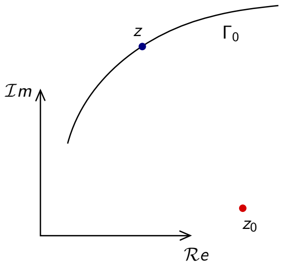
- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} t(y)\, G(x, y)\, \mathrm{d}s_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko“ od x

Komplexní značení

kolokační uzel

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} t(y) G(x, y) \, ds_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko“ od x
- Zavedeme označení:

$$x \rightsquigarrow z_0 = x_1 + i x_2, \qquad y \rightsquigarrow z = y_1 + i y_2$$

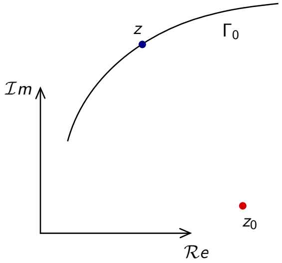


Komplexní značení

kolokační uzel

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} t(y)G(x, y)\,\mathrm{d}s_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko" od x
- Zavedeme označení:

$$x \rightsquigarrow z_0 = x_1 + ix_2, \qquad y \rightsquigarrow z = y_1 + iy_2$$



$$G(z_0, z) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(z_0 - z\right)$$

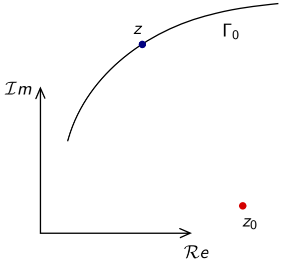
$$\mathcal{R}e\{G(z_0, z)\} = -\frac{1}{2\pi}\ln\underbrace{|z_0 - z|}_{\|x-y\|} = G(x, y)$$

Komplexní značení

kolokační uzel

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} t(y)\,G(x,y)\,\mathrm{d}s_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko“ od x
- Zavedeme označení:

$$x \rightsquigarrow z_0 = x_1 + ix_2, \qquad y \rightsquigarrow z = y_1 + iy_2$$



$$G(z_0, z) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(z_0 - z\right)$$

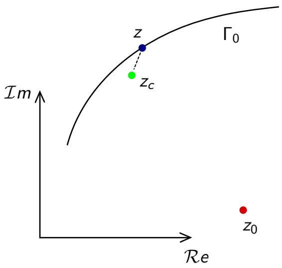
$$\mathcal{R}e\{G(z_0,z)\} = -\frac{1}{2\pi}\ln\underbrace{|z_0 - z|}_{\|x-y\|} = G(x,y)$$

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(y)\,G(x,y)\,\mathrm{d}s_y = \mathcal{R}e\left\{\int_{\Gamma_0} t(z)\,G(z_0,z)\,\mathrm{d}s_z\right\}}$$

Multipole expanze a multipole momenty

Conv. BEM vs. FMM BEM

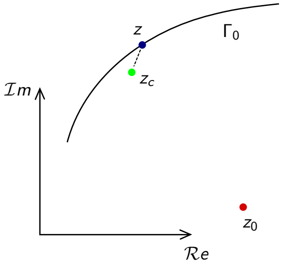
z_c ... „blízký bod“ z, tj. $|z - z_c| << |z_0 - z_c|$



Multipole expanze a multipole momenty

◀ Conv. BEM vs. FMM BEM

z_c ... „blízký bod“ z, tj. $|z - z_c| << |z_0 - z_c|$



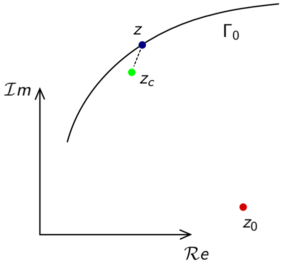
Užitím Taylorova rozvoje lze psát:

$$\boxed{G(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c)}$$

Multipole expanze a multipole momenty

Conv. BEM vs. FMM BEM

z_c ... „blízký bod“ z, tj. $|z - z_c| << |z_0 - z_c|$



Užitím Taylorova rozvoje lze psát:

$$\boxed{G(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c)}$$

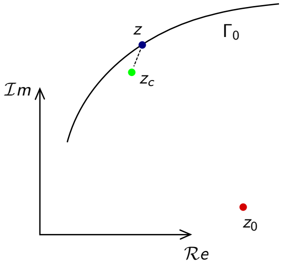
$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k} \quad k \geq 1, \quad O_0(z) = -\ln(z)$$

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!} \quad k \geq 0$$

Multipole expanze a multipole momenty

Conv. BEM vs. FMM BEM

z_c … „blízký bod“ z, tj. $|z - z_c| << |z_0 - z_c|$



Užitím Taylorova rozvoje lze psát:

$$\boxed{G(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c)}$$

$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k} \quad k \geq 1, \quad O_0(z) = -\ln(z)$$

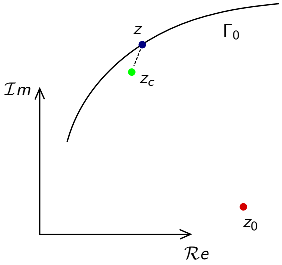
$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!} \quad k \geq 0$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \, \mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_c) \, \mathrm{d}s_z$$

Multipole expanze a multipole momenty

Conv. BEM vs. FMM BEM

z_c ... „blízký bod“ z, tj. $|z - z_c| << |z_0 - z_c|$



Užitím Taylorova rozvoje lze psát:

$$\boxed{G(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c)}$$

$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k} \quad k \geq 1, \quad O_0(z) = -\ln(z)$$

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!} \quad k \geq 0$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \, \mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) \underbrace{\int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_c) \, \mathrm{d}s_z}_{M_k(z_c)}$$

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c)M_k(z_c)} \quad (*)$$

F

$$\boxed{M_k(z_c) = \int_{\Gamma_0} t(z)I_k(z - z_c)\,\mathrm{d}s_z} \quad (**)$$

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c)M_k(z_c)} \quad (*)$$

F

$$\boxed{M_k(z_c) = \int_{\Gamma_0} t(z)I_k(z - z_c)\,\mathrm{d}s_z} \quad (**)$$

- $(*)$ ... **multipole expanze**

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c)} \quad (*)$$

F

$$\boxed{M_k(z_c) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_c)\,\mathrm{d}s_z} \quad (**)$$

- $(*)$ ... **multipole expanze**
- $M_k(z_c)$ ... **multipole momenty** v okolí z_c

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c)M_k(z_c)} \quad (*)$$

F

$$\boxed{M_k(z_c) = \int_{\Gamma_0} t(z)I_k(z - z_c)\,\mathrm{d}s_z} \quad (**)$$

- $(*)$ ... **multipole expanze**
- $M_k(z_c)$ ... **multipole momenty** v okolí z_c
- $M_k(z_c)$ nezávisí na kolokačním uzlu z_0!, proto je <u>stačí vypočíst jen jednou</u> (během 1 násobení maticí tuhosti)

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c)M_k(z_c)} \quad (*)$$

F

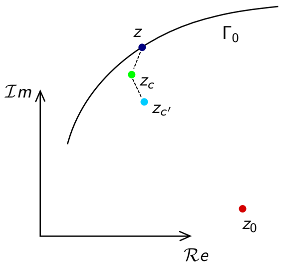
$$\boxed{M_k(z_c) = \int_{\Gamma_0} t(z)I_k(z - z_c)\,\mathrm{d}s_z} \quad (**)$$

- $(*)$ ... **multipole expanze**
- $M_k(z_c)$ ... **multipole momenty** v okolí z_c
- $M_k(z_c)$ nezávisí na kolokačním uzlu z_0!, proto je <u>stačí vypočíst jen jednou</u> (během 1 násobení maticí tuhosti)
- $M_k(z_c)$ lze vypočíst analyticky

Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

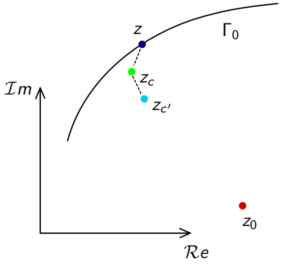
z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$



Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$

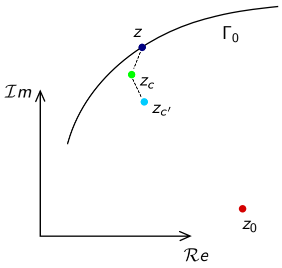


$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_{c'})\, ds_z$$

Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$



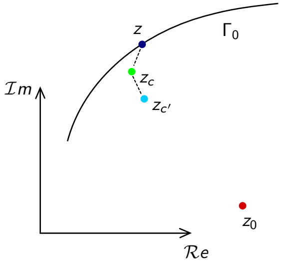
$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_{c'})\, ds_z$$

$$= \int_{\Gamma_0} t(z) I_k\left((z - z_c) + (z_c - z_{c'})\right) ds_z$$

Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$



$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_{c'})\, \mathrm{d}s_z$$

$$= \int_{\Gamma_0} t(z) I_k\left((z - z_c) + (z_c - z_{c'})\right) \mathrm{d}s_z$$

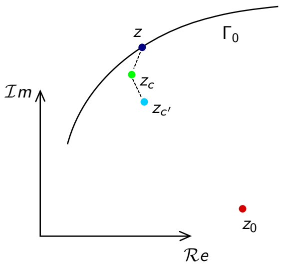
$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}$$

$$(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a^m b^{k-m}$$

Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$



$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_{c'})\, \mathrm{d}s_z$$

$$= \int_{\Gamma_0} t(z) I_k\left((z - z_c) + (z_c - z_{c'})\right) \mathrm{d}s_z$$

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}$$

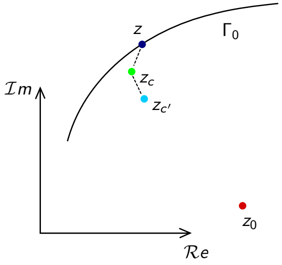
$$(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a^m b^{k-m}$$

$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z)$$

Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$



$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_{c'})\, \mathrm{d}s_z$$

$$= \int_{\Gamma_0} t(z) I_k\left((z - z_c) + (z_c - z_{c'})\right) \mathrm{d}s_z$$

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}$$

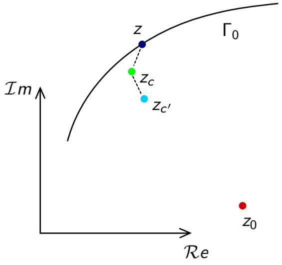
$$(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a^m b^{k-m}$$

$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) \frac{\qquad\qquad}{k!} \mathrm{d}s_z$$

Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$



$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_{c'})\, ds_z$$

$$= \int_{\Gamma_0} t(z) I_k\left((z - z_c) + (z_c - z_{c'})\right) ds_z$$

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}$$

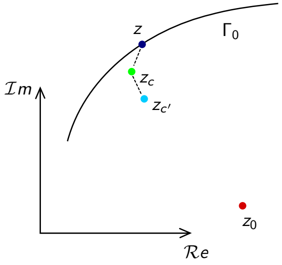
$$(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a^m b^{k-m}$$

$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) \frac{\sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{(k-m)!m!}}{k!}\, ds_z$$

Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$



$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_{c'}) \, \mathrm{d}s_z$$

$$= \int_{\Gamma_0} t(z) I_k \left((z - z_c) + (z_c - z_{c'}) \right) \mathrm{d}s_z$$

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}$$

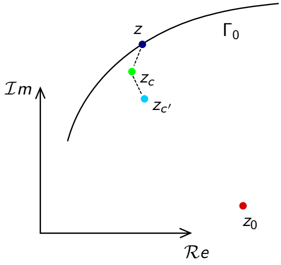
$$(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a^m b^{k-m}$$

$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) \frac{\sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{(k-m)!m!} (z - z_c)^m}{k!} \mathrm{d}s_z$$

Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$



$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_{c'})\,\mathrm{d}s_z$$

$$= \int_{\Gamma_0} t(z) I_k\left((z - z_c) + (z_c - z_{c'})\right)\mathrm{d}s_z$$

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}$$

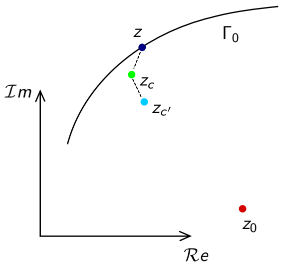
$$(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a^m b^{k-m}$$

$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) \frac{\sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{(k-m)!m!}(z - z_c)^m (z_c - z_{c'})^{k-m}}{k!}\,\mathrm{d}s_z$$

Moment-to-moment posunutí (M2M)

Quad-tree

z_c ... posunut do pozice $z_{c'}$



$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) I_k(z - z_{c'})\, \mathrm{d}s_z$$

$$= \int_{\Gamma_0} t(z) I_k\left((z - z_c) + (z_c - z_{c'})\right) \mathrm{d}s_z$$

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}$$

$$(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a^m b^{k-m}$$

$$M_k(z_{c'}) = \int_{\Gamma_0} t(z) \frac{\sum_{m=0}^{k} \frac{\cancel{k!}}{(k-m)!m!} (z - z_c)^m (z_c - z_{c'})^{k-m}}{\cancel{k!}} \mathrm{d}s_z$$

$$M_k(z_{c'}) = \sum_{m=0}^{k} \frac{(z_c - z_{c'})^{k-m}}{(k-m)!} \int_{\Gamma_0} t(z) \frac{(z - z_c)^m}{m!} \, \mathrm{d}s_z$$

$$M_k(z_{c'}) = \sum_{m=0}^{k} \underbrace{\frac{(z_c - z_{c'})^{k-m}}{(k-m)!}}_{I_{k-m}(z_c - z_{c'})} \int_{\Gamma_0} t(z) \underbrace{\frac{(z - z_c)^m}{m!}}_{I_m(z - z_c)} \, \mathrm{d}s_z$$

$$M_k(z_{c'}) = \sum_{m=0}^{k} \underbrace{\frac{(z_c - z_{c'})^{k-m}}{(k-m)!}}_{I_{k-m}(z_c - z_{c'})} \underbrace{\int_{\Gamma_0} t(z) \underbrace{\frac{(z - z_c)^m}{m!}}_{I_m(z - z_c)} \mathrm{d}s_z}_{M_m(z_c)}$$

$$M_k(z_{c'}) = \sum_{m=0}^{k} \underbrace{\frac{(z_c - z_{c'})^{k-m}}{(k-m)!}}_{I_{k-m}(z_c - z_{c'})} \underbrace{\int_{\Gamma_0} t(z) \underbrace{\frac{(z - z_c)^m}{m!}}_{I_m(z - z_c)} \mathrm{d}s_z}_{M_m(z_c)}$$

$$\boxed{M_k(z_{c'}) = \sum_{m=0}^{k} I_{k-m}(z_c - z_{c'}) M_m(z_c)} \quad (\bullet)$$

F

$$M_k(z_{c'}) = \sum_{m=0}^{k} \underbrace{\frac{(z_c - z_{c'})^{k-m}}{(k-m)!}}_{I_{k-m}(z_c - z_{c'})} \underbrace{\int_{\Gamma_0} t(z) \underbrace{\frac{(z - z_c)^m}{m!}}_{I_m(z-z_c)} \mathrm{d}s_z}_{M_m(z_c)}$$

$$\boxed{M_k(z_{c'}) = \sum_{m=0}^{k} I_{k-m}(z_c - z_{c'}) M_m(z_c)} \quad (\bullet)$$

F

- $(\bullet)$ ... **M2M posunutí**, když z_c je přesunut do $z_{c'}$

$$M_k(z_{c'}) = \sum_{m=0}^{k} \underbrace{\frac{(z_c - z_{c'})^{k-m}}{(k-m)!}}_{I_{k-m}(z_c - z_{c'})} \underbrace{\int_{\Gamma_0} t(z) \underbrace{\frac{(z-z_c)^m}{m!}}_{I_m(z-z_c)} \, \mathrm{d}s_z}_{M_m(z_c)}$$

$$\boxed{M_k(z_{c'}) = \sum_{m=0}^{k} I_{k-m}(z_c - z_{c'}) M_m(z_c)} \quad (\bullet)$$

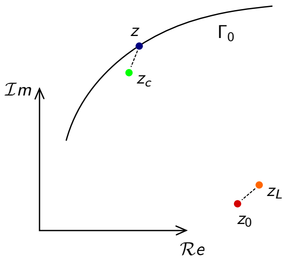
F

- $(\bullet)$ ... **M2M posunutí**, když z_c je přesunut do $z_{c'}$
- M2M posunutí obsahuje v sumě pouze konečný počet členů

Lokální expanze a moment-to-local posunutí (M2L)

◂ Conv. BEM vs. FMM BEM

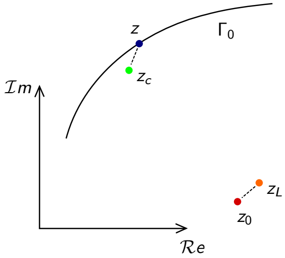
z_L … „blízký bod“ z_0, tj. $|z_0 - z_L| << |z_c - z_L|$



Lokální expanze a moment-to-local posunutí (M2L)

◂ Conv. BEM vs. FMM BEM

z_L ... „blízký bod“ z_0, tj. $|z_0 - z_L| << |z_c - z_L|$

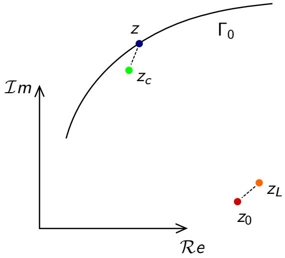


Užitím Taylorova rozvoje a multipole expanze lze psát:

Lokální expanze a moment-to-local posunutí (M2L)

Conv. BEM vs. FMM BEM

z_L ... „blízký bod“ z_0, tj. $|z_0 - z_L| << |z_c - z_L|$



Užitím Taylorova rozvoje a multipole expanze lze psát:

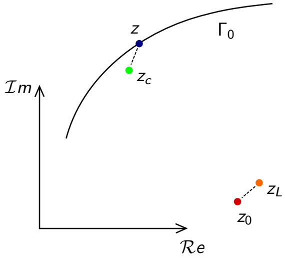
$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \quad (\circ)$$

F

Lokální expanze a moment-to-local posunutí (M2L)

Conv. BEM vs. FMM BEM

z_L ... „blízký bod“ z_0, tj. $|z_0 - z_L| << |z_c - z_L|$



Užitím Taylorova rozvoje a multipole expanze lze psát:

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \quad (\circ)$$

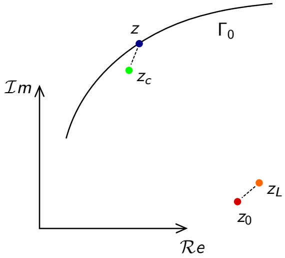
F

$$\boxed{L_\ell(z_L) = \frac{(-1)^\ell}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_{\ell+k}(z_L - z_c) M_k(z_c)} \quad (\circ\circ)$$

Lokální expanze a moment-to-local posunutí (M2L)

Conv. BEM vs. FMM BEM

z_L ... „blízký bod“ z_0, tj. $|z_0 - z_L| << |z_c - z_L|$



Užitím Taylorova rozvoje a multipole expanze lze psát:

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \quad (\circ)$$

F

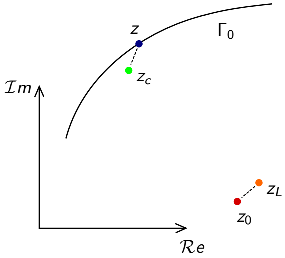
$$\boxed{L_\ell(z_L) = \frac{(-1)^\ell}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_{\ell+k}(z_L - z_c) M_k(z_c)} \quad (\circ\circ)$$

- $(\circ)$ ... **lokální expanze**

Lokální expanze a moment-to-local posunutí (M2L)

Conv. BEM vs. FMM BEM

z_L … „blízký bod“ z_0, tj. $|z_0 - z_L| << |z_c - z_L|$



Užitím Taylorova rozvoje a multipole expanze lze psát:

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \quad (\circ)$$

F

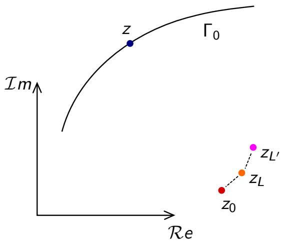
$$\boxed{L_\ell(z_L) = \frac{(-1)^\ell}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_{\ell+k}(z_L - z_c) M_k(z_c)} \quad (\circ\circ)$$

- $(\circ)$ … **lokální expanze**
- $(\circ\circ)$ … **M2L posunutí**

Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

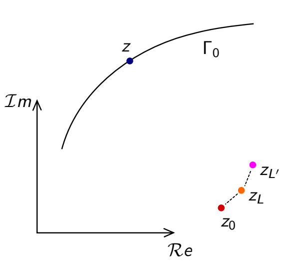
z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$



Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$

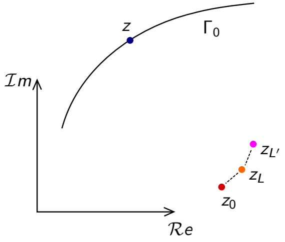


$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L) =$$

Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$



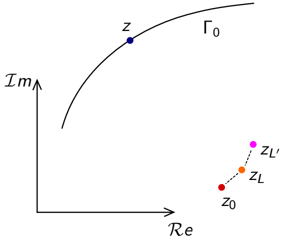
$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell\left((z_0 - z_{L'}) + (z_{L'} - z_L)\right)$$

Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$



$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell\left((z_0 - z_{L'}) + (z_{L'} - z_L)\right)$$

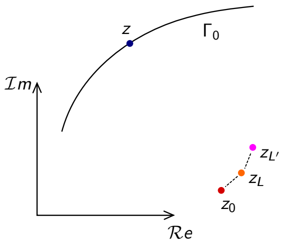
$$I_\ell(z) = \frac{z^\ell}{\ell!}, \quad (a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^m b^{\ell-m}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty}$$

Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$



$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell\left((z_0 - z_{L'}) + (z_{L'} - z_L)\right)$$

$$I_\ell(z) = \frac{z^\ell}{\ell!}, \quad (a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^m b^{\ell-m}$$

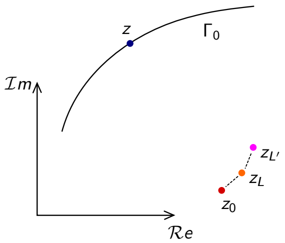
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty}$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L)$$

Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$



$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell\left((z_0 - z_{L'}) + (z_{L'} - z_L)\right)$$

$$I_\ell(z) = \frac{z^\ell}{\ell!}, \quad (a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^m b^{\ell-m}$$

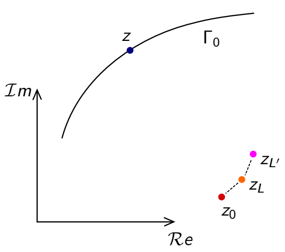
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty}$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) \frac{}{\ell!}$$

Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$



$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell\left((z_0 - z_{L'}) + (z_{L'} - z_L)\right)$$

$$I_\ell(z) = \frac{z^\ell}{\ell!}, \quad (a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^m b^{\ell-m}$$

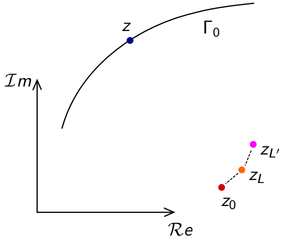
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty}$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) \frac{\sum_{m=0}^{\ell} \frac{\ell!}{(\ell-m)!m!}}{\ell!}$$

Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$



$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell\left((z_0 - z_{L'}) + (z_{L'} - z_L)\right)$$

$$I_\ell(z) = \frac{z^\ell}{\ell!}, \quad (a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^m b^{\ell-m}$$

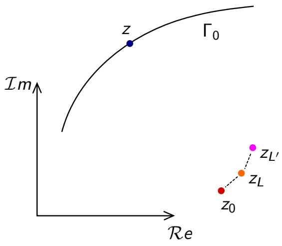
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty}$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) \frac{\sum_{m=0}^{\ell} \frac{\ell!}{(\ell-m)!\,m!} (z_0 - z_{L'})^m}{\ell!}$$

Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$



$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell\left((z_0 - z_{L'}) + (z_{L'} - z_L)\right)$$

$$I_\ell(z) = \frac{z^\ell}{\ell!}, \quad (a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^m b^{\ell-m}$$

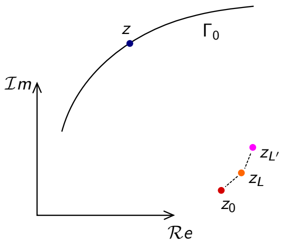
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty}$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) \frac{\sum_{m=0}^{\ell} \frac{\ell!}{(\ell-m)!m!} (z_0 - z_{L'})^m (z_{L'} - z_L)^{\ell-m}}{\ell!}$$

Local-to-local posunutí (L2L)

Quad-tree

z_L ... posunut do pozice $z_{L'}$



$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, ds_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell\left((z_0 - z_{L'}) + (z_{L'} - z_L)\right)$$

$$I_\ell(z) = \frac{z^\ell}{\ell!}, \quad (a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^m b^{\ell-m}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty}$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, ds_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) \frac{\sum_{m=0}^{\ell} \frac{\cancel{\ell!}}{(\ell-m)!m!} (z_0 - z_{L'})^m (z_{L'} - z_L)^{\ell-m}}{\cancel{\ell!}}$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} L_\ell(z_L) \frac{(z_0 - z_{L'})^m}{m!} \frac{(z_{L'} - z_L)^{\ell-m}}{(\ell-m)!}$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \, \mathrm{d}s_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} L_\ell(z_L) \underbrace{\frac{(z_0 - z_{L'})^m}{m!}}_{I_m(z_0 - z_{L'})} \underbrace{\frac{(z_{L'} - z_L)^{\ell-m}}{(\ell-m)!}}_{I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L)}$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} L_\ell(z_L) \underbrace{\frac{(z_0 - z_{L'})^m}{m!}}_{I_m(z_0 - z_{L'})} \underbrace{\frac{(z_{L'} - z_L)^{\ell-m}}{(\ell-m)!}}_{I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} I_m(z_0 - z_{L'}) \sum_{\ell=m}^{\infty} I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L) L_\ell(z_L)$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=m}^{\infty} L_\ell(z_L)\underbrace{\frac{(z_0 - z_{L'})^m}{m!}}_{I_m(z_0 - z_{L'})}\underbrace{\frac{(z_{L'} - z_L)^{\ell-m}}{(\ell-m)!}}_{I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} I_m(z_0 - z_{L'})\sum_{\ell=m}^{\infty} I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L)L_\ell(z_L)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} L_m(z_L) I_m(z_0 - z_L)$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} L_\ell(z_L) \underbrace{\frac{(z_0 - z_{L'})^m}{m!}}_{I_m(z_0 - z_{L'})} \underbrace{\frac{(z_{L'} - z_L)^{\ell-m}}{(\ell-m)!}}_{I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} I_m(z_0 - z_{L'}) \underbrace{\sum_{\ell=m}^{\infty} I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L) L_\ell(z_L)}_{L_m(z_{L'})}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} L_m(z_L) I_m(z_0 - z_L)$$

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} L_\ell(z_L) \underbrace{\frac{(z_0 - z_{L'})^m}{m!}}_{I_m(z_0 - z_{L'})} \underbrace{\frac{(z_{L'} - z_L)^{\ell-m}}{(\ell-m)!}}_{I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} I_m(z_0 - z_{L'}) \underbrace{\sum_{\ell=m}^{\infty} I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L) L_\ell(z_L)}_{L_m(z_{L'})}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} L_m(z_L) I_m(z_0 - z_L)$$

$$\boxed{L_m(z_{L'}) = \sum_{\ell=m}^{\infty} I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L) L_\ell(z_L)} \quad (\spadesuit)$$

F

$$\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} L_\ell(z_L) \underbrace{\frac{(z_0 - z_{L'})^m}{m!}}_{I_m(z_0 - z_{L'})} \underbrace{\frac{(z_{L'} - z_L)^{\ell-m}}{(\ell-m)!}}_{I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} I_m(z_0 - z_{L'}) \underbrace{\sum_{\ell=m}^{\infty} I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L) L_\ell(z_L)}_{L_m(z_{L'})}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} L_m(z_L) I_m(z_0 - z_L)$$

$$\boxed{L_m(z_{L'}) = \sum_{\ell=m}^{\infty} I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L) L_\ell(z_L)} \quad (\spadesuit)$$

F

- $(\spadesuit)$ ... **L2L posunutí**, když z_L je přesunut do $z_{L'}$

Expanze pro integrál s jádrem F

Potřebujeme vyjádřit:

- multipole expanze a multipole momenty,
- M2M posunutí,
- lokální expanze a M2L posunutí,
- L2L posunutí.

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} u(y)F(x,y)\,\mathrm{d}s_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko“ od x

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} u(y)F(x,y)\,\mathrm{d}s_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko“ od x
- Po zavedení komplexního označení $z_0 = x_1 + ix_2$ a $z = y_1 + iy_2$ máme $\mathcal{R}e\{G(z_0, z)\} = G(x, y)$;

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} u(y) F(x,y)\, \mathrm{d}s_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko“ od x
- Po zavedení komplexního označení $z_0 = x_1 + ix_2$ a $z = y_1 + iy_2$ máme $\mathcal{R}e\{G(z_0, z)\} = G(x, y)$; dále

$$F(z_0, z) = n(z) \cdot \frac{\partial G(z_0, z)}{\partial z}$$

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} u(y) F(x,y)\, \mathrm{d}s_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko" od x
- Po zavedení komplexního označení $z_0 = x_1 + ix_2$ a $z = y_1 + iy_2$ máme $\mathcal{R}e\{G(z_0,z)\} = G(x,y)$; dále

$$F(z_0,z) = n(z) \cdot \frac{\partial G(z_0,z)}{\partial z} = (n_1(y) + in_2(y)) \cdot \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_1} - i \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_2} \right)$$

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} u(y)F(x,y)\,\mathrm{d}s_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko“ od x
- Po zavedení komplexního označení $z_0 = x_1 + ix_2$ a $z = y_1 + iy_2$ máme $\mathcal{R}e\{G(z_0,z)\} = G(x,y)$; dále

$$F(z_0,z) = n(z)\cdot\frac{\partial G(z_0,z)}{\partial z} = (n_1(y) + in_2(y))\cdot\left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_1} - i\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_2}\right) =$$

$$= \underbrace{n_1(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_1} + n_2(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_2}}_{n(y)\cdot\nabla_y G(x,y) \;=\; F(x,y)} + i\,\mathcal{I}m\{F(z_0,z)\}$$

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} u(y) F(x,y)\, ds_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko“ od x
- Po zavedení komplexního označení $z_0 = x_1 + ix_2$ a $z = y_1 + iy_2$ máme $\mathcal{R}e\{G(z_0, z)\} = G(x,y)$; dále

$$F(z_0, z) = n(z) \cdot \frac{\partial G(z_0, z)}{\partial z} = (n_1(y) + in_2(y)) \cdot \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_1} - i \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_2} \right) =$$

$$= \underbrace{n_1(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_1} + n_2(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_2}}_{n(y) \cdot \nabla_y G(x,y) \;=\; F(x,y)} + i\,\mathcal{I}m\{F(z_0, z)\}$$

- Tedy $\mathcal{R}e\{F(z_0, z)\} = F(x,y)$

- Uvažujme integrál $\boxed{\int_{\Gamma_0} u(y) F(x,y)\,\mathrm{d}s_y,}$ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ je „dost daleko“ od x
- Po zavedení komplexního označení $z_0 = x_1 + ix_2$ a $z = y_1 + iy_2$ máme $\mathcal{R}e\{G(z_0, z)\} = G(x,y)$; dále

$$F(z_0, z) = n(z) \cdot \frac{\partial G(z_0, z)}{\partial z} = (n_1(y) + in_2(y)) \cdot \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_1} - i \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_2} \right) =$$

$$= \underbrace{n_1(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_1} + n_2(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_2}}_{n(y) \cdot \nabla_y G(x,y) \; = \; F(x,y)} + i\,\mathcal{I}m\{F(z_0, z)\}$$

- Tedy $\mathcal{R}e\{F(z_0, z)\} = F(x,y)$ a

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} u(y) F(x,y)\,\mathrm{d}s_y = \mathcal{R}e\left\{ \int_{\Gamma_0} u(z) F(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z \right\}}$$

Multipole expanze a multipole momenty (pro F)

$$G(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c)$$

Multipole expanze a multipole momenty (pro F)

$$G(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c)$$

$$\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_{k-1}(z - z_c)$$

Multipole expanze a multipole momenty (pro F)

$$G(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c)$$

$$\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_{k-1}(z - z_c)$$

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} u(z) F(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) N_k(z_c)} \quad (\triangle)$$

◂ G ▸ Step 3

$$\boxed{N_k(z_c) = \int_{\Gamma_0} n(z) u(z) I_{k-1}(z - z_c)\, \mathrm{d}s_z} \quad (\triangle\triangle)$$

▸ pw linear

Multipole expanze a multipole momenty (pro F)

$$G(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c)$$

$$\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_{k-1}(z - z_c)$$

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} u(z) F(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) N_k(z_c)} \quad (\triangle)$$

G | Step 3

$$\boxed{N_k(z_c) = \int_{\Gamma_0} n(z) u(z) I_{k-1}(z - z_c)\, \mathrm{d}s_z} \quad (\triangle\triangle)$$

pw linear

- $(\triangle)$ ... **multipole expanze**

Multipole expanze a multipole momenty (pro F)

$$G(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c)$$

$$\frac{\partial G(z_0, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_{k-1}(z - z_c)$$

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} u(z) F(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) N_k(z_c)} \quad (\triangle)$$

G Step 3

$$\boxed{N_k(z_c) = \int_{\Gamma_0} n(z) u(z) I_{k-1}(z - z_c)\, \mathrm{d}s_z} \quad (\triangle\triangle)$$

pw linear

- $(\triangle)$ ... **multipole expanze**
- $N_k(z_c)$ ... **multipole momenty** v okolí z_c

M2M posunutí (pro F)

Analogicky jako v případě jádra G odvodíme, že

$$\boxed{N_k(z_{c'}) = \sum_{m=1}^{k} I_{k-m}(z_c - z_{c'}) N_m(z_c)} \quad (\diamond)$$

G Step 3

$(\diamond)$ ... **M2M posunutí**, když z_c je přesunut do $z_{c'}$

Lokální expanze a M2L posunutí (pro F)

Analogicky jako v případě jádra G odvodíme, že

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} u(z)F(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} \widetilde{L}_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \quad (\square)$$

◀ G ▶ Step 5

$$\boxed{\widetilde{L}_\ell(z_L) = \frac{(-1)^\ell}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_{\ell+k}(z_L - z_c) N_k(z_c)} \quad (\square\square)$$

▶ Step 4

Lokální expanze a M2L posunutí (pro F)

Analogicky jako v případě jádra G odvodíme, že

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} u(z)F(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} \widetilde{L}_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \quad (\square)$$

◂ G ▸ Step 5

$$\boxed{\widetilde{L}_\ell(z_L) = \frac{(-1)^\ell}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_{\ell+k}(z_L - z_c) N_k(z_c)} \quad (\square\square)$$

▸ Step 4

- ($\square$) ... **lokální expanze**

Lokální expanze a M2L posunutí (pro F)

Analogicky jako v případě jádra G odvodíme, že

$$\boxed{\int_{\Gamma_0} u(z)F(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z = \sum_{\ell=0}^{\infty} \widetilde{L}_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \quad (\square)$$

◂ G ▸ Step 5

$$\boxed{\widetilde{L}_\ell(z_L) = \frac{(-1)^\ell}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_{\ell+k}(z_L - z_c) N_k(z_c)} \quad (\square\square)$$

▸ Step 4

- $(\square)$ ... **lokální expanze**
- $(\square\square)$ ... **M2L posunutí**

L2L posunutí (pro F)

Analogicky jako v případě jádra G odvodíme

$$\boxed{\widetilde{L}_m(z_{L'}) = \sum_{\ell=m}^{\infty} I_{\ell-m}(z_{L'} - z_L)\widetilde{L}_\ell(z_L)} \quad (\clubsuit)$$

G | Step 4

- $(\clubsuit)$ ... L2L posunutí, když z_L je přesunut do $z_{L'}$

2D FMM BEM algoritmus

FMM algoritmus

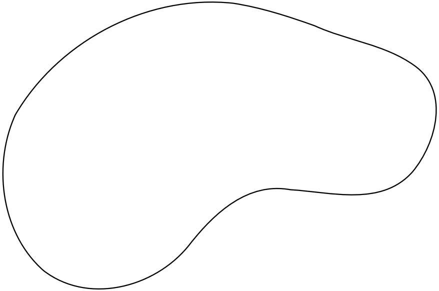
STEP 1: Diskretizace

Diskretizujeme Γ standardním způsobem jako u Conventional BEM (např. pomocí po částech konst. prvků).

FMM algoritmus

STEP 1: Diskretizace

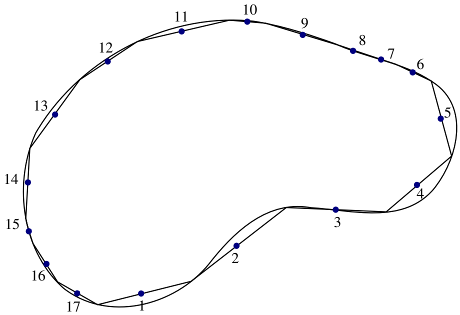
Diskretizujeme Γ standardním způsobem jako u Conventional BEM (např. pomocí po částech konst. prvků).



FMM algoritmus

STEP 1: Diskretizace

Diskretizujeme Γ standardním způsobem jako u Conventional BEM (např. pomocí po částech konst. prvků).



FMM algoritmus

STEP 2: Stromová struktura buněk (quad-tree)

FMM algoritmus

STEP 2: Stromová struktura buněk (quad-tree)

1. Uvažujme čtverec pokrývající celou hranici Γ ... **buňka úrovně 0**,

FMM algoritmus

STEP 2: Stromová struktura buněk (quad-tree)

1. Uvažujme čtverec pokrývající celou hranici Γ ... **buňka úrovně 0**,
2. dělíme **parent buňku** úrovně λ na 4 stejné **child buňky** úrovně $\lambda + 1$,

FMM algoritmus

STEP 2: Stromová struktura buněk (quad-tree)

1. Uvažujme čtverec pokrývající celou hranici Γ ... **buňka úrovně 0**,
2. dělíme **parent buňku** úrovně λ na 4 stejné **child buňky** úrovně $\lambda + 1$,
3. ukončíme dělení buňky, když obsahuje předem daný počet elementů,

FMM algoritmus

STEP 2: Stromová struktura buněk (quad-tree)

1. Uvažujme čtverec pokrývající celou hranici Γ ... **buňka úrovně 0**,
2. dělíme **parent buňku** úrovně λ na 4 stejné **child buňky** úrovně $\lambda + 1$,
3. ukončíme dělení buňky, když obsahuje předem daný počet elementů,
4. buňku nemající žádné child buňky nazýváme **list**.

FMM algoritmus

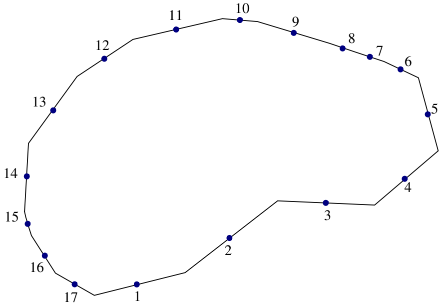
STEP 2: Stromová struktura buněk (quad-tree)

1. Uvažujme čtverec pokrývající celou hranici Γ ... **buňka úrovně 0**,
2. dělíme **parent buňku** úrovně λ na 4 stejné **child buňky** úrovně $\lambda + 1$,
3. ukončíme dělení buňky, když obsahuje předem daný počet elementů,
4. buňku nemající žádné child buňky nazýváme **list**.

Element je obsažen v buňce, pokud se v buňce nachází jeho střed.

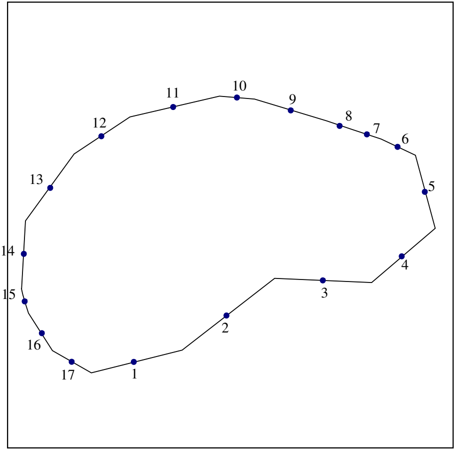
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



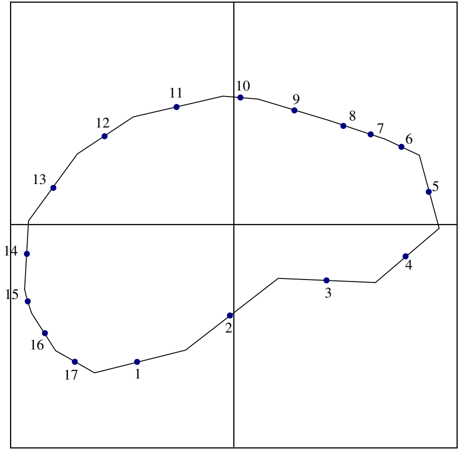
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



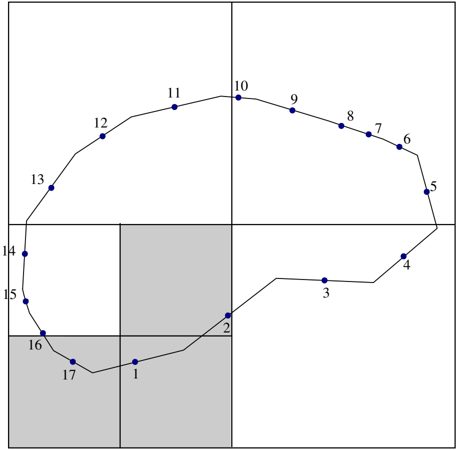
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



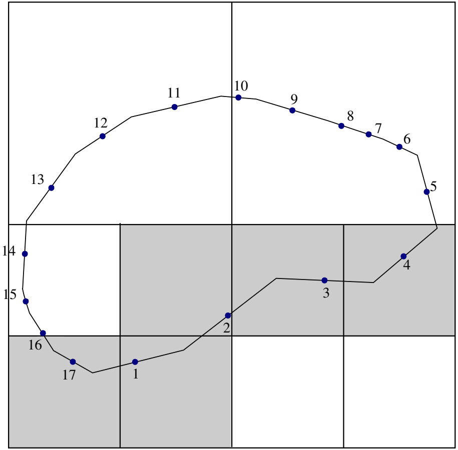
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



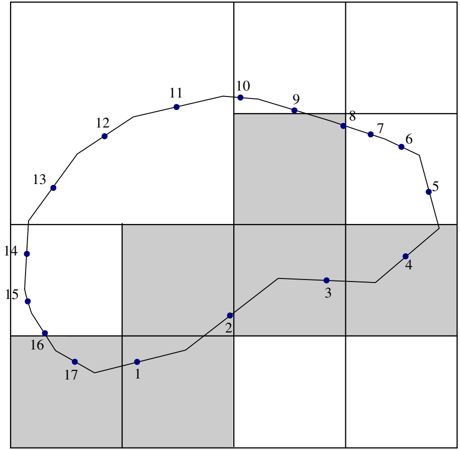
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



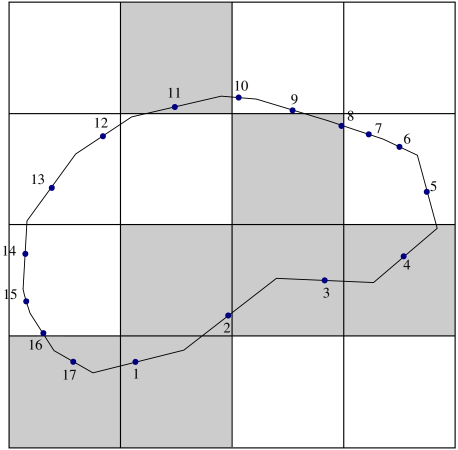
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



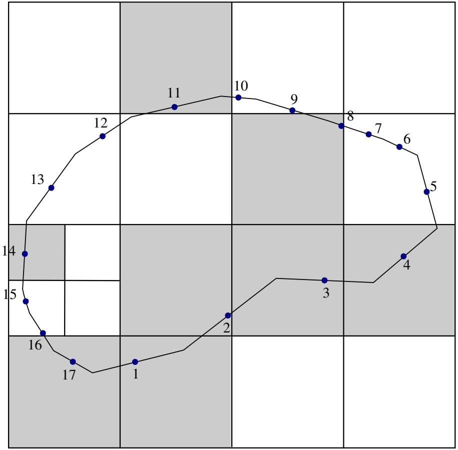
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



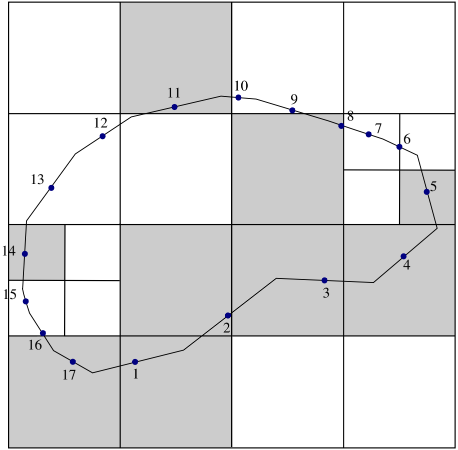
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



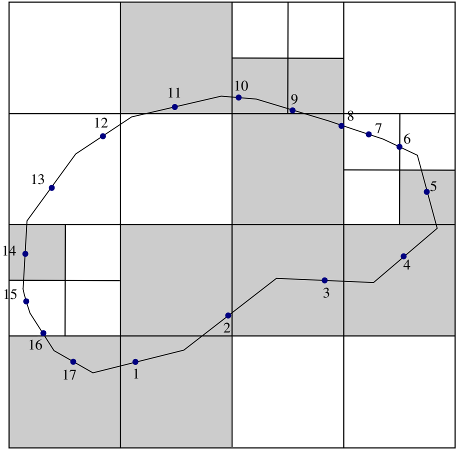
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



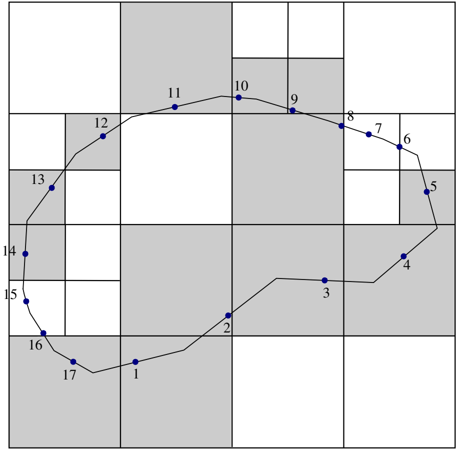
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



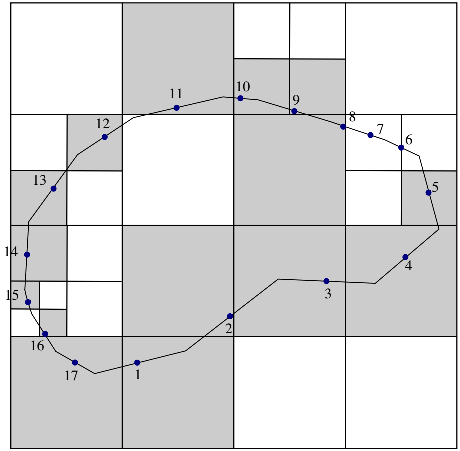
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.



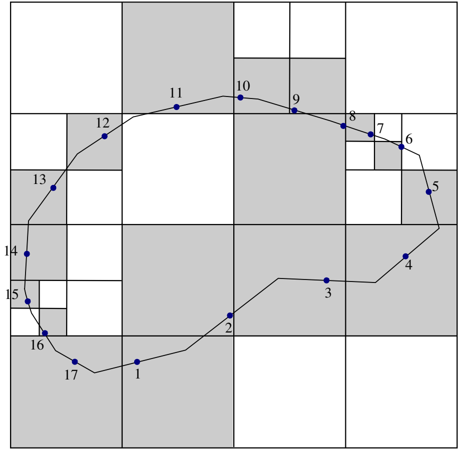
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.

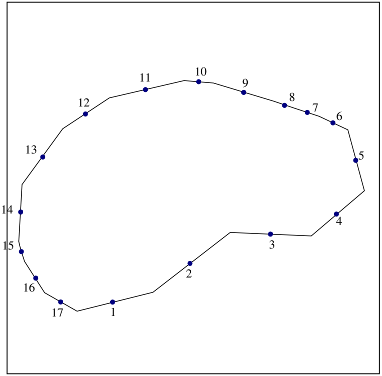


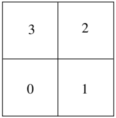
Ilustrace k vytvoření quad-tree

Maximální počet elementů v listové buňce je 1.

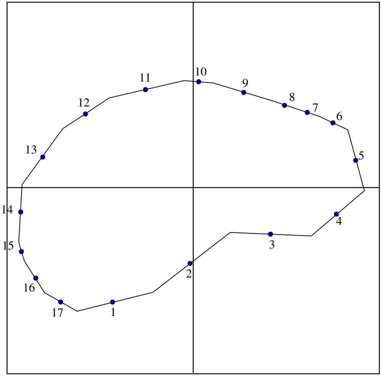


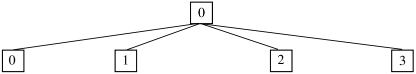
Ilustrace k vytvoření quad-tree

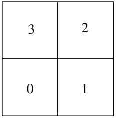




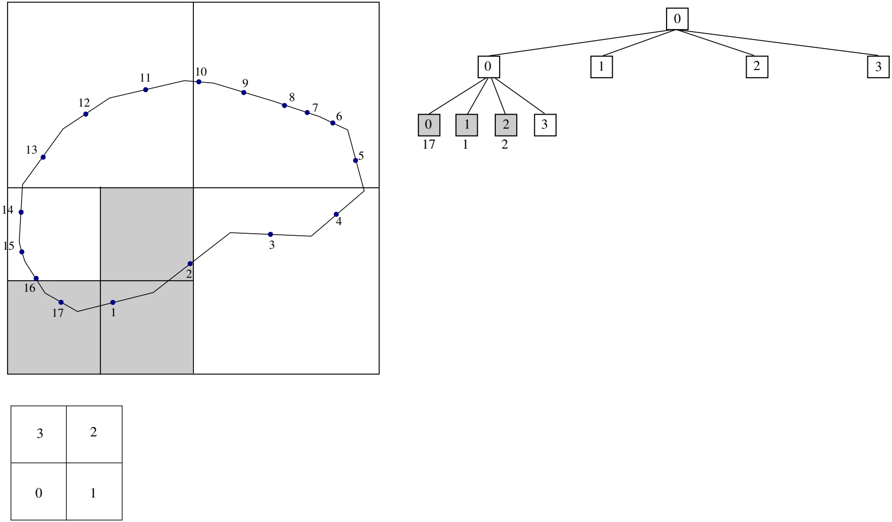
Ilustrace k vytvoření quad-tree



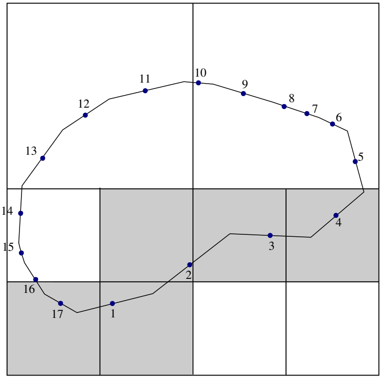


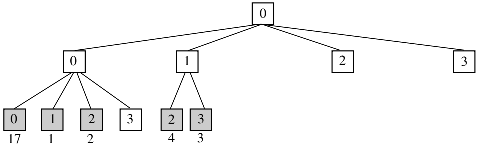


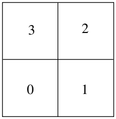
Ilustrace k vytvoření quad-tree



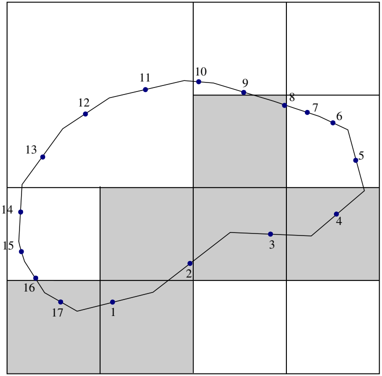
Ilustrace k vytvoření quad-tree

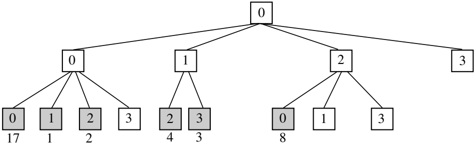


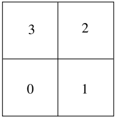




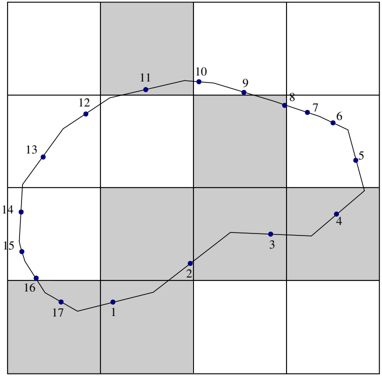
Ilustrace k vytvoření quad-tree

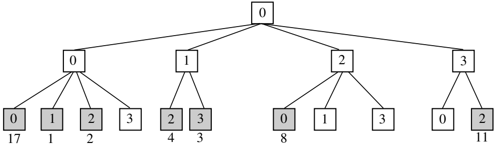


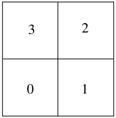




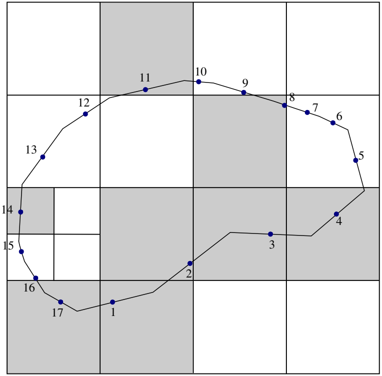
Ilustrace k vytvoření quad-tree

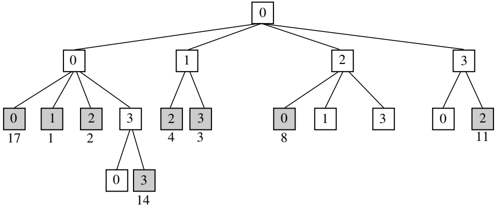


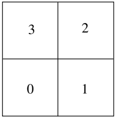




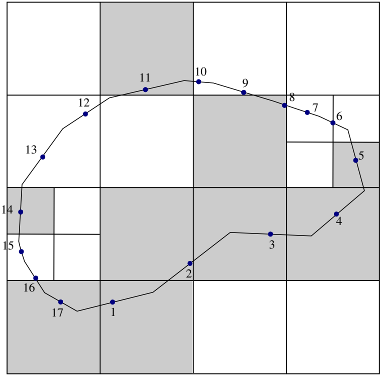
Ilustrace k vytvoření quad-tree

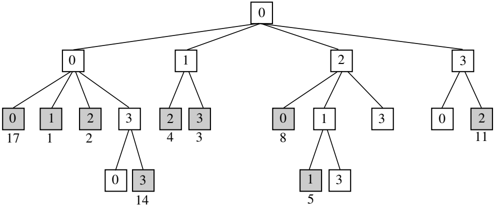


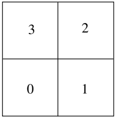




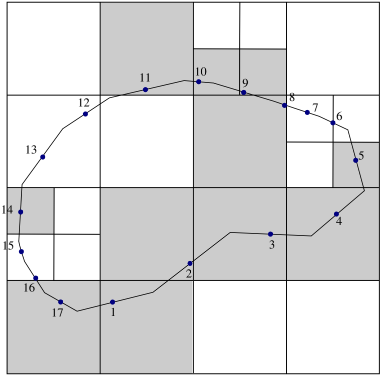
Ilustrace k vytvoření quad-tree

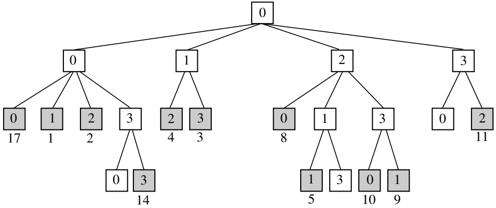


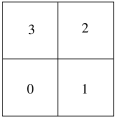




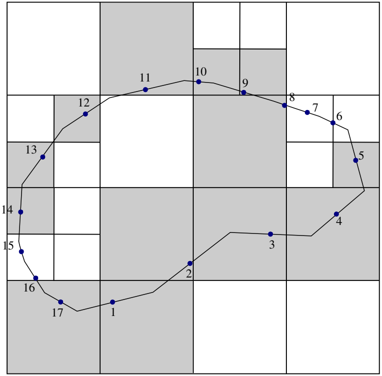
Ilustrace k vytvoření quad-tree

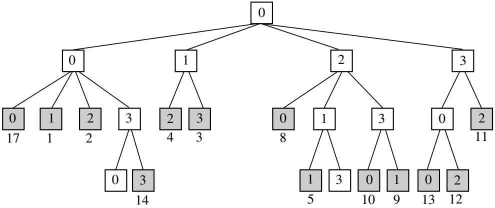


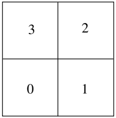




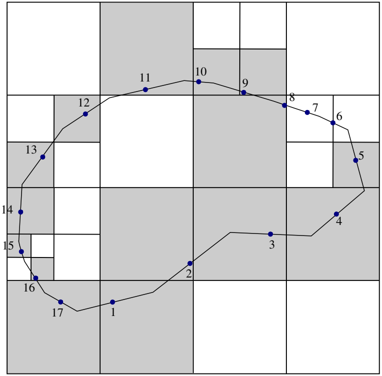
Ilustrace k vytvoření quad-tree

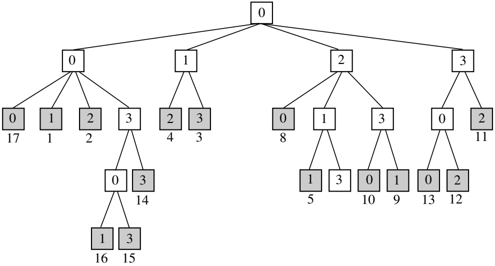


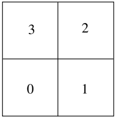




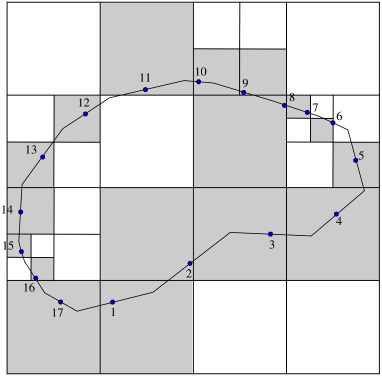
Ilustrace k vytvoření quad-tree

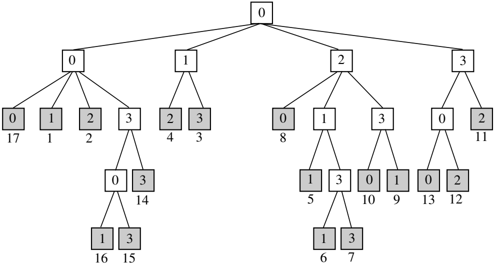


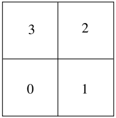




Ilustrace k vytvoření quad-tree







FMM algoritmus

STEP 3: Procházení nahoru (upward pass)

▸ Step 6

Vypočteme multipole momenty $M_k(z_c)$, $N_k(z_c)$ pro všechny buňky úrovně $\lambda \geq 2$ (z_c je střed buňky), přičemž $k = (0), 1, 2, \ldots, p$ (p ... předem zvolený řád)

FMM algoritmus

STEP 3: Procházení nahoru (upward pass)

Step 6

Vypočteme multipole momenty $M_k(z_c)$, $N_k(z_c)$ pro všechny buňky úrovně $\lambda \geq 2$ (z_c je střed buňky), přičemž $k = (0), 1, 2, \dots, p$ (p ... předem zvolený řád)

- pro list: použijeme vzorečky $(**)$, $(\triangle\triangle)$, kde Γ_0 je sjednocení elementů v listu obsažených,

$M_k(z_c), N_k(z_c)$

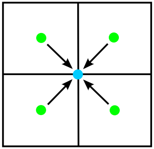
FMM algoritmus

STEP 3: Procházení nahoru (upward pass)

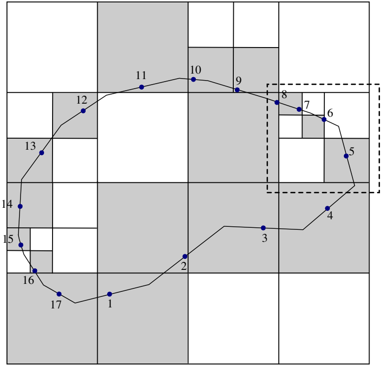
Step 6

Vypočteme multipole momenty $M_k(z_c)$, $N_k(z_c)$ pro všechny buňky úrovně $\lambda \geq 2$ (z_c je střed buňky), přičemž $k = (0), 1, 2, \dots, p$ (p … předem zvolený řád)

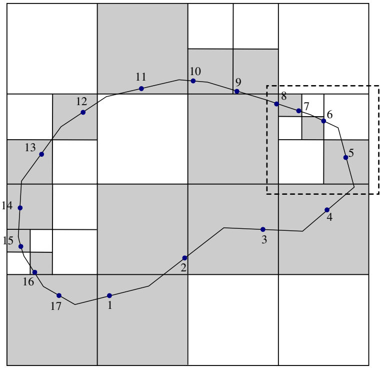
- pro list: použijeme vzorečky $(**)$, $(\triangle\triangle)$, kde Γ_0 je sjednocení elementů v listu obsažených, $M_k(z_c), N_k(z_c)$
- pro parent buňku: moment kolem $z_{c'}$ ($z_{c'}$ je střed parent buňky) vypočteme jako sumu příspěvků všech child buněk (tyto vypočteme pomocí M2M posunutí $(\bullet)$, $(\diamond)$). $M_k(z_{c'}), N_k(z_{c'})$

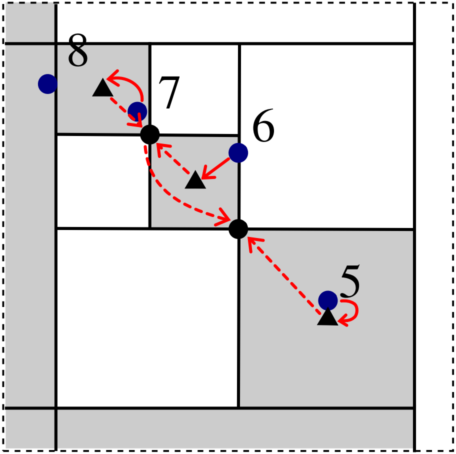


Ilustrace k výpočtu multipole momentů



Ilustrace k výpočtu multipole momentů





přímý výpočet pomocí $(**)$, $(\triangle\triangle)$

M2M posunutí $(\bullet)$, $(\diamond)$

FMM algoritmus

STEP 4: Procházení dolů (downward pass)

Dvě buňky nazveme

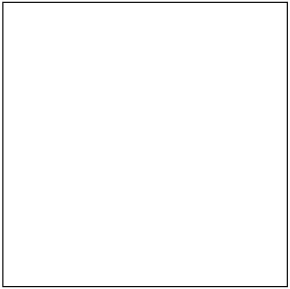
- **sousední (ajacent)**, pokud jsou na stejné úrovni a sdílí alespoň 1 vrchol,
- **dobře separované (well-separated)**, jestliže nejsou sousední, ale jejich rodiče jsou sousední. Množinu všech dobře separovaných buněk vůči buňce C nazveme **interakční seznam (interaction list)** buňky C.

FMM algoritmus

STEP 4: Procházení dolů (downward pass)

Dvě buňky nazveme

- **sousední (ajacent)**, pokud jsou na stejné úrovni a sdílí alespoň 1 vrchol,
- **dobře separované (well-separated)**, jestliže nejsou sousední, ale jejich rodiče jsou sousední. Množinu všech dobře separovaných buněk vůči buňce C nazveme **interakční seznam (interaction list)** buňky C.

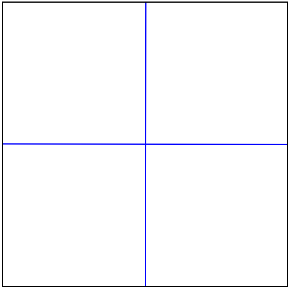


FMM algoritmus

STEP 4: Procházení dolů (downward pass)

Dvě buňky nazveme

- **sousední (ajacent)**, pokud jsou na stejné úrovni a sdílí alespoň 1 vrchol,
- **dobře separované (well-separated)**, jestliže nejsou sousední, ale jejich rodiče jsou sousední. Množinu všech dobře separovaných buněk vůči buňce C nazveme **interakční seznam (interaction list)** buňky C.

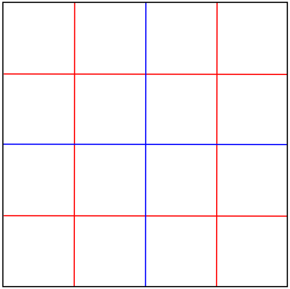


FMM algoritmus

STEP 4: Procházení dolů (downward pass)

Dvě buňky nazveme

- **sousední (ajacent)**, pokud jsou na stejné úrovni a sdílí alespoň 1 vrchol,
- **dobře separované (well-separated)**, jestliže nejsou sousední, ale jejich rodiče jsou sousední. Množinu všech dobře separovaných buněk vůči buňce C nazveme **interakční seznam (interaction list)** buňky C.

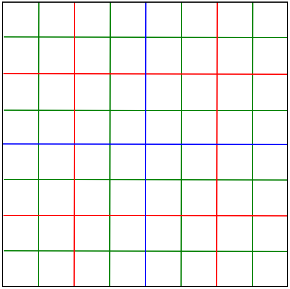


FMM algoritmus

STEP 4: Procházení dolů (downward pass)

Dvě buňky nazveme

- **sousední (ajacent)**, pokud jsou na stejné úrovni a sdílí alespoň 1 vrchol,
- **dobře separované (well-separated)**, jestliže nejsou sousední, ale jejich rodiče jsou sousední. Množinu všech dobře separovaných buněk vůči buňce C nazveme **interakční seznam (interaction list)** buňky C.

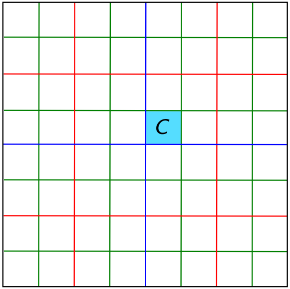


FMM algoritmus

STEP 4: Procházení dolů (downward pass)

Dvě buňky nazveme

- **sousední (ajacent)**, pokud jsou na stejné úrovni a sdílí alespoň 1 vrchol,
- **dobře separované (well-separated)**, jestliže nejsou sousední, ale jejich rodiče jsou sousední. Množinu všech dobře separovaných buněk vůči buňce C nazveme **interakční seznam (interaction list)** buňky C.

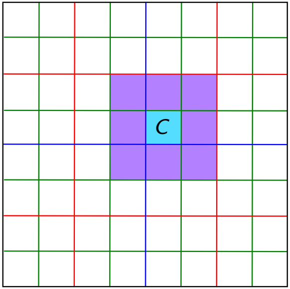


FMM algoritmus

STEP 4: Procházení dolů (downward pass)

Dvě buňky nazveme

- **sousední (ajacent)**, pokud jsou na stejné úrovni a sdílí alespoň 1 vrchol,
- **dobře separované (well-separated)**, jestliže nejsou sousední, ale jejich rodiče jsou sousední. Množinu všech dobře separovaných buněk vůči buňce C nazveme **interakční seznam (interaction list)** buňky C.



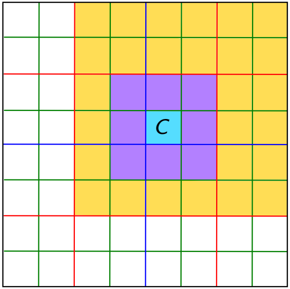
Max. počet sousedních buněk C: 8.

FMM algoritmus

STEP 4: Procházení dolů (downward pass)

Dvě buňky nazveme

- **sousední (ajacent)**, pokud jsou na stejné úrovni a sdílí alespoň 1 vrchol,
- **dobře separované (well-separated)**, jestliže nejsou sousední, ale jejich rodiče jsou sousední. Množinu všech dobře separovaných buněk vůči buňce C nazveme **interakční seznam (interaction list)** buňky C.



Max. počet sousedních buněk C: 8.

Max. počet dobře separ. buněk vůči C: $6^2 - 3^2 = 27$.

STEP 4

Vypočteme koeficienty $L_\ell(z_L)$, $\widetilde{L}_\ell(z_L)$ lokální expanze příslušející buňce C (z_L je střed C)

STEP 4

Vypočteme koeficienty $L_\ell(z_L)$, $\widetilde{L}_\ell(z_L)$ lokální expanze příslušející buňce C (z_L je střed C) jako součet

- sumy příspěvků buněk z interakčního seznamu C (tyto spočteme pomocí M2L posunutí (○○), (□□), kde z_c je střed dobře separované buňky vůči C)

◂ $L_\ell(z_L), \widetilde{L}_\ell(z_L)$

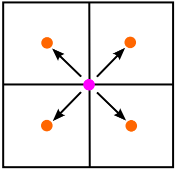
STEP 4

Vypočteme koeficienty $L_\ell(z_L)$, $\widetilde{L}_\ell(z_L)$ lokální expanze příslušející buňce C (z_L je střed C) jako součet

- sumy příspěvků buněk z interakčního seznamu C (tyto spočteme pomocí M2L posunutí (∘∘), (□□), kde z_c je střed dobře separované buňky vůči C)
  ◂ $L_\ell(z_L), \widetilde{L}_\ell(z_L)$

a

- sumy příspěvků buněk stejné úrovně jako C, jejichž parent buňka nesousedí s parent buňkou C (tuto vypočteme pomocí L2L posunutí (♠), (♣), kde $z_{L'}$ je střed parent buňky C). ◂ $L_\ell(z_{L'}), \widetilde{L}_\ell(z_{L'})$



STEP 4

Vypočteme koeficienty $L_\ell(z_L)$, $\widetilde{L}_\ell(z_L)$ lokální expanze příslušející buňce C (z_L je střed C) jako součet

- sumy příspěvků buněk z interakčního seznamu C (tyto spočteme pomocí M2L posunutí ($\circ\circ$), ($\square\square$), kde z_c je střed dobře separované buňky vůči C)

  $L_\ell(z_L), \widetilde{L}_\ell(z_L)$

a

- sumy příspěvků buněk stejné úrovně jako C, jejichž parent buňka nesousedí s parent buňkou C (tuto vypočteme pomocí L2L posunutí ($\spadesuit$), ($\clubsuit$), kde $z_{L'}$ je střed parent buňky C). $L_\ell(z_{L'}), \widetilde{L}_\ell(z_{L'})$

Výpočet koeficentů (pro $\ell = 1, 2, \dots, q$, kde q je předem zvolený řád) je proveden pro všechny buňky, přičemž začínáme úrovní $\lambda = 2$ a strom procházíme postupně dolů až k listům.

STEP 4

Vypočteme koeficienty $L_\ell(z_L)$, $\widetilde{L}_\ell(z_L)$ lokální expanze příslušející buňce C (z_L je střed C) jako součet

- sumy příspěvků buněk z interakčního seznamu C (tyto spočteme pomocí M2L posunutí ($\circ\circ$), ($\square\square$), kde z_c je střed dobře separované buňky vůči C)
$L_\ell(z_L), \widetilde{L}_\ell(z_L)$

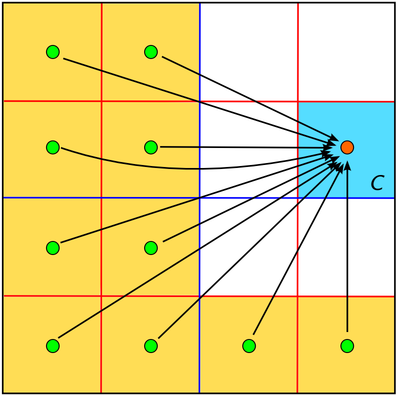
a

- sumy příspěvků buněk stejné úrovně jako C, jejichž parent buňka nesousedí s parent buňkou C (tuto vypočteme pomocí L2L posunutí ($\spadesuit$), ($\clubsuit$), kde $z_{L'}$ je střed parent buňky C). $L_\ell(z_{L'}), \widetilde{L}_\ell(z_{L'})$

Výpočet koeficentů (pro $\ell = 1, 2, \dots, q$, kde q je předem zvolený řád) je proveden pro všechny buňky, přičemž začínáme úrovní $\lambda = 2$ a strom procházíme postupně dolů až k listům.

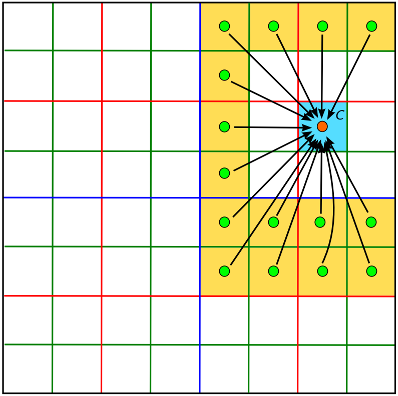
Pro buňku na úrovni 2 je výpočet koeficientů realizován pouze pomocí M2L posunutí.

$\lambda = 2$



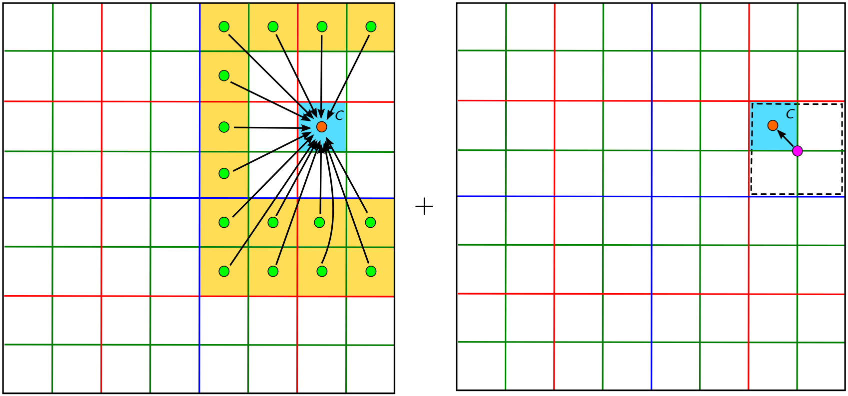
M2L

$\lambda = 3$



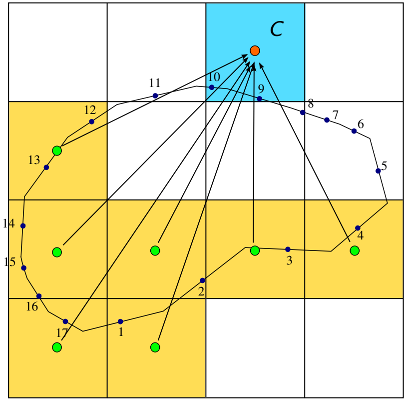
M2L

$\lambda = 3$



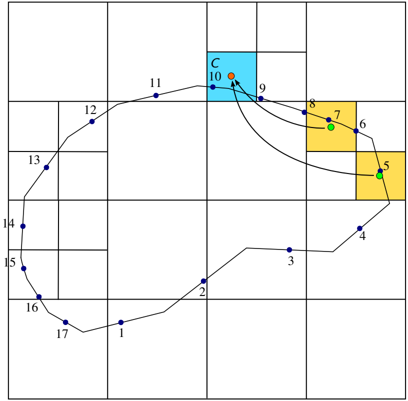
M2L L2L

$\lambda = 2$



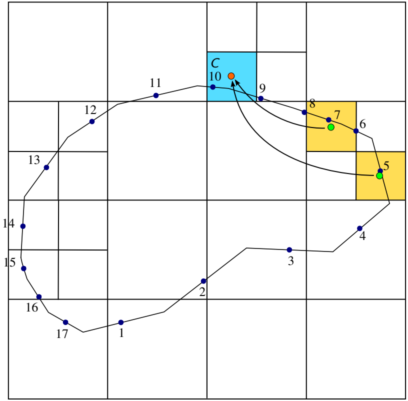
M2L

$\lambda = 3$



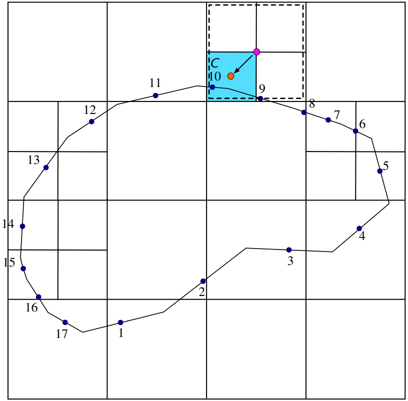
M2L

$\lambda = 3$



M2L

$+$



L2L

FMM algoritmus

STEP 5: Vyčíslení integrálů

Pro daný kolokační uzel $z_0 \in \Gamma$ se zabývejme výpočtem

$$\int_\Gamma t(z) G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z \quad \text{a} \quad \int_\Gamma u(z) F(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z .$$

Dirichletova úloha

FMM algoritmus

STEP 5: Vyčíslení integrálů

Pro daný kolokační uzel $z_0 \in \Gamma$ se zabývejme výpočtem

$$\int_\Gamma t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z \quad \text{a} \quad \int_\Gamma u(z) F(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z .$$

Dirichletova úloha

Nechť z_0 je obsažen v buňce C a nechť C' je sousední k C.

FMM algoritmus

STEP 5: Vyčíslení integrálů

Pro daný kolokační uzel $z_0 \in \Gamma$ se zabývejme výpočtem

$$\int_\Gamma t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z \quad \text{a} \quad \int_\Gamma u(z)F(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z .$$

Dirichletova úloha

Nechť z_0 je obsažen v buňce C a nechť C' je sousední k C. Pak

1. příspěvek z elementů v C' vypočteme přímo (klasicky), pokud C nebo C' je list;

FMM algoritmus

STEP 5: Vyčíslení integrálů

Pro daný kolokační uzel $z_0 \in \Gamma$ se zabývejme výpočtem

$$\int_\Gamma t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z \quad \text{a} \quad \int_\Gamma u(z)F(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z .$$

Dirichletova úloha

Nechť z_0 je obsažen v buňce C a nechť C' je sousední k C. Pak

1. příspěvek z elementů v C' vypočteme přímo (klasicky), pokud C nebo C' je list;
2. pokud C je list, vypočteme příspěvek ze „vzdálených" elementů pomocí lokální expanze (použijeme již vypočtené koeficienty $L_\ell(z_L)$ a $\widetilde{L}_\ell(z_L)$, kde z_L je střed C) lok. expanze a příspěvek z elementů v C vypočteme přímo (klasicky).

FMM algoritmus

STEP 5: Vyčíslení integrálů

Pro daný kolokační uzel $z_0 \in \Gamma$ se zabývejme výpočtem

$$\int_\Gamma t(z) G(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z \quad \text{a} \quad \int_\Gamma u(z) F(z_0, z)\, \mathrm{d}s_z .$$

Dirichletova úloha

Nechť z_0 je obsažen v buňce C a nechť C' je sousední k C. Pak

1. příspěvek z elementů v C' vypočteme přímo (klasicky), pokud C nebo C' je list;
2. pokud C je list, vypočteme příspěvek ze „vzdálených“ elementů pomocí lokální expanze (použijeme již vypočtené koeficienty $L_\ell(z_L)$ a $\widetilde{L}_\ell(z_L)$, kde z_L je střed C) lok. expanze a příspěvek z elementů v C vypočteme přímo (klasicky).

Součet všech těchto příspěvků je pak roven příslušnému integrálu.

FMM algoritmus

STEP 5: Vyčíslení integrálů

Pro daný kolokační uzel $z_0 \in \Gamma$ se zabývejme výpočtem

$$\int_\Gamma t(z)G(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z \quad \text{a} \quad \int_\Gamma u(z)F(z_0, z)\,\mathrm{d}s_z.$$

Dirichletova úloha

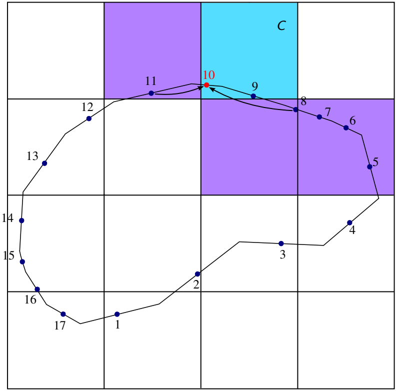
Nechť z_0 je obsažen v buňce C a nechť C' je sousední k C. Pak

1. příspěvek z elementů v C' vypočteme přímo (klasicky), pokud C nebo C' je list;
2. pokud C je list, vypočteme příspěvek ze „vzdálených“ elementů pomocí lokální expanze (použijeme již vypočtené koeficienty $L_\ell(z_L)$ a $\widetilde{L}_\ell(z_L)$, kde z_L je střed C) lok. expanze a příspěvek z elementů v C vypočteme přímo (klasicky).

Součet všech těchto příspěvků je pak roven příslušnému integrálu.

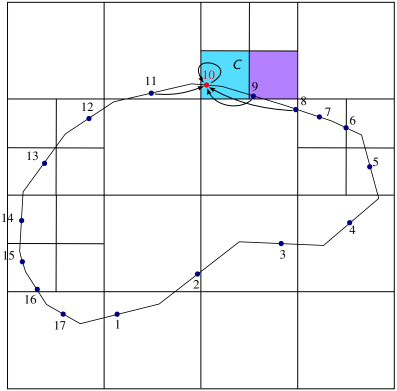
Strom procházíme postupně dolů od levelu $\lambda = 2$.

Kolokační uzel z_0 : 10



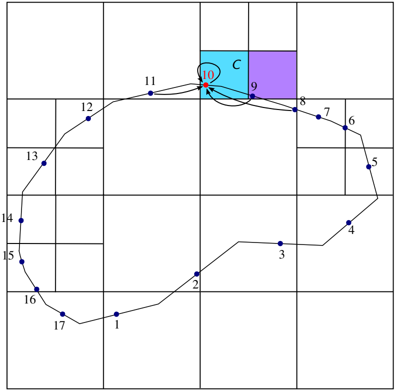
Přímý (klasický) výpočet, $\lambda = 2$

Kolokační uzel z_0 : 10



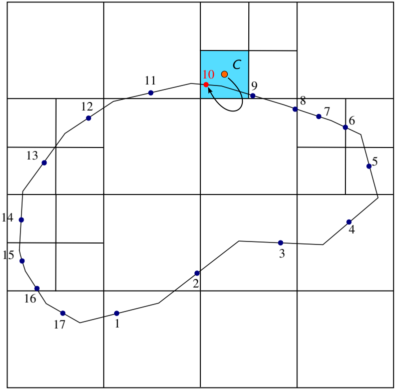
Přímý (klasický) výpočet, $\lambda = 3$

Kolokační uzel z_0 : 10



Přímý (klasický) výpočet, $\lambda = 3$

$+$



Lokální expanze

FMM algoritmus

STEP 6: Iterace řešení

Vypočteme novou iteraci řešení a pokračujeme krokem 3. Step 3

Numerické experimenty

2D Dirichletova úloha s Laplaceovou rovnicí

$$\boxed{\begin{aligned} \triangle u &= 0 \text{ v } \Omega \\ u &= h \text{ na } \Gamma \end{aligned}}$$

smíšená úloha $(\Gamma_1 = \Gamma,\ \Gamma_2 = \emptyset,\ h_1 = h)$

2D Dirichletova úloha s Laplaceovou rovnicí

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \triangle u & = & 0 \text{ v } \Omega \\ u & = & h \text{ na } \Gamma \end{array}}$$

smíšená úloha $(\Gamma_1 = \Gamma,\ \Gamma_2 = \emptyset,\ h_1 = h)$

Diskretizací 1. hraniční rovnice kolokací s po částech konst. hraničními prvky získáme:

$$\int_\Gamma t(y) G(x_i, y)\, \mathrm{d}s_y = \frac{1}{2} h(x_i) + \int_\Gamma h(y) F(x_i, y)\, \mathrm{d}s_y, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde

$$t(y) \approx \sum_{j=1}^{N} t_j \psi_j(y), \quad h(y) \approx \sum_{j=1}^{N} h_j \psi_j(y) \quad \text{a} \quad x_i \text{ je } i\text{-tý kolokační uzel.}$$

2D Dirichletova úloha s Laplaceovou rovnicí

$$\boxed{\begin{aligned} \triangle u &= 0 \text{ v } \Omega \\ u &= h \text{ na } \Gamma \end{aligned}}$$

◂ smíšená úloha $(\Gamma_1 = \Gamma,\ \Gamma_2 = \emptyset,\ h_1 = h)$

Diskretizací 1. hraniční rovnice kolokací s po částech konst. hraničními prvky získáme:

$$\int_\Gamma t(y) G(x_i, y)\, \mathrm{d}s_y = \frac{1}{2} h(x_i) + \int_\Gamma h(y) F(x_i, y)\, \mathrm{d}s_y, \quad i = 1, \ldots, N,$$

kde

$$t(y) \approx \sum_{j=1}^{N} t_j \psi_j(y), \quad h(y) \approx \sum_{j=1}^{N} h_j \psi_j(y) \quad \text{a} \quad x_i \text{ je } i\text{-tý kolokační uzel.}$$

Pro řešení výše uvedeného systému použijeme vhodný iterační algoritmus s počáteční aproximací $\mathbf{t}^0 = (t_j^0)_{j=1}^N$, přičemž násobení maticí tuhosti a výpočet pravé strany bude realizováno pomocí FMM-BEM.

- Pro $i = 1, \dots, N$ je třeba vyčíslit

$$\int_\Gamma h(y) F(x_i, y) \, \mathrm{d}s_y,$$

- pro danou aproximaci $\mathbf{t}^\alpha = (t_j^\alpha)_{j=1}^N$ a $i = 1, \dots, N$ je třeba vyčíslit

$$\int_\Gamma t^\alpha(y) G(x_i, y) \, \mathrm{d}s_y, \quad \text{kde} \quad t^\alpha(y) = \sum_{j=1}^N t_j^\alpha \psi_j(y).$$

Step 5

Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na kruhu

- Zvolená data úlohy: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ ||x|| < 1\}$
  $h(x) = x_1 + x_2$

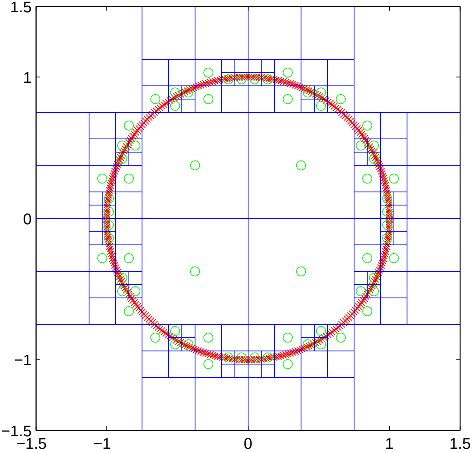
Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na kruhu

- Zvolená data úlohy: $$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ ||x|| < 1\}$$ $$h(x) = x_1 + x_2$$
- Analytické řešení úlohy: $$u(x) = x_1 + x_2 \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}$$ $$t(x) = u(x) \quad \text{pro } x \in \Gamma$$

Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na kruhu

- Zvolená data úlohy: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ ||x|| < 1\}$
  $h(x) = x_1 + x_2$
- Analytické řešení úlohy: $u(x) = x_1 + x_2 \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}$
  $t(x) = u(x) \quad \text{pro } x \in \Gamma$
- Parametry: max. 10 elementů v listu
  $p = q = 19$
  GMRES s přesností 10^{-8}
  všechny integrály vyčísleny analyticky

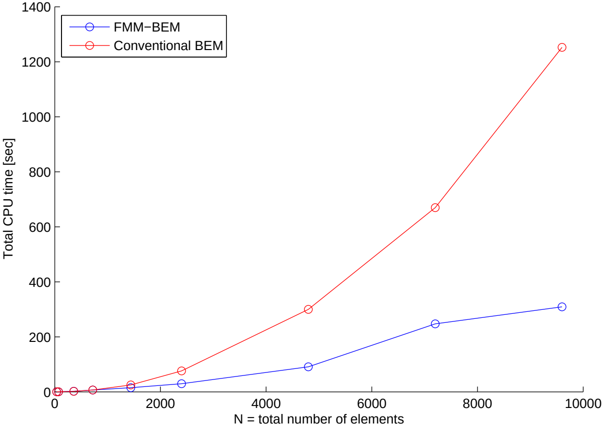
Buňky pro $N = 360$



Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na kruhu

N	$\lVert \mathbf{t} - \mathbf{t}_{\text{exact}} \rVert / \lVert \mathbf{t}_{\text{exact}} \rVert$	
	FMM-BEM	Conv. BEM
36	$6{,}4 \cdot 10^{-3}$	$6{,}4 \cdot 10^{-3}$
72	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$	$1, 6 \cdot 10^{-3}$
360	$6{,}3 \cdot 10^{-5}$	$6{,}3 \cdot 10^{-5}$
720	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$
1400	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$
2400	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$
4800	$3{,}6 \cdot 10^{-7}$	$3{,}6 \cdot 10^{-7}$
7200	$1{,}6 \cdot 10^{-7}$	$1{,}6 \cdot 10^{-7}$
9600	$8{,}9 \cdot 10^{-8}$	$8{,}9 \cdot 10^{-8}$

Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na kruhu



2D smíšená úloha s Laplaceovou rovnicí

Vraťme se ke smíšené úloze z počátku: smíšená úloha

2D smíšená úloha s Laplaceovou rovnicí

Vraťme se ke smíšené úloze z počátku: ◂ smíšená úloha

Diskretizací 1. hraniční rovnice kolokací (s po částech konst. hraničními prvky) získáme:

$$\frac{1}{2}u(x_i) = \int_\Gamma t(y)G(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y - \int_\Gamma u(y)F(x_i, y)\,\mathrm{d}s_y, \quad i = 1, \dots, N,$$

přičemž hledáme (uzlové hodnoty) u na Γ_2 a t na Γ_1.

2D smíšená úloha s Laplaceovou rovnicí

Vraťme se ke smíšené úloze z počátku: smíšená úloha

Diskretizací 1. hraniční rovnice kolokací (s po částech konst. hraničními prvky) získáme:

$$\frac{1}{2}u(x_i) = \int_\Gamma t(y)G(x_i,y)\,\mathrm{d}s_y - \int_\Gamma u(y)F(x_i,y)\,\mathrm{d}s_y, \quad i = 1,\dots,N,$$

přičemž hledáme (uzlové hodnoty) u na Γ_2 a t na Γ_1.

Pro $x_i \in \Gamma_2$:

$$\frac{1}{2}u(x_i) + \int_{\Gamma_2} u\,F(x_i,\cdot) - \int_{\Gamma_1} t\,G(x_i,\cdot) = \qquad -\int_{\Gamma_1} h_1\,F(x_i,\cdot) + \int_{\Gamma_2} h_2\,G(x_i,\cdot)$$

2D smíšená úloha s Laplaceovou rovnicí

Vraťme se ke smíšené úloze z počátku: smíšená úloha

Diskretizací 1. hraniční rovnice kolokací (s po částech konst. hraničními prvky) získáme:

$$\frac{1}{2}u(x_i) = \int_\Gamma t(y)G(x_i,y)\,\mathrm{d}s_y - \int_\Gamma u(y)F(x_i,y)\,\mathrm{d}s_y\,, \quad i = 1,\dots,N,$$

přičemž hledáme (uzlové hodnoty) u na Γ_2 a t na Γ_1.

Pro $x_i \in \Gamma_2$:

$$\frac{1}{2}u(x_i) + \int_{\Gamma_2} u\,F(x_i,\cdot) - \int_{\Gamma_1} t\,G(x_i,\cdot) = \qquad -\int_{\Gamma_1} h_1\,F(x_i,\cdot) + \int_{\Gamma_2} h_2\,G(x_i,\cdot)$$

Pro $x_i \in \Gamma_1$:

$$\int_{\Gamma_2} u\,F(x_i,\cdot) - \int_{\Gamma_1} t\,G(x_i,\cdot) = -\frac{1}{2}h_1(x_i) - \int_{\Gamma_1} h_1\,F(x_i,\cdot) + \int_{\Gamma_2} h_2\,G(x_i,\cdot)$$

- Hledané řešení:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_N \\ \mathbf{t}_D \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{u}_N$ ... vektor uzlových hodnot u na Γ_2,

$\mathbf{t}_D$ ... vektor uzlových hodnot t na Γ_1.

- Hledané řešení:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_N \\ \mathbf{t}_D \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{u}_N$ ... vektor uzlových hodnot u na Γ_2,

$\mathbf{t}_D$ ... vektor uzlových hodnot t na Γ_1.

- Pro řešení uvedeného systému použijeme vhodný iterační algoritmus, přičemž násobení maticí tuhosti a výpočet pravé strany bude realizováno pomocí FMM-BEM.

- Hledané řešení:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_N \\ \mathbf{t}_D \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{u}_N$ ... vektor uzlových hodnot u na Γ_2,

$\mathbf{t}_D$ ... vektor uzlových hodnot t na Γ_1.

- Pro řešení uvedeného systému použijeme vhodný iterační algoritmus, přičemž násobení maticí tuhosti a výpočet pravé strany bude realizováno pomocí FMM-BEM.

- U přímého výpočtu multipole momentů či přímého výpočtu příspěvků ve Stepu 5 „volíme vzorečky pro jádro G či F“ dle toho, na jaké části hranice se příslušný element nachází.

Numerické výsledky pro smíšenou úlohu na mezikruží

- Zvolená data úlohy:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; 1 < ||x|| < 2\}$$
$$\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; ||x|| = 1\}$$
$$\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; ||x|| = 2\}$$
$$h_1 \equiv 100$$
$$h_2 \equiv 200$$

Numerické výsledky pro smíšenou úlohu na mezikruží

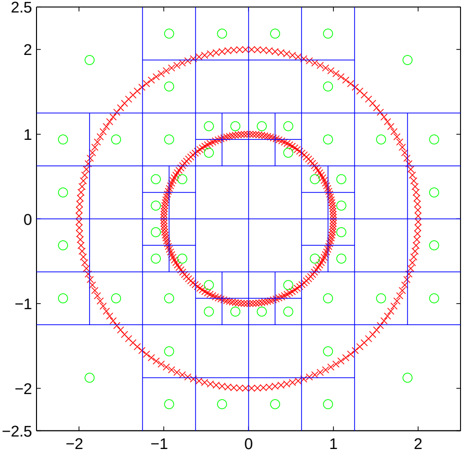
- Zvolená data úlohy:
$$\begin{aligned}\Omega &= \{x \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < ||x|| < 2\}\\ \Gamma_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 :\ ||x|| = 1\}\\ \Gamma_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 :\ ||x|| = 2\}\\ h_1 &\equiv 100\\ h_2 &\equiv 200\end{aligned}$$

- Analytické řešení úlohy:
$$\begin{aligned}u(x) &= 100 + 400 \ln ||x|| \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}\\ t(x) &= -400 \quad \text{pro } x \in \Gamma_1\end{aligned}$$

Numerické výsledky pro smíšenou úlohu na mezikruží

- Zvolená data úlohy:
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < ||x|| < 2\}$$
$$\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ ||x|| = 1\}$$
$$\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ ||x|| = 2\}$$
$$h_1 \equiv 100$$
$$h_2 \equiv 200$$
- Analytické řešení úlohy:
$$u(x) = 100 + 400 \ln ||x|| \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}$$
$$t(x) = -400 \quad \text{pro } x \in \Gamma_1$$
- Parametry: Γ_1 i Γ_2 diskretizovány $N/2$ elementy
  max. 10 elementů v listu
  $p = q = 19$
  GMRES s přesností 10^{-8}
  všechny integrály vyčísleny analyticky

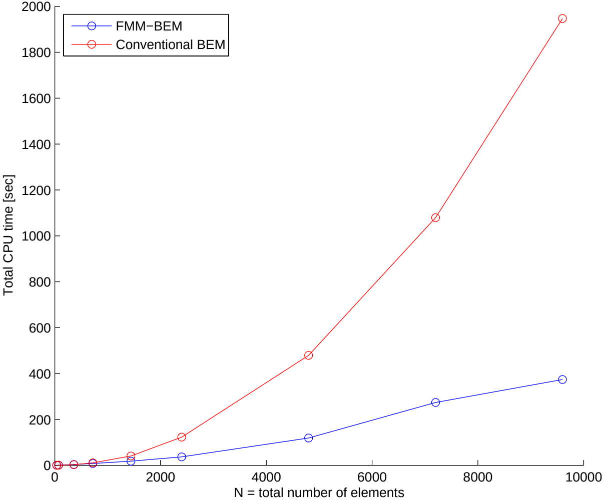
Buňky pro $N = 360$



Numerické výsledky pro smíšenou úlohu na mezikruží

N	t na Γ_1		u na Γ_2	
	FMM-BEM	Conv. BEM	FMM-BEM	Conv. BEM
36	-401,771549	-401,771549	376,723613	376,723613
72	-400,400665	-400,400665	377,140977	377,140977
360	-400,014903	-400,014903	377,254780	377,254780
720	-400,003694	-400,003694	377,257871	377,257870
1400	-400,000973	-400,000973	377,258610	377,258610
2400	-400,000330	-400,000330	377,258784	377,258783
4800	-400,000083	-400,000083	377,258850	377,258850
7200	-400,000037	-400,000037	377,258863	377,258862
9600	-400,000021	-400,000021	377,258867	377,258867
Analytic	-400		377,258872	

Numerické výsledky pro smíšenou úlohu na mezikruží



Diskretizace kolokací s po částech lin. fcemi φ_j

$$u(y) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(y)$$

Diskretizace kolokací s po částech lin. fcemi φ_j

$$u(y) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(y)$$

- Změny pouze pro výpočet integrálů s jádrem F

Diskretizace kolokací s po částech lin. fcemi φ_j

$$u(y) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(y)$$

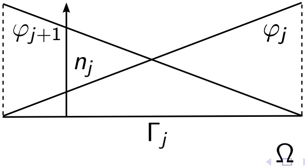
- Změny pouze pro výpočet integrálů s jádrem F
- Změní se pouze přímý výpočet multipole momentů ve Stepu 3 a přímý výpočet příspěvků ve Stepu 5

Diskretizace kolokací s po částech lin. fcemi φ_j

$$u(y) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(y)$$

- Změny pouze pro výpočet integrálů s jádrem F
- Změní se pouze přímý výpočet multipole momentů ve Stepu 3 a přímý výpočet příspěvků ve Stepu 5
- Příspěvek elementu Γ_j do výpočtu příslušného multipole momentu: $N_k(z_c)$

$$n_j \int_{\Gamma_j} \left(u_j \varphi_j(z) + u_{j+1} \varphi_{j+1}(z) \right) I_{k-1}(z - z_c) \, \mathrm{d}s_z$$

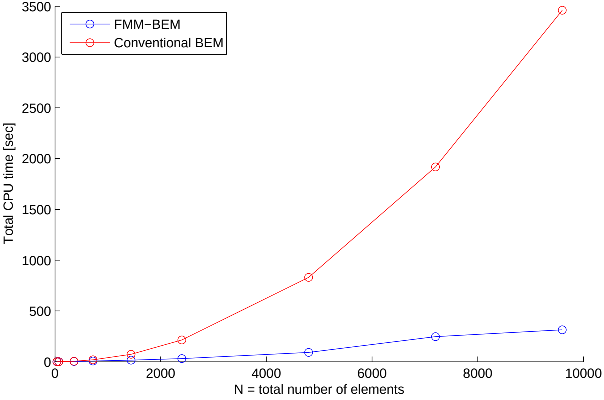


Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na kruhu

- Pro aproximaci $h(y)$ nyní použijeme po částech lin. prvky φ_j
- Data úlohy jsou volena stejně jako pro případ po část. konst. hraničních prvků

N	$\lVert \mathbf{t} - \mathbf{t}_{\text{exact}} \rVert / \lVert \mathbf{t}_{\text{exact}} \rVert$	
	FMM-BEM	Conv. BEM
36	$< 10^{-15}$	$< 10^{-15}$
72	$5{,}2 \cdot 10^{-11}$	$< 10^{-15}$
360	$2{,}5 \cdot 10^{-10}$	$2{,}3 \cdot 10^{-14}$
720	$4{,}5 \cdot 10^{-10}$	$6{,}4 \cdot 10^{-14}$
1400	$2 \cdot 10^{-10}$	$1{,}8 \cdot 10^{-13}$
2400	$2{,}7 \cdot 10^{-10}$	$3{,}9 \cdot 10^{-13}$
4800	$3{,}2 \cdot 10^{-10}$	$1{,}1 \cdot 10^{-12}$
7200	$4{,}6 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-12}$
9600	$4{,}4 \cdot 10^{-10}$	$3{,}2 \cdot 10^{-12}$

Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na kruhu



Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na čtverci

- Zvolená data úlohy: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 < 1 \;\wedge\; |x_2| < 1 - |x_1|\}$
  $h(x) = 2x_1$

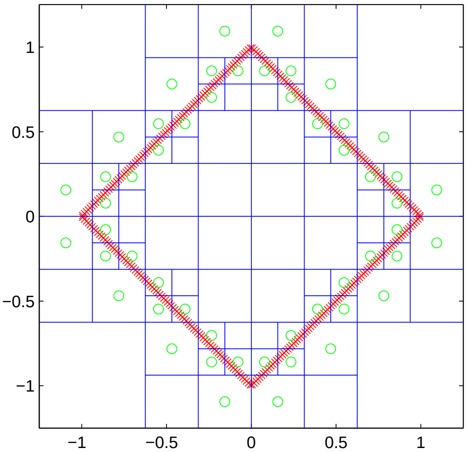
Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na čtverci

- Zvolená data úlohy: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 < 1 \;\wedge\; |x_2| < 1 - |x_1|\}$
  $h(x) = 2x_1$
- Analytické řešení úlohy: $u(x) = 2x_1 \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}$
  $$t(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & x_1 \in (0,1) \\ -\sqrt{2} & x_1 \in (-1,0) \end{cases}$$

Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na čtverci

- Zvolená data úlohy: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 < 1 \; \wedge \; |x_2| < 1 - |x_1|\}$
  $h(x) = 2x_1$
- Analytické řešení úlohy: $u(x) = 2x_1 \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}$
  $$t(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & x_1 \in (0,1) \\ -\sqrt{2} & x_1 \in (-1,0) \end{cases}$$
- Parametry: max. 10 elementů v listu
  $p = q = 19$
  GMRES s přesností 10^{-8}
  všechny integrály vyčísleny analyticky

Buňky pro $N = 360$

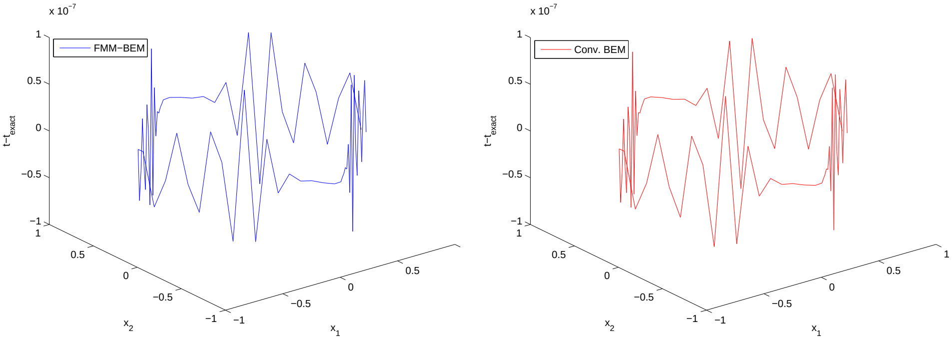


Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na čtverci

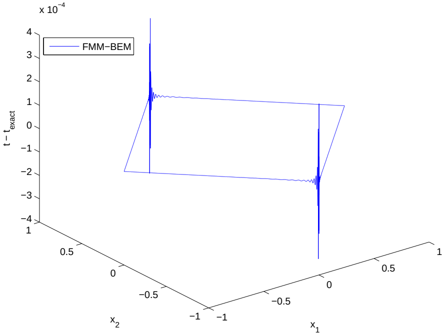
Pro aproximaci $h(y)$ použijeme po částech lin. prvky φ_j.

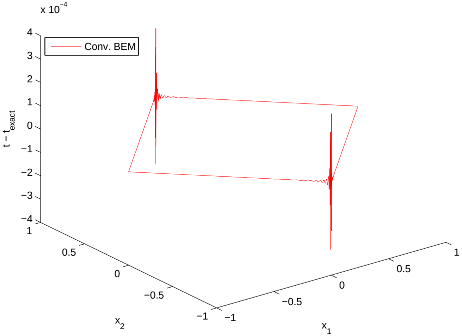
N	$\|\|\mathbf{t} - \mathbf{t}_{\mathrm{exact}}\|\| / \|\|\mathbf{t}_{\mathrm{exact}}\|\|$		GMRES it.	
	FMM-BEM	Conv. BEM	FMM-BEM	Conv. BEM
36	$3{,}1 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-10}$	9	9
72	$2{,}8 \cdot 10^{-8}$	$2{,}7 \cdot 10^{-8}$	16	16
360	$7{,}5 \cdot 10^{-7}$	$7{,}4 \cdot 10^{-7}$	31	31
720	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$	40	39
1400	$2{,}9 \cdot 10^{-6}$	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$	82	49
2400	$4{,}8 \cdot 10^{-6}$	$4{,}1 \cdot 10^{-6}$	93	58
4800	$1 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-6}$	70	70
7200	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	88	77
9600	$1{,}9 \cdot 10^{-5}$	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	116	84

$\mathbf{t} - \mathbf{t}_{\text{exact}}$ pro $N = 72$

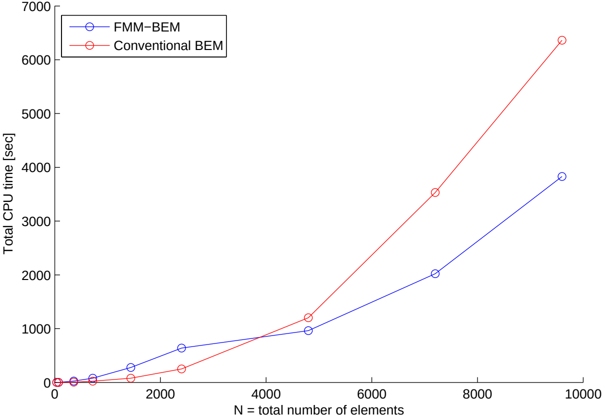


$\mathbf{t} - \mathbf{t}_{\text{exact}}$ pro $N = 4800$

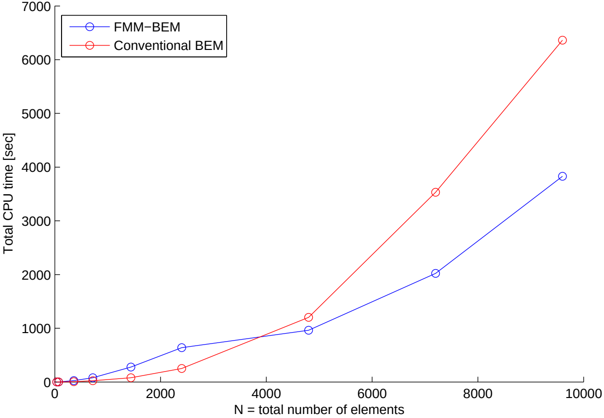




Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na čtverci



Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na čtverci



Příliš mnoho GMRES iterací ⇒ předpodmínění!

2D Galerkin FMM BEM

Diskretizací 1. hraniční rovnice Galerkinovou metodou a po částech konst. hraničními prvky ψ_i dostáváme:

$$\frac{1}{2}\left\langle u, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \left\langle Vt, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} - \left\langle Ku, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

2D Galerkin FMM BEM

Diskretizací 1. hraniční rovnice Galerkinovou metodou a po částech konst. hraničními prvky ψ_i dostáváme:

$$\frac{1}{2}\left\langle u, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \left\langle Vt, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} - \left\langle Ku, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde

- V ... operátor jednoduché vrstvy, K ... operátor dvojvrstvy,
- $t(y) \approx \sum_{j=1}^{N} t_j \psi_j(y), \quad u(y) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j \psi_j(y).$

2D Galerkin FMM BEM

Diskretizací 1. hraniční rovnice Galerkinovou metodou a po částech konst. hraničními prvky ψ_i dostáváme:

$$\frac{1}{2}\left\langle u, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \left\langle Vt, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} - \left\langle Ku, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde

- V ... operátor jednoduché vrstvy, K ... operátor dvojvrstvy,
- $t(y) \approx \sum_{j=1}^{N} t_j \psi_j(y), \quad u(y) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j \psi_j(y).$

Pro naši Dirichletovu úlohu máme

$$\left\langle Vt, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \frac{1}{2}\left\langle h, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} + \left\langle Kh, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad i = 1, \dots, N.$$

2D Galerkin FMM BEM

Diskretizací 1. hraniční rovnice Galerkinovou metodou a po částech konst. hraničními prvky ψ_i dostáváme:

$$\frac{1}{2}\left\langle u, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \left\langle Vt, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} - \left\langle Ku, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

kde

- V ... operátor jednoduché vrstvy, K ... operátor dvojvrstvy,
- $t(y) \approx \sum_{j=1}^{N} t_j \psi_j(y), \quad u(y) \approx \sum_{j=1}^{N} u_j \psi_j(y).$

Pro naši Dirichletovu úlohu máme

$$\left\langle Vt, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \frac{1}{2}\left\langle h, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} + \left\langle Kh, \psi_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Pro řešení výše uvedeného systému použijeme vhodný iterační algoritmus s počáteční aproximací $\mathbf{t}^0 = (t_j^0)_{j=1}^N$, přičemž násobení maticí tuhosti a výpočet pravé strany bude realizováno pomocí FMM-BEM.

- Pro $i = 1, \ldots, N$ je třeba vyčíslit

$$\int_{\Gamma_i} \left(\int_{\Gamma} h(y) F(x, y) \, \mathrm{d}s_y \right) \mathrm{d}s_x,$$

- pro danou aproximaci $\mathbf{t}^\alpha = (t_j^\alpha)_{j=1}^N$ a $i = 1, \ldots, N$ je třeba vyčíslit

$$\int_{\Gamma_i} \left(\int_{\Gamma} t^\alpha(y) G(x_i, y) \, \mathrm{d}s_y \right) \mathrm{d}s_x, \quad \text{kde} \quad t^\alpha(y) = \sum_{j=1}^{N} t_j^\alpha \psi_j(y).$$

Výpočet integrálů s jádrem G

Uvažujme integrál

$$\int_{\Gamma_i} \left(\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \, \mathrm{d}s_z \right) \mathrm{d}s_{z_0},$$

kde Γ_0 je „dost daleko“ od Γ_i.

Výpočet integrálů s jádrem G

Uvažujme integrál

$$\int_{\Gamma_i} \left(\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \,\mathrm{d}s_z \right) \mathrm{d}s_{z_0},$$

kde Γ_0 je „dost daleko“ od Γ_i.

Je-li z_L je „blízký bod“ Γ_i, dostáváme pomocí lokální expanze

$$\int_{\Gamma_i} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \,\mathrm{d}s_z \right)}_{\sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \mathrm{d}s_{z_0}$$

Výpočet integrálů s jádrem G

Uvažujme integrál

$$\int_{\Gamma_i} \left(\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \, \mathrm{d}s_z \right) \mathrm{d}s_{z_0},$$

kde Γ_0 je „dost daleko“ od Γ_i.

Je-li z_L je „blízký bod“ Γ_i, dostáváme pomocí lokální expanze

$$\int_{\Gamma_i} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \, \mathrm{d}s_z \right)}_{\sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \mathrm{d}s_{z_0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) \int_{\Gamma_i} I_\ell(z_0 - z_L) \, \mathrm{d}s_{z_0}.$$

Výpočet integrálů s jádrem G

Uvažujme integrál

$$\int_{\Gamma_i} \left(\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \, \mathrm{d}s_z \right) \mathrm{d}s_{z_0},$$

kde Γ_0 je „dost daleko“ od Γ_i.

Je-li z_L je „blízký bod“ Γ_i, dostáváme pomocí lokální expanze

$$\int_{\Gamma_i} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_0} t(z) G(z_0, z) \, \mathrm{d}s_z \right)}_{\sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) I_\ell(z_0 - z_L)} \mathrm{d}s_{z_0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(z_L) \int_{\Gamma_i} I_\ell(z_0 - z_L) \, \mathrm{d}s_{z_0}.$$

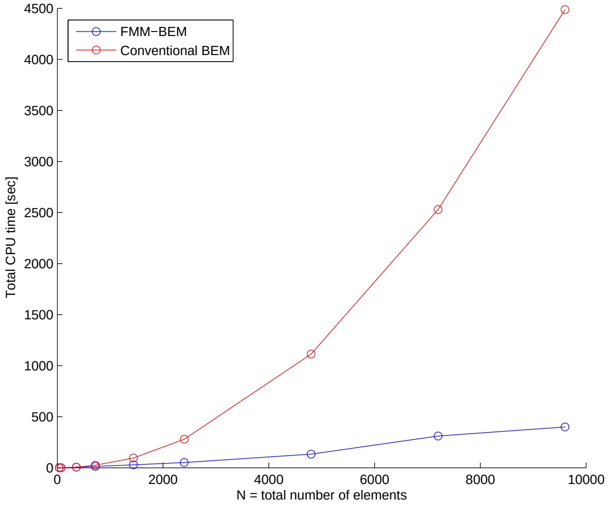
Analogický postup provedeme u integrálů s jádrem F.

Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na kruhu

- Použity po částech konst. prvky ψ_j
- Data úlohy jsou volena stejně jako pro případ kolokace s tím, že regulární integrály jsou počítány numericky Gaussovou kvadraturou s 8 body a iteračním řešičem jsou sdružené gradienty (CG)

N	$\|\mathbf{t}-\mathbf{t}_{\text{exact}}\|_V / \|\mathbf{t}_{\text{exact}}\|_V$	
	FMM-BEM	Conv. BEM
36	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$
72	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$
360	$6{,}4 \cdot 10^{-5}$	$6{,}4 \cdot 10^{-5}$
720	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$
1400	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$
2400	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$
4800	$3{,}6 \cdot 10^{-7}$	$3{,}6 \cdot 10^{-7}$
7200	$1{,}6 \cdot 10^{-7}$	$1{,}6 \cdot 10^{-7}$
9600	$8{,}9 \cdot 10^{-8}$	$8{,}9 \cdot 10^{-8}$

Numerické výsledky pro Dirichletovu úlohu na kruhu



Závěr

„Literatura“

L. Greengard, V. Rokhlin klasické práce z konce 80. let

N. Nishimura, Y. Liu, K. Yoshida FMM pro Helmholtzovu rovnici a trhliny

M. Bonnet, S. Chaillat FMM pro 3D elastodynamiku

G. Of, O. Steinbach FMM pro elastostatiku

E. Darve FMM pro Helmholtzovu a Maxwellovy rovnice