

Úvod do (klasických) Boundary Element Methods pro 2D a 3D Laplaceovu rovnici

Marie Sadowská

J357

4. 5. 2010

Literatura



Sergej Rjasanow, Olaf Steinbach

The Fast Solution of Boundary Integral Equations. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering

Springer - New York (2007)



Olaf Steinbach

Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. Finite and Boundary Elements.

Springer - New York (2008)

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\Gamma := \partial\Omega$,

$$d = 2, 3$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\Gamma := \partial\Omega$, $d = 2, 3$
- $U: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$... tzv. **fundamentální řešení** Laplaceova operátoru

$$U(x, y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\| & \text{pro } d = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|} & \text{pro } d = 3 \end{cases}$$

$$-\Delta_y U(x, y) = \delta_x(y) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}^d$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\Gamma := \partial\Omega$, $d = 2, 3$
- $U : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$... tzv. **fundamentální řešení** Laplaceova operátoru

$$U(x, y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\| & \text{pro } d = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|} & \text{pro } d = 3 \end{cases}$$

$$-\Delta_y U(x, y) = \delta_x(y) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}^d$$

- $\gamma_0 : H^1(\Omega) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... (omezený, lineární) **operátor stopy**

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\Gamma := \partial\Omega$, $d = 2, 3$
- $U : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$... tzv. **fundamentální řešení** Laplaceova operátoru

$$U(x, y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\| & \text{pro } d = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|} & \text{pro } d = 3 \end{cases}$$

$$-\Delta_y U(x, y) = \delta_x(y) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}^d$$

- $\gamma_0 : H^1(\Omega) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... (omezený, lineární) **operátor stopy**
- $\gamma_1 : H_{\Delta}^1(\Omega) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... (omezený, lineární) **operátor normálové derivace**

• $\Omega \subset \mathbb{R}^d$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\Gamma := \partial\Omega$, $d = 2, 3$

• $U : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$... tzv. **fundamentální řešení** Laplaceova operátoru

$$U(x, y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\| & \text{pro } d = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|} & \text{pro } d = 3 \end{cases}$$

$$-\Delta_y U(x, y) = \delta_x(y) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}^d$$

• $\gamma_0 : H^1(\Omega) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... (omezený, lineární) **operátor stopy**

• $\gamma_1 : H_{\Delta}^1(\Omega) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... (omezený, lineární) **operátor normálové derivace**

Věta o reprezentaci

Pro každou funkci $u \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ platí:

$$u(x) = \int_{\Omega} -\Delta u(x) U(x, y) dy + \int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x, y) ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) ds_y, \quad (*)$$

$x \in \Omega$.

► Dirichlet interior

► Neumann interior

► mixed interior

Všimněme si: $\gamma_{1,y}U(x,y) = \frac{1}{2(d-1)\pi} \frac{(x-y, \underline{n}(y))}{\|x-y\|^d}$

Všimněme si: $\gamma_{1,y}U(x,y) = \frac{1}{2(d-1)\pi} \frac{(x-y, \underline{n}(y))}{\|x-y\|^d}$

Bud' $u \in H^1(\Omega)$ řešením Laplaceovy rovnice v Ω , tj. $\Delta u = 0$ v Ω , pak (z (*)):

$$u(x) = \underbrace{\int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x,y) ds_y}_{\text{potenciál jednoduché vrstvy}} - \underbrace{\int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x,y) ds_y}_{\text{potenciál dvojvrstvy}}, \quad x \in \Omega. \quad (**)$$

Všimněme si: $\gamma_{1,y}U(x,y) = \frac{1}{2(d-1)\pi} \frac{(x-y, \underline{n}(y))}{\|x-y\|^d}$

Bud' $u \in H^1(\Omega)$ řešením Laplaceovy rovnice v Ω , tj. $\Delta u = 0$ v Ω , pak (z (*)):

$$u(x) = \underbrace{\int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x,y) ds_y}_{\text{potenciál jednoduché vrstvy}} - \underbrace{\int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x,y) ds_y}_{\text{potenciál dvojvrstvy}}, \quad x \in \Omega. \quad (**)$$

Aplikujme operátor stopy na výše uvedenou rovnici (**):

$$\gamma_0 u(x) = \underbrace{\int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x,y) ds_y}_{\text{operátor jednoduché vrstvy}} + \frac{1}{2} \gamma_0 u(x) - \underbrace{\int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x,y) ds_y}_{\text{operátor dvojvrstvy}}, \quad x \in \Gamma.$$

$$(V\gamma_1 u)(x) \qquad (K\gamma_0 u)(x)$$

- $V : H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický
... eliptický (pro $d = 2$ jen pokud $\text{diam } \Omega < 1!$)

- $V : H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický
... eliptický (pro $d = 2$ jen pokud $\text{diam } \Omega < 1!$)
- $K : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární

- $V : H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický
... eliptický (pro $d = 2$ jen pokud $\text{diam } \Omega < 1!$)
- $K : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární

Získali jsme tedy tzv. 1. hraniční integrální rovnici

$$\gamma_0 u = \left(\frac{1}{2}I - K\right)\gamma_0 u + V\gamma_1 u \quad \text{na } \Gamma$$

- $V : H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický
... eliptický (pro $d = 2$ jen pokud $\text{diam } \Omega < 1!$)
- $K : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární

Získali jsme tedy tzv. 1. hraniční integrální rovnici

$$\gamma_0 u = \left(\frac{1}{2} I - K \right) \gamma_0 u + V \gamma_1 u \quad \text{na } \Gamma$$

Aplikujme nyní operátor normálové derivace na vztah (**):

$$\gamma_1 u(x) = \frac{1}{2} \gamma_1 u(x) + \underbrace{\int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) \gamma_{1,x} U(x, y) \, ds_y}_{\text{adjungovaný operátor dvojvrstvy}} - \underbrace{\gamma_1 \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) \, ds_y}_{\text{hypersingulární operátor}}, \quad x \in \Gamma.$$

$$(K' \gamma_1 u)(x) \qquad (D \gamma_0 u)(x)$$

- $K' : H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární

- $K' : H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární
- $D : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický, semi-eliptický

- $K' : H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární
- $D : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický, semi-eliptický

Získali jsme tedy tzv. **2. hraniční integrální rovnici**

$$\gamma_1 u = D\gamma_0 u + \left(\frac{1}{2}I + K'\right)\gamma_1 u \quad \text{na } \Gamma$$

- $K' : H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární
- $D : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický, semi-eliptický

Získali jsme tedy tzv. **2. hraniční integrální rovnici**

$$\gamma_1 u = D\gamma_0 u + \left(\frac{1}{2}I + K'\right)\gamma_1 u \quad \text{na } \Gamma$$

Dále platí:

- $VK' = KV$
- $VD = \left(\frac{1}{2}I - K\right)\left(\frac{1}{2}I + K\right)$
- $\text{Ker } D = \text{Ker} \left(\frac{1}{2}I + K\right) = \text{Lin}\{1\}$

Už víme, že pro funkci $u \in H^1(\Omega)$, která řeší Laplaceovu rovnici v Ω , platí

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} \quad \text{na } \Gamma.$$

Už víme, že pro funkci $u \in H^1(\Omega)$, která řeší Laplaceovu rovnici v Ω , platí

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} \quad \text{na } \Gamma.$$

Pro $d = 2$ nyní předpokládejme, že $\text{diam } \Omega < 1$.

Už víme, že pro funkci $u \in H^1(\Omega)$, která řeší Laplaceovu rovnici v Ω , platí

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} \quad \text{na } \Gamma.$$

Pro $d = 2$ nyní předpokládejme, že $\text{diam } \Omega < 1$.

Z 1. h.i.r. dostaneme

$$\gamma_1 u = \underbrace{V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right)}_{\text{S}} \gamma_0 u \quad \text{na } \Gamma. \quad (\square)$$

Už víme, že pro funkci $u \in H^1(\Omega)$, která řeší Laplaceovu rovnici v Ω , platí

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} \quad \text{na } \Gamma.$$

Pro $d = 2$ nyní předpokládáme, že $\text{diam } \Omega < 1$.

Z 1. h.i.r. dostaneme

$$\gamma_1 u = \underbrace{V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right)}_{\substack{\text{Steklov-Poincaré operátor} \\ S}} \gamma_0 u \quad \text{na } \Gamma. \quad (\square)$$

Dosazením (\square) do 2. h.i.r. získáme

$$\gamma_1 u = \underbrace{\left[D + \left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) \right]}_{\substack{\text{symetrická reprezentace S-P operátoru} \\ S}} \gamma_0 u \quad \text{na } \Gamma.$$

Steklov-Poincaré operátor \equiv „Dirichlet-Neumann map“

$$\left. \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega) \\ \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_1 u = S \gamma_0 u \quad \text{na } \Gamma$$

$$S := V^{-1}(\frac{1}{2}I + K) = D + (\frac{1}{2}I + K')V^{-1}(\frac{1}{2}I + K)$$

Steklov-Poincaré operátor \equiv „Dirichlet-Neumann map“

$$\left. \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega) \\ \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_1 u = S \gamma_0 u \quad \text{na } \Gamma$$

$$S := V^{-1}(\frac{1}{2}I + K) = D + (\frac{1}{2}I + K')V^{-1}(\frac{1}{2}I + K)$$

- $S : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický, semi-eliptický
... $H_0^{1/2}(\Gamma, \Gamma_D)$ -eliptický pro $\Gamma_D \subset \Gamma$ nenulové míry

Steklov-Poincaré operátor \equiv „Dirichlet-Neumann map“

$$\left. \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega) \\ \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_1 u = S \gamma_0 u \quad \text{na } \Gamma$$

$$S := V^{-1}(\frac{1}{2}I + K) = D + (\frac{1}{2}I + K')V^{-1}(\frac{1}{2}I + K)$$

- $S : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický, semi-eliptický
... $H_0^{1/2}(\Gamma, \Gamma_D)$ -eliptický pro $\Gamma_D \subset \Gamma$ nenulové míry
- $\text{Ker } S = \text{Lin} \{1\}$

Vnitřní Dirichletova úloha

$$\begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega \\ \gamma_0 u = g \quad \text{na } \Gamma, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \end{array} \quad (\text{DI})$$

Vnitřní Dirichletova úloha

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega \\ \gamma_0 u = g \quad \text{na } \Gamma, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \end{array}} \quad (\text{DI})$$

Z věty o reprezentaci: (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x, y) \, ds_y - \int_{\Gamma} g(y) \gamma_{1,y} U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega.$$

Vnitřní Dirichletova úloha

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega \\ \gamma_0 u = g \quad \text{na } \Gamma, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \end{array}} \quad (\text{DI})$$

Z věty o reprezentaci: ◀ (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x, y) \, ds_y - \int_{\Gamma} g(y) \gamma_{1,y} U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega.$$

$$t := \gamma_1 u = ?? \quad \text{na } \Gamma$$

Vnitřní Dirichletova úloha

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega \\ \gamma_0 u = g \quad \text{na } \Gamma, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \end{array}} \quad (\text{DI})$$

Z věty o reprezentaci: ← (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x, y) \, ds_y - \int_{\Gamma} g(y) \gamma_{1,y} U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega.$$

$$t := \gamma_1 u = ?? \quad \text{na } \Gamma$$

Z 1. h.i.r.:

$$\forall t = \left(\frac{1}{2}I + K\right)g \quad \text{na } \Gamma.$$

Vnitřní Dirichletova úloha

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{v } \Omega \\ \gamma_0 u = g & \text{na } \Gamma, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \end{cases} \quad (\text{DI})$$

Z věty o reprezentaci: (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x, y) \, ds_y - \int_{\Gamma} g(y) \gamma_{1,y} U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega.$$

$$t := \gamma_1 u = ?? \quad \text{na } \Gamma$$

Z 1. h.i.r.:

$$\forall t = \left(\frac{1}{2}I + K\right)g \quad \text{na } \Gamma.$$

Hraniční variační formulace úlohy (DI) zní: najdi $t \in H^{-1/2}(\Gamma)$ takové, že

$$\langle \forall t, v \rangle_{\Gamma} = \langle \left(\frac{1}{2}I + K\right)g, v \rangle_{\Gamma} \quad \forall v \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (\text{VDI})$$

Pro přibližné řešení (VDI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$t \approx \sum_{i=1}^N t_i \psi_i, \quad g \approx \sum_{i=1}^M g_i \varphi_i,$$

kde

- ψ_i ... po částech **konstantní** hraniční prvky,
- φ_i ... (spojité) po částech **lineární** hraniční prvky.

Pro přibližné řešení (VDI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\mathbf{t} \approx \sum_{i=1}^N t_i \psi_i, \quad \mathbf{g} \approx \sum_{i=1}^M g_i \varphi_i,$$

kde

- ψ_i ... po částech **konstantní** hraniční prvky,
- φ_i ... (spojité) po částech **lineární** hraniční prvky.

To vede na soustavu

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h \right) \mathbf{g},$$

Pro přibližné řešení (VDI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\mathbf{t} \approx \sum_{i=1}^N t_i \psi_i, \quad \mathbf{g} \approx \sum_{i=1}^M g_i \varphi_i,$$

kde

- ψ_i ... po částech **konstantní** hraniční prvky,
- φ_i ... (spojité) po částech **lineární** hraniční prvky.

To vede na soustavu

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h \right) \mathbf{g},$$

kde

- $V_h[i, j] := \langle V \psi_j, \psi_i \rangle_\Gamma$, $M_h[i, j] := \langle \varphi_j, \psi_i \rangle_\Gamma$, $K_h[i, j] := \langle K \varphi_j, \psi_i \rangle_\Gamma$

Pro přibližné řešení (VDI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\mathbf{t} \approx \sum_{i=1}^N t_i \psi_i, \quad \mathbf{g} \approx \sum_{i=1}^M g_i \varphi_i,$$

kde

- ψ_i ... po částech **konstantní** hraniční prvky,
- φ_i ... (spojité) po částech **lineární** hraniční prvky.

To vede na soustavu

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h \right) \mathbf{g},$$

kde

- $\mathbf{V}_h[i, j] := \langle V \psi_j, \psi_i \rangle_{\Gamma}$, $\mathbf{M}_h[i, j] := \langle \varphi_j, \psi_i \rangle_{\Gamma}$, $\mathbf{K}_h[i, j] := \langle K \varphi_j, \psi_i \rangle_{\Gamma}$
- $\mathbf{g}[i] := g_i$

Pro přibližné řešení (VDI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\mathbf{t} \approx \sum_{i=1}^N t_i \psi_i, \quad \mathbf{g} \approx \sum_{i=1}^M g_i \varphi_i,$$

kde

- ψ_i ... po částech **konstantní** hraniční prvky,
- φ_i ... (spojité) po částech **lineární** hraniční prvky.

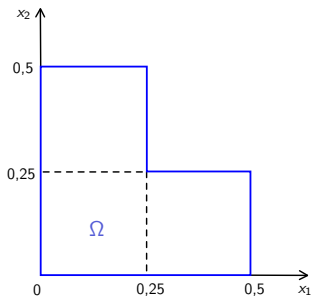
To vede na soustavu

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h \right) \mathbf{g},$$

kde

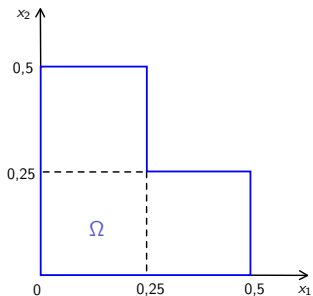
- $\mathbf{V}_h[i, j] := \langle V \psi_j, \psi_i \rangle_\Gamma$, $\mathbf{M}_h[i, j] := \langle \varphi_j, \psi_i \rangle_\Gamma$, $\mathbf{K}_h[i, j] := \langle K \varphi_j, \psi_i \rangle_\Gamma$
- $\mathbf{g}[i] := g_i$
- \mathbf{V}_h ... SPD matice, $\left(\frac{1}{2} \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h \right) \mathbf{1} = \mathbf{0}$

Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (1)

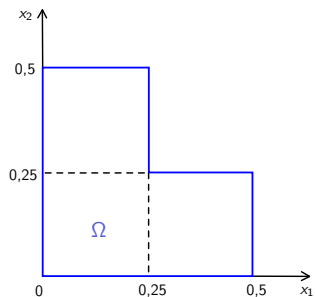


Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (1)

- $g(x) := x_1^2 - x_2^2$

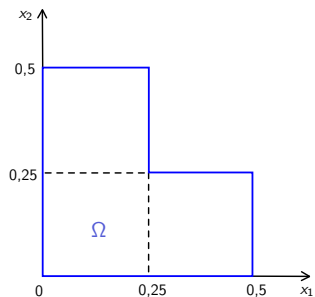


Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (1)



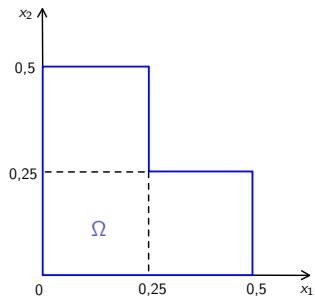
- $g(x) := x_1^2 - x_2^2$
- $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$

Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (1)

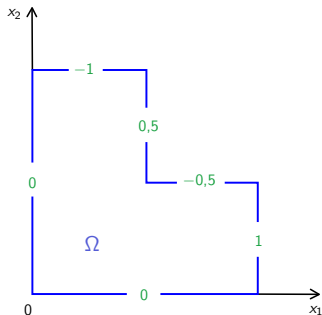


- $g(x) := x_1^2 - x_2^2$
- $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$
- $t_{ex}(x) = \gamma_1 u_{ex}(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x))$

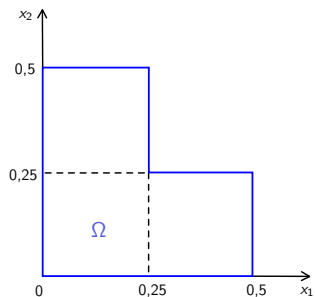
Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (1)



- $g(x) := x_1^2 - x_2^2$
- $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$
- $t_{ex}(x) = \gamma_1 u_{ex}(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x))$



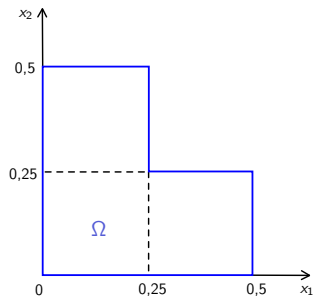
Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (1)



- $g(x) := x_1^2 - x_2^2$
- $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$
- $t_{ex}(x) = \gamma_1 u_{ex}(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x))$

- přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)

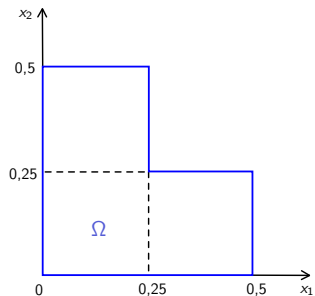
Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (1)



- $g(x) := x_1^2 - x_2^2$
- $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$
- $t_{ex}(x) = \gamma_1 u_{ex}(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x))$

- přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)
- Gaussova kvadratura s 8 uzly

Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (1)



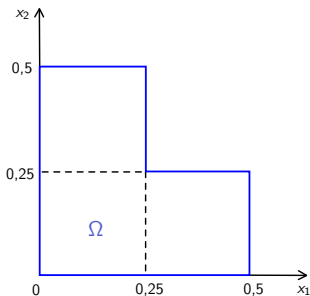
- $g(x) := x_1^2 - x_2^2$
- $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$
- $t_{ex}(x) = \gamma_1 u_{ex}(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x))$

- přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)
- Gaussova kvadratura s 8 uzly

- $err(\mathbf{t}, \mathbf{t}_{ex}, V_h) := \frac{\|\mathbf{t} - \mathbf{t}_{ex}\|_{V_h}}{\|\mathbf{t}_{ex}\|_{V_h}}$

Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (1)

- $g(x) := x_1^2 - x_2^2$
- $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$
- $t_{ex}(x) = \gamma_1 u_{ex}(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x))$



- přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)
- Gaussova kvadratura s 8 uzly
- $err(\mathbf{t}, \mathbf{t}_{ex}, V_h) := \frac{\|\mathbf{t} - \mathbf{t}_{ex}\|_{V_h}}{\|\mathbf{t}_{ex}\|_{V_h}}$

$N = M$	$err(\mathbf{t}, \mathbf{t}_{ex}, V_h)$
16	$6,8 \cdot 10^{-2}$
32	$1,9 \cdot 10^{-2}$
64	$5,3 \cdot 10^{-3}$
128	$1,4 \cdot 10^{-3}$
256	$3,8 \cdot 10^{-4}$
512	$1 \cdot 10^{-4}$
1024	$2,7 \cdot 10^{-5}$

Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (2)

Dopočtení řešení uvnitř Ω

Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (2)

Dopočtení řešení uvnitř Ω

- Oba potenciály v reprezentační větě vyčísleny analyticky

Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (2)

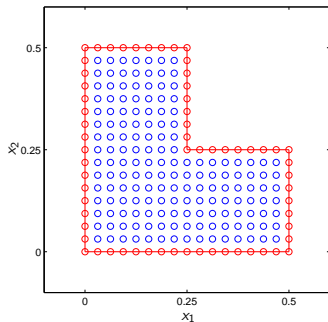
Dopočtení řešení uvnitř Ω

- Oba potenciály v reprezentační větě vyčísleny analyticky
- Vnitřní uzly voleny v pravidelné síti

Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (2)

Dopočtení řešení uvnitř Ω

- Oba potenciály v reprezentující větě vyčísleny analyticky
- Vnitřní uzly voleny v pravidelné síti



$N = M = 64$ a 161 vnitřních uzlů

Numerické výsledky pro vnitřní Dirichletovu úlohu (2)

Dopočtení řešení uvnitř Ω

- Oba potenciály v reprezentační větě vyčísleny analyticky
- Vnitřní uzly voleny v pravidelné síti

$N = M$	počet vnitřních uzlů	$\frac{\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{ex}\ }{\ \mathbf{u}_{ex}\ }$
16	5	$1,2 \cdot 10^{-2}$
32	33	$3 \cdot 10^{-3}$
64	161	$7,8 \cdot 10^{-4}$
128	705	$2 \cdot 10^{-4}$
256	2945	$5,2 \cdot 10^{-5}$
512	12033	$1,3 \cdot 10^{-5}$
1024	48641	$3,3 \cdot 10^{-6}$

Vnitřní Neumannova úloha

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{v } \Omega \\ \gamma_1 u &= h && \text{na } \Gamma, \quad h \in L^2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} h(y) \, ds_y = 0 \end{aligned} \quad (\text{NI})$$

Vnitřní Neumannova úloha

$$\begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega \\ \gamma_1 u = h \quad \text{na } \Gamma, \quad h \in L^2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} h(y) ds_y = 0 \end{array} \quad (\text{NI})$$

Řešení (NI) je jednoznačné až na aditivní konstantu.

Vnitřní Neumannova úloha

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{v } \Omega \\ \gamma_1 u &= h \quad \text{na } \Gamma, \quad h \in L^2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} h(y) \, ds_y = 0 \end{aligned} \quad (\text{NI})$$

Řešení (NI) je jednoznačné až na aditivní konstantu.

Z věty o reprezentaci:

◀ (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} h(y) U(x, y) \, ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega.$$

Vnitřní Neumannova úloha

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{v } \Omega \\ \gamma_1 u &= h && \text{na } \Gamma, \quad h \in L^2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} h(y) \, ds_y = 0 \end{aligned} \quad (\text{NI})$$

Řešení (NI) je jednoznačné až na aditivní konstantu.

Z věty o reprezentaci:

◀ (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} h(y) U(x, y) \, ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega.$$

$$\bar{u} := \gamma_0 u = ?? \quad \text{na } \Gamma$$

Vnitřní Neumannova úloha

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{v } \Omega \\ \gamma_1 u &= h & \text{na } \Gamma, \quad h \in L^2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} h(y) \, ds_y = 0 \end{aligned} \quad (\text{NI})$$

Řešení (NI) je jednoznačné až na aditivní konstantu.

Z věty o reprezentaci:

◀ (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} h(y) U(x, y) \, ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega.$$

$$\bar{u} := \gamma_0 u = ?? \quad \text{na } \Gamma$$

Z 2. h.i.r.:

$$D\bar{u} = \left(\frac{1}{2}I - K'\right)h \quad \text{na } \Gamma. \quad (\bullet)$$

Vnitřní Neumannova úloha

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{v } \Omega \\ \gamma_1 u = h & \text{na } \Gamma, \quad h \in L^2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} h(y) \, ds_y = 0 \end{cases} \quad (\text{NI})$$

Řešení (NI) je jednoznačné až na aditivní konstantu.

Z věty o reprezentaci:

◀ (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} h(y) U(x, y) \, ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega.$$

$$\bar{u} := \gamma_0 u = ?? \quad \text{na } \Gamma$$

Z 2. h.i.r.:

$$D\bar{u} = \left(\frac{1}{2}I - K'\right)h \quad \text{na } \Gamma. \quad (\bullet)$$

Připomeňme si: $\text{Ker} D = \text{Lin} \{1\}$.

$$D\bar{u} = \left(\frac{1}{2}I - K'\right)h \quad \text{na } \Gamma \quad (\bullet)$$

Obecné řešení (\bullet) lze psát ve tvaru

$$\bar{u}^c := \bar{u} + c \cdot \mathbf{1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$D\bar{u} = \left(\frac{1}{2}I - K'\right)h \quad \text{na } \Gamma \quad (\bullet)$$

Obecné řešení (\bullet) lze psát ve tvaru

$$\bar{u}^c := \bar{u} + c \cdot 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Abychom zafixovali c , předepíšeme tzv. **škálovací podmínku** :

$$\langle \bar{u}^c, 1 \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \bar{u}^c(y) ds_y = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ (dáno lib. pevně).}$$

$$D\bar{u} = \left(\frac{1}{2}I - K'\right)h \quad \text{na } \Gamma \quad (\bullet)$$

Obecné řešení (\bullet) lze psát ve tvaru

$$\bar{u}^c := \bar{u} + c \cdot 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Abychom zafixovali c , předepíšeme tzv. **škálovací podmínku** :

$$\langle \bar{u}^c, 1 \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \bar{u}^c(y) ds_y = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ (dáno lib. pevně).}$$

Hraniční variační formulace úlohy (NI) zní: najdi $\bar{u}^c \in H^{1/2}(\Gamma)$ takové, že

$$\langle D\bar{u}^c, v \rangle_{\Gamma} + \langle \bar{u}^c, 1 \rangle_{\Gamma} \langle v, 1 \rangle_{\Gamma} = \langle \left(\frac{1}{2}I - K'\right)h, v \rangle_{\Gamma} + \alpha \langle v, 1 \rangle_{\Gamma} \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (\text{VNI})$$

$\langle \bar{u}^c, 1 \rangle_{\Gamma} \langle v, 1 \rangle_{\Gamma}$... regularizační člen

Pro přibližné řešení (VNI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\bar{u}^c \approx \sum_{i=1}^M \bar{u}_i^c \varphi_i, \quad h \approx \sum_{i=1}^N h_i \psi_i,$$

což vede na soustavu

$$\boxed{(D_h + R_h) \bar{\mathbf{u}}^c = \left(\frac{1}{2}M_h - K_h\right)^T \mathbf{h} + \alpha \mathbf{v}_h,}$$

Pro přibližné řešení (VNI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\bar{u}^c \approx \sum_{i=1}^M \bar{u}_i^c \varphi_i, \quad h \approx \sum_{i=1}^N h_i \psi_i,$$

což vede na soustavu

$$(D_h + R_h) \bar{\mathbf{u}}^c = \left(\frac{1}{2} M_h - K_h\right)^T \mathbf{h} + \alpha \mathbf{v}_h,$$

kde

- $D_h[i, j] := \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma, \quad R_h[i, j] := \langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma \langle \varphi_j, 1 \rangle_\Gamma$

Pro přibližné řešení (VNI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\bar{u}^c \approx \sum_{i=1}^M \bar{u}_i^c \varphi_i, \quad h \approx \sum_{i=1}^N h_i \psi_i,$$

což vede na soustavu

$$(D_h + R_h) \bar{\mathbf{u}}^c = \left(\frac{1}{2}M_h - K_h\right)^\top \mathbf{h} + \alpha \mathbf{v}_h,$$

kde

- $D_h[i, j] := \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma$, $R_h[i, j] := \langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma \langle \varphi_j, 1 \rangle_\Gamma$
- $\mathbf{h}[i] := h_i$, $\mathbf{v}_h[i] := \langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma$

Pro přibližné řešení (VNI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\bar{u}^c \approx \sum_{i=1}^M \bar{u}_i^c \varphi_i, \quad h \approx \sum_{i=1}^N h_i \psi_i,$$

což vede na soustavu

$$(D_h + R_h) \bar{\mathbf{u}}^c = \left(\frac{1}{2}M_h - K_h\right)^\top \mathbf{h} + \alpha \mathbf{v}_h,$$

kde

- $D_h[i, j] := \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma$, $R_h[i, j] := \langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma \langle \varphi_j, 1 \rangle_\Gamma$
- $\mathbf{h}[i] := h_i$, $\mathbf{v}_h[i] := \langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma$
- D_h ... SPSD matice, $D_h \mathbf{1} = \mathbf{0}$

Pro přibližné řešení (VNI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\bar{u}^c \approx \sum_{i=1}^M \bar{u}_i^c \varphi_i, \quad h \approx \sum_{i=1}^N h_i \psi_i,$$

což vede na soustavu

$$(D_h + R_h) \bar{\mathbf{u}}^c = \left(\frac{1}{2}M_h - K_h\right)^\top \mathbf{h} + \alpha \mathbf{v}_h,$$

kde

- $D_h[i, j] := \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma$, $R_h[i, j] := \langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma \langle \varphi_j, 1 \rangle_\Gamma$
- $\mathbf{h}[i] := h_i$, $\mathbf{v}_h[i] := \langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma$
- D_h ... SPSD matice, $D_h \mathbf{1} = \mathbf{0}$
- $D_h + R_h$... SPD matice

Pro přibližné řešení (VNI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\bar{u}^c \approx \sum_{i=1}^M \bar{u}_i^c \varphi_i, \quad h \approx \sum_{i=1}^N h_i \psi_i,$$

což vede na soustavu

$$(D_h + R_h) \bar{\mathbf{u}}^c = \left(\frac{1}{2}M_h - K_h\right)^\top \mathbf{h} + \alpha \mathbf{v}_h,$$

kde

- $D_h[i, j] := \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma$, $R_h[i, j] := \langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma \langle \varphi_j, 1 \rangle_\Gamma$
- $\mathbf{h}[i] := h_i$, $\mathbf{v}_h[i] := \langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma$
- D_h ... SPSD matice, $D_h \mathbf{1} = \mathbf{0}$
- $D_h + R_h$... SPD matice
- $D_h = T_h^\top V_h T_h$, kde T_h je vhodná řádká transformační matice

Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (1)

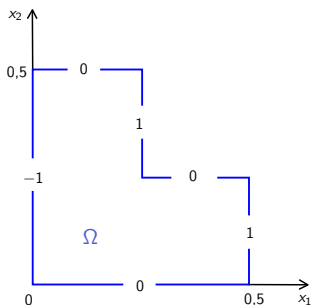
- Zvolme 2D L-shape oblast jako u vnitřní Dirichletovy úlohy

Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (1)

- Zvolme 2D L-shape oblast jako u vnitřní Dirichletovy úlohy
- Pro uniformní dělení Γ s délkou elementu h máme $\langle \varphi_i, 1 \rangle_{\Gamma} = h$, tj. $R_h = h^2 1$

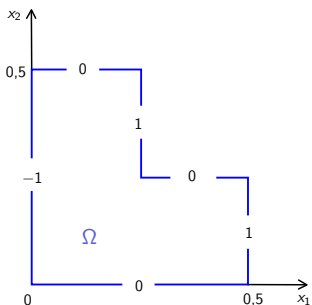
Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (1)

- Zvolme 2D L-shape oblast jako u vnitřní Dirichletovy úlohy
- Pro uniformní dělení Γ s délkou elementu h máme $\langle \varphi_i, 1 \rangle_{\Gamma} = h$, tj. $R_h = h^2$
- Předepsaná Neumannova stopa h :



Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (1)

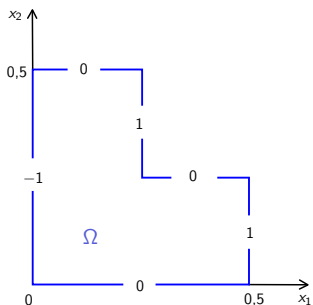
- Zvolme 2D L-shape oblast jako u vnitřní Dirichletovy úlohy
- Pro uniformní dělení Γ s délkou elementu h máme $\langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma = h$, tj. $R_h = h^2 1$
- Předepsaná Neumannova stopa h :



- $\bar{u}_{ex}(x) := x_1$

Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (1)

- Zvolme 2D L-shape oblast jako u vnitřní Dirichletovy úlohy
- Pro uniformní dělení Γ s délkou elementu h máme $\langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma = h$, tj. $R_h = h^2 1$
- Předepsaná Neumannova stopa h :

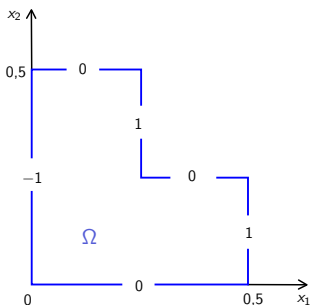


- $\bar{u}_{ex}(x) := x_1$

- $\bar{u}_{ex}^c(x) = \bar{u}_{ex}(x) + c$

Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (1)

- Zvolme 2D L-shape oblast jako u vnitřní Dirichletovy úlohy
- Pro uniformní dělení Γ s délkou elementu h máme $\langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma = h$, tj. $R_h = h^2$
- Předepsaná Neumannova stopa h :



- $\bar{u}_{ex}(x) := x_1$

- $\bar{u}_{ex}^c(x) = \bar{u}_{ex}(x) + c$

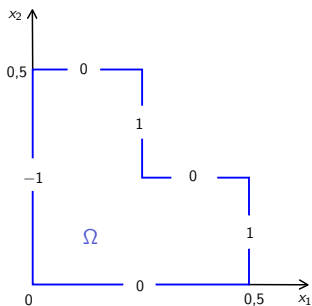
- $\alpha := 0$

tj. $\langle c, 1 \rangle_\Gamma = -\langle x_1, 1 \rangle_\Gamma$

tj. $c = -\frac{1}{2} \int_\Gamma x_1 ds_x = -\frac{7}{32}$

Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (1)

- Zvolme 2D L-shape oblast jako u vnitřní Dirichletovy úlohy
- Pro uniformní dělení Γ s délkou elementu h máme $\langle \varphi_i, 1 \rangle_\Gamma = h$, tj. $R_h = h^2$
- Předepsaná Neumannova stopa h :



- $\bar{u}_{ex}(x) := x_1$
- $\bar{u}_{ex}^c(x) = \bar{u}_{ex}(x) + c$
- $\alpha := 0$
tj. $\langle c, 1 \rangle_\Gamma = -\langle x_1, 1 \rangle_\Gamma$
tj. $c = -\frac{1}{2} \int_\Gamma x_1 ds_x = -\frac{7}{32}$
- $\bar{u}_{ex}^c(x) = x_1 - \frac{7}{32}$

Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (2)

- přímý řešič (Ize i CG, PCG, ...)

Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (2)

- přímý řešič (Ize i CG, PCG, ...)
- Gaussova kvadratura s 8 uzly

Numerické výsledky pro vnitřní Neumannovu úlohu (2)

- přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)
- Gaussova kvadratura s 8 uzly

$N = M$	$err(\bar{\mathbf{u}}^c, \bar{\mathbf{u}}_{ex}^c, D_h + R_h)$
16	$6,3 \cdot 10^{-13}$
32	$1,5 \cdot 10^{-12}$
64	$1,6 \cdot 10^{-12}$
128	$1,3 \cdot 10^{-12}$
256	$9,7 \cdot 10^{-13}$
512	$6,5 \cdot 10^{-13}$
1024	$4,2 \cdot 10^{-13}$

Vnitřní smíšená úloha

$\Gamma_D, \Gamma_N \dots$ nepřekrývající se úseky tvořící rozklad Γ

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega$$

$$\gamma_0 u = g \quad \text{na } \Gamma_D, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$$

$$\gamma_1 u = h \quad \text{na } \Gamma_N, \quad h \in L^2(\Gamma_N)$$

(M1)

Vnitřní smíšená úloha

$\Gamma_D, \Gamma_N \dots$ nepřekrývající se úseky tvořící rozklad Γ

$$\begin{array}{l}
 \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega \\
 \gamma_0 u = g \quad \text{na } \Gamma_D, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma_D) \\
 \gamma_1 u = h \quad \text{na } \Gamma_N, \quad h \in L^2(\Gamma_N)
 \end{array} \quad (\text{MI})$$

Z věty o reprezentaci: (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x, y) ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega, \text{ tj.}$$

Vnitřní smíšená úloha

$\Gamma_D, \Gamma_N \dots$ nepřekrývající se úseky tvořící rozklad Γ

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{v } \Omega \\ \gamma_0 u = g & \text{na } \Gamma_D, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma_D) \\ \gamma_1 u = h & \text{na } \Gamma_N, \quad h \in L^2(\Gamma_N) \end{cases} \quad (\text{MI})$$

Z věty o reprezentaci: (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x, y) ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega, \text{ tj.}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Gamma_D} \gamma_1 u(y) U(x, y) ds_y + \int_{\Gamma_N} h(y) U(x, y) ds_y - \\ &\quad - \int_{\Gamma_D} g(y) \gamma_{1,y} U(x, y) ds_y - \int_{\Gamma_N} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

Vnitřní smíšená úloha

$\Gamma_D, \Gamma_N \dots$ nepřekrývající se úseky tvořící rozklad Γ

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{v } \Omega \\ \gamma_0 u = g & \text{na } \Gamma_D, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma_D) \\ \gamma_1 u = h & \text{na } \Gamma_N, \quad h \in L^2(\Gamma_N) \end{cases} \quad (\text{MI})$$

Z věty o reprezentaci: (*)

$$u(x) = \int_{\Gamma} \gamma_1 u(y) U(x, y) ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega, \text{ tj.}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Gamma_D} \gamma_1 u(y) U(x, y) ds_y + \int_{\Gamma_N} h(y) U(x, y) ds_y - \\ &\quad - \int_{\Gamma_D} g(y) \gamma_{1,y} U(x, y) ds_y - \int_{\Gamma_N} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

$$t := \gamma_1 u = ?? \quad \text{na } \Gamma_D \quad \text{a} \quad \bar{u} := \gamma_0 u = ?? \quad \text{na } \Gamma_N$$

Steklov-Poincaré operátor:

$$S\bar{u} = t \quad \text{na } \Gamma$$

Steklov-Poincaré operátor:

$$S\bar{u} = t \quad \text{na } \Gamma$$

Hraniční variační formulace úlohy (MI) zní: najdi $\bar{u} \in H^{1/2}(\Gamma)$ takové, že

$$\bar{u} = g \text{ na } \Gamma_D \quad \text{a} \quad \boxed{\langle S\bar{u}, v \rangle_{\Gamma} = \langle h, v \rangle_{\Gamma_N} \quad \forall v \in H_0^{1/2}(\Gamma, \Gamma_D)} \quad (\text{VMI})$$

$$H_0^{1/2}(\Gamma, \Gamma_D) := \{v \in H^{1/2}(\Gamma) : v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}.$$

Steklov-Poincaré operátor:

$$S\bar{u} = t \quad \text{na } \Gamma$$

Hraniční variační formulace úlohy (MI) zní: najdi $\bar{u} \in H^{1/2}(\Gamma)$ takové, že

$$\bar{u} = g \text{ na } \Gamma_D \quad \text{a} \quad \boxed{\langle S\bar{u}, v \rangle_{\Gamma} = \langle h, v \rangle_{\Gamma_N} \quad \forall v \in H_0^{1/2}(\Gamma, \Gamma_D)} \quad (\text{VMI})$$

$$H_0^{1/2}(\Gamma, \Gamma_D) := \{v \in H^{1/2}(\Gamma) : v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}.$$

Buď dále \hat{h} nulové rozšíření h na Γ , tj.

$$\hat{h} = h \quad \text{na } \Gamma_N \quad \text{a} \quad \hat{h} = 0 \quad \text{na } \Gamma_D.$$

Steklov-Poincaré operátor:

$$S\bar{u} = t \quad \text{na } \Gamma$$

Hraniční variační formulace úlohy (MI) zní: najdi $\bar{u} \in H^{1/2}(\Gamma)$ takové, že

$$\bar{u} = g \text{ na } \Gamma_D \quad \text{a} \quad \boxed{\langle S\bar{u}, v \rangle_\Gamma = \langle h, v \rangle_{\Gamma_N} \quad \forall v \in H_0^{1/2}(\Gamma, \Gamma_D)} \quad (\text{VMI})$$

$$H_0^{1/2}(\Gamma, \Gamma_D) := \{v \in H^{1/2}(\Gamma) : v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}.$$

Buď dále \hat{h} nulové rozšíření h na Γ , tj.

$$\hat{h} = h \quad \text{na } \Gamma_N \quad \text{a} \quad \hat{h} = 0 \quad \text{na } \Gamma_D.$$

Pro přibližné řešení (VMI) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\bar{u} \approx \sum_{i=1}^M \bar{u}_i \varphi_i, \quad \hat{h} \approx \sum_{i=1}^N \hat{h}_i \psi_i, \quad g \approx \sum_{i=1}^M g_i \varphi_i.$$

To vede na řešení soustavy

$$S_h \bar{\mathbf{u}} = M_h^T \hat{\mathbf{h}} \quad \text{s omezením} \quad B_D \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{g},$$

To vede na řešení soustavy

$$S_h \bar{\mathbf{u}} = M_h^T \hat{\mathbf{h}} \quad \text{s omezením} \quad B_D \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{g},$$

kde

- $S_h[i, j] := \langle S\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma, \quad S_h = D_h + \left(\frac{1}{2}M_h + K_h\right)^T V_h^{-1} \left(\frac{1}{2}M_h + K_h\right)$

To vede na řešení soustavy

$$S_h \bar{\mathbf{u}} = M_h^T \hat{\mathbf{h}} \quad \text{s omezením} \quad B_D \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{g},$$

kde

- $S_h[i, j] := \langle S\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma$, $S_h = D_h + (\frac{1}{2}M_h + K_h)^T V_h^{-1} (\frac{1}{2}M_h + K_h)$
- $\hat{\mathbf{h}}[i] := \hat{h}_i$

To vede na řešení soustavy

$$S_h \bar{\mathbf{u}} = M_h^T \hat{\mathbf{h}} \quad \text{s omezením} \quad B_D \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{g},$$

kde

- $S_h[i, j] := \langle S\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma$, $S_h = D_h + (\frac{1}{2}M_h + K_h)^T V_h^{-1} (\frac{1}{2}M_h + K_h)$
- $\hat{\mathbf{h}}[i] := \hat{h}_i$
- $B_D[i, j] \in \{0, 1\}$, $\mathbf{g}[i] := g_i$

To vede na řešení soustavy

$$S_h \bar{\mathbf{u}} = M_h^T \hat{\mathbf{h}} \quad \text{s omezením} \quad B_D \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{g},$$

kde

- $S_h[i, j] := \langle S\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma$, $S_h = D_h + (\frac{1}{2}M_h + K_h)^T V_h^{-1} (\frac{1}{2}M_h + K_h)$
- $\hat{\mathbf{h}}[i] := \hat{h}_i$
- $B_D[i, j] \in \{0, 1\}$, $\mathbf{g}[i] := g_i$
- S_h ... SPSD matice, $S_h \mathbf{1} = \mathbf{0}$

To vede na řešení soustavy

$$S_h \bar{\mathbf{u}} = M_h^T \hat{\mathbf{h}} \quad \text{s omezením} \quad B_D \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{g},$$

kde

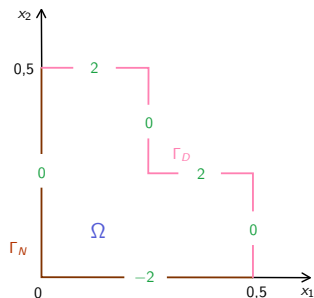
- $S_h[i, j] := \langle S\varphi_j, \varphi_i \rangle_\Gamma$, $S_h = D_h + (\frac{1}{2}M_h + K_h)^T V_h^{-1} (\frac{1}{2}M_h + K_h)$
- $\hat{\mathbf{h}}[i] := \hat{h}_i$
- $B_D[i, j] \in \{0, 1\}$, $\mathbf{g}[i] := g_i$
- S_h ... SPSD matice, $S_h \mathbf{1} = \mathbf{0}$

Neumannovu stopu dopočteme jako řešení soustavy

$$V_h \mathbf{t} = (\frac{1}{2}M_h + K_h) \bar{\mathbf{u}}.$$

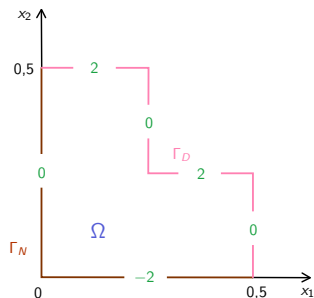
Numerické výsledky pro vnitřní smíšenou úlohu (1)

- $g(x) := 2x_2$
- $h(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x_1 = 0 \\ -2 & \text{pro } x_2 = 0 \end{cases}$
- $u_{ex}(x) = 2x_2$
- $\bar{u}_{ex}(x) = 2x_2$
- $t_{ex}(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x))$ (viz obrázek)



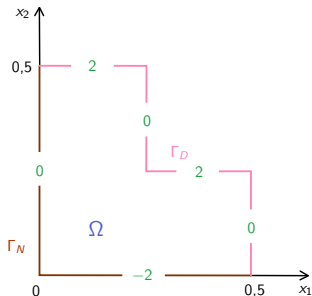
Numerické výsledky pro vnitřní smíšenou úlohu (1)

- $g(x) := 2x_2$
- $h(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x_1 = 0 \\ -2 & \text{pro } x_2 = 0 \end{cases}$
- $u_{ex}(x) = 2x_2$
- $\bar{u}_{ex}(x) = 2x_2$
- $t_{ex}(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x))$ (viz obrázek)
- přímý řešič po „zahnutí Dirichletovy podmínky do soustavy“ (alternativně duální formulace + SMALE, ...)



Numerické výsledky pro vnitřní smíšenou úlohu (1)

- $g(x) := 2x_2$
- $h(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x_1 = 0 \\ -2 & \text{pro } x_2 = 0 \end{cases}$
- $u_{ex}(x) = 2x_2$
- $\bar{u}_{ex}(x) = 2x_2$
- $t_{ex}(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x))$ (viz obrázek)
- přímý řešič po „zahrnutí Dirichletovy podmínky do soustavy“ (alternativně duální formulace + SMALE, ...)
- Gaussova kvadratura s 8 uzly

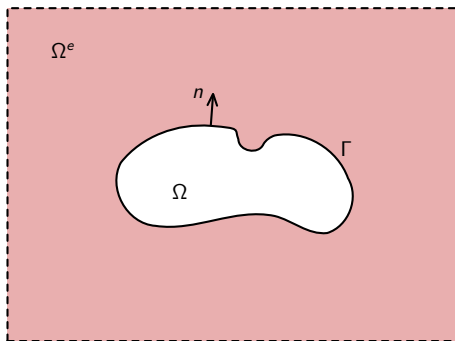


Numerické výsledky pro vnitřní smíšenou úlohu (2)

$N = M$	$err(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}_{ex}, S_h^{\text{mod}})$	$err(\mathbf{t}, \mathbf{t}_{ex}, V_h)$
16	$1,8 \cdot 10^{-13}$	$1,9 \cdot 10^{-12}$
32	$1,9 \cdot 10^{-13}$	$2,4 \cdot 10^{-12}$
64	$1,6 \cdot 10^{-13}$	$2,3 \cdot 10^{-12}$
128	$1 \cdot 10^{-13}$	$2,1 \cdot 10^{-12}$
256	$5,7 \cdot 10^{-14}$	$1,9 \cdot 10^{-12}$
512	$3,2 \cdot 10^{-14}$	$1,8 \cdot 10^{-12}$
1024	$1,9 \cdot 10^{-14}$	$1,8 \cdot 10^{-12}$

Nechť

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí Γ , $\Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$



(2D analogie)

Nechť

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí Γ , $\Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$
- $u \in H_{\Delta}^1(\Omega^e)$: $\|u(x) - u_0\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$ pro $\|x\| \rightarrow \infty$

Nechť

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí Γ , $\Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$

- $u \in H_{\Delta}^1(\Omega^e)$: $\|u(x) - u_0\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$ pro $\|x\| \rightarrow \infty$
- radiační podmínka , $u_0 \in \mathbb{R}$ pevné

Nechť

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí Γ , $\Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$

- $u \in H_{\Delta}^1(\Omega^e) : \underbrace{\|u(x) - u_0\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right)}_{\text{radiační podmínka}, u_0 \in \mathbb{R} \text{ pevné}} \text{ pro } \|x\| \rightarrow \infty$

Definujme dále:

- $\gamma_0^e u(x) := \lim_{\Omega^e \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} u(\tilde{x})$... operátor „vnější“ stopy
- $\gamma_1^e u(x) := \lim_{\Omega^e \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} (\underline{n}(x), \nabla u(\tilde{x}))$... operátor „vnější“ normálové derivace

Nechť

• $\Omega \subset \mathbb{R}^3$... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí Γ , $\Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$

• $u \in H_{\Delta}^1(\Omega^e)$: $\|u(x) - u_0\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$ pro $\|x\| \rightarrow \infty$

──
radiační podmínka , $u_0 \in \mathbb{R}$ pevné

Definujme dále:

• $\gamma_0^e u(x) := \lim_{\Omega^e \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} u(\tilde{x})$... operátor „vnější“ stopy

• $\gamma_1^e u(x) := \lim_{\Omega^e \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} (\underline{n}(x), \nabla u(\tilde{x}))$... operátor „vnější“ normálové derivace

„Vnější“ věta o reprezentaci

Pomocí věty o reprezentaci (*) pro Ω lze dokázat tuto analogii pro Ω^e :

$$u(x) = u_0 + \int_{\Omega^e} -\Delta u(y) U(x, y) dy - \int_{\Gamma} \gamma_1^e u(y) U(x, y) ds_y + \int_{\Gamma} \gamma_0^e u(y) \gamma_{1,y}^e U(x, y) ds_y,$$

$x \in \Omega^e$.

► Dirichlet exterior

(o)

Pokud je $u \in H^1(\Omega^e)$ splňující radiační podmínku navíc řešením Laplaceovy rovnice v Ω^e , tj. $\Delta u = 0$ v Ω^e , pak (z (o)):

$$u(x) = u_0 - \int_{\Gamma} \gamma_1^e u(y) U(x, y) ds_y + \int_{\Gamma} \gamma_0^e u(y) \gamma_{1,y}^e U(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega^e. \quad (\infty)$$

Pokud je $u \in H^1(\Omega^e)$ splňující radiační podmínku navíc řešením Laplaceovy rovnice v Ω^e , tj. $\Delta u = 0$ v Ω^e , pak (z (o)):

$$u(x) = u_0 - \int_{\Gamma} \gamma_1^e u(y) U(x, y) ds_y + \int_{\Gamma} \gamma_0^e u(y) \gamma_{1,y}^e U(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega^e. \quad (\circ\circ)$$

Aplikací operátorů γ_0^e a γ_1^e na (o) dostaneme (podobně jako v případě omezené oblasti Ω) systém **hraničních integrálních rovnic**

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^e u \\ \gamma_1^e u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + K & -V \\ -D & \frac{1}{2}I - K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^e u \\ \gamma_1^e u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{na } \Gamma.$$

Steklov-Poincaré operátor \equiv „Dirichlet-Neumann map“

$$\left. \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega^e) \\ \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega^e \\ \|u(x) - u_0\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \text{ pro } \|x\| \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma_1^e u = -S^e \gamma_0^e u + \left(\frac{1}{2}I - K'\right)V^{-1}u_0 \\ \text{na } \Gamma \end{array}$$

$$S^e := D + \left(-\frac{1}{2}I + K'\right)V^{-1}\left(-\frac{1}{2}I + K\right)$$

Steklov-Poincaré operátor \equiv „Dirichlet-Neumann map“

$$\left. \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega^e) \\ \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega^e \\ \|u(x) - u_0\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \text{ pro } \|x\| \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma_1^e u = -S^e \gamma_0^e u + \left(\frac{1}{2}I - K'\right)V^{-1}u_0 \\ \text{na } \Gamma \end{array}$$

$$S^e := D + \left(-\frac{1}{2}I + K'\right)V^{-1}\left(-\frac{1}{2}I + K\right)$$

- $S^e : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^{-1/2}(\Gamma)$... omezený, lineární, symetrický, semi-eliptický
 ... $H_0^{1/2}(\Gamma, \Gamma_D)$ -eliptický pro $\Gamma_D \subset \Gamma$ nenulové míry

Vnější Dirichletova úloha

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= 0 & \text{v } \Omega^e &:= \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \\
 \gamma_0^e u &= g & \text{na } \Gamma, & \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \\
 \|u(x) - u_0\| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) & \text{pro } \|x\| \rightarrow \infty, & \quad u_0 \in \mathbb{R} \text{ pevné}
 \end{aligned}
 \tag{DE}$$

Vnější Dirichletova úloha

$$\begin{array}{l}
 \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \\
 \gamma_0^e u = g \quad \text{na } \Gamma, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \\
 \|u(x) - u_0\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \quad \text{pro } \|x\| \rightarrow \infty, \quad u_0 \in \mathbb{R} \text{ pevné}
 \end{array} \quad (\text{DE})$$

Z věty o reprezentaci:



$$u(x) = u_0 - \int_{\Gamma} \gamma_1^e u(y) U(x, y) \, ds_y + \int_{\Gamma} g(y) \gamma_{1,y}^e U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega^e.$$

Vnější Dirichletova úloha

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= 0 & \text{v } \Omega^e &:= \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \\
 \gamma_0^e u &= g & \text{na } \Gamma, & \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \\
 \|u(x) - u_0\| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) & \text{pro } \|x\| \rightarrow \infty, & \quad u_0 \in \mathbb{R} \text{ pevné}
 \end{aligned}
 \tag{DE}$$

Z věty o reprezentaci:



$$u(x) = u_0 - \int_{\Gamma} \gamma_1^e u(y) U(x, y) \, ds_y + \int_{\Gamma} g(y) \gamma_{1,y}^e U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega^e.$$

$$t^e := \gamma_1^e u = ?? \quad \text{na } \Gamma$$

Vnější Dirichletova úloha

$$\begin{array}{l}
 \Delta u = 0 \quad v \Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \\
 \gamma_0^e u = g \quad \text{na } \Gamma, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \\
 \|u(x) - u_0\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \quad \text{pro } \|x\| \rightarrow \infty, \quad u_0 \in \mathbb{R} \text{ pevné}
 \end{array} \quad (\text{DE})$$

Z věty o reprezentaci:



$$u(x) = u_0 - \int_{\Gamma} \gamma_1^e u(y) U(x, y) ds_y + \int_{\Gamma} g(y) \gamma_{1,y}^e U(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega^e.$$

$$t^e := \gamma_1^e u = ?? \quad \text{na } \Gamma$$

Z 1. h.i.r.:

$$Vt^e = \left(-\frac{1}{2}I + K\right)g + u_0 \quad \text{na } \Gamma.$$

Vnější Dirichletova úloha

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= 0 & \text{v } \Omega^e &:= \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \\
 \gamma_0^e u &= g & \text{na } \Gamma, & \quad g \in H^{1/2}(\Gamma) \\
 \|u(x) - u_0\| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) & \text{pro } \|x\| \rightarrow \infty, & \quad u_0 \in \mathbb{R} \text{ pevné}
 \end{aligned}
 \tag{DE}$$

Z věty o reprezentaci:



$$u(x) = u_0 - \int_{\Gamma} \gamma_1^e u(y) U(x, y) \, ds_y + \int_{\Gamma} g(y) \gamma_{1,y}^e U(x, y) \, ds_y, \quad x \in \Omega^e.$$

$$t^e := \gamma_1^e u = ?? \quad \text{na } \Gamma$$

Z 1. h.i.r.:

$$\forall t^e = \left(-\frac{1}{2}I + K\right)g + u_0 \quad \text{na } \Gamma.$$

Hraniční variační formulace úlohy (DE) zní: najdi $t^e \in H^{-1/2}(\Gamma)$ takové, že

$$\langle \forall t^e, v \rangle_{\Gamma} = \langle \left(-\frac{1}{2}I + K\right)g + u_0, v \rangle_{\Gamma} \quad \forall v \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{VDI}$$

Pro přibližné řešení (VDE) použijeme Galerkinovu metodu s

$$\mathbf{t}^e \approx \sum_{i=1}^N t_i^e \psi_i, \quad \mathbf{g} \approx \sum_{i=1}^M g_i \varphi_i,$$

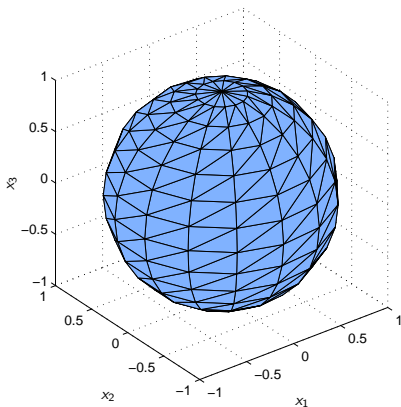
což vede na soustavu

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t}^e = \left(-\frac{1}{2}\mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h\right) \mathbf{g} + u_0 \mathbf{w}_h,$$

kde $\mathbf{w}_h[j] := \langle \psi_j, 1 \rangle_\Gamma$.

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (1)

- $\Omega := \mathcal{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$



$N = 390$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (1)

- $\Omega := \mathcal{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$
- $g(x) := -1, \quad u_0 := 1$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (1)

- $\Omega := \mathcal{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$
- $g(x) := -1, \quad u_0 := 1$
- $u_{ex}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (1)

- $\Omega := \mathcal{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$
- $g(x) := -1, \quad u_0 := 1$
- $u_{\text{ex}}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$
- $t_{\text{ex}}^e(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{\text{ex}}(x)) = 2$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (1)

- $\Omega := \mathcal{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$
- $g(x) := -1, \quad u_0 := 1$
- $u_{\text{ex}}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$
- $t_{\text{ex}}^e(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{\text{ex}}(x)) = 2$

- Přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (1)

- $\Omega := \mathcal{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$
- $g(x) := -1, \quad u_0 := 1$
- $u_{\text{ex}}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$
- $t_{\text{ex}}^e(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{\text{ex}}(x)) = 2$

- Přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)
- Vyčíslení matic s použitím semi-analytického přístupu (Rjasanow & Steinbach)

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (1)

- $\Omega := \mathcal{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$
- $g(x) := -1, \quad u_0 := 1$
- $u_{ex}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$
- $t_{ex}^e(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x)) = 2$
- Přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)
- Vyčíslení matic s použitím semi-analytického přístupu (Rjasanow & Steinbach)

N	M	$err(\mathbf{t}^e, \mathbf{t}_{ex}^e, V_h)$
48	26	$5,6 \cdot 10^{-2}$
180	92	$1,7 \cdot 10^{-2}$
390	197	$7,8 \cdot 10^{-3}$
720	362	$4,3 \cdot 10^{-3}$
1104	554	$3,1 \cdot 10^{-3}$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (2)

Dopočtení řešení v Ω^e

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (2)

Dopočtení řešení v Ω^e

- Oba potenciály v reprezentační větě vyčísleny Gaussovou kvadraturou s 8 uzly

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (2)

Dopočtení řešení v Ω^e

- Oba potenciály v reprezentační větě vyčísleny Gaussovou kvadraturou s 8 uzly
- $x_1 := (0, 0, -10)$, $x_2 := (16, 3, 1981)$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (2)

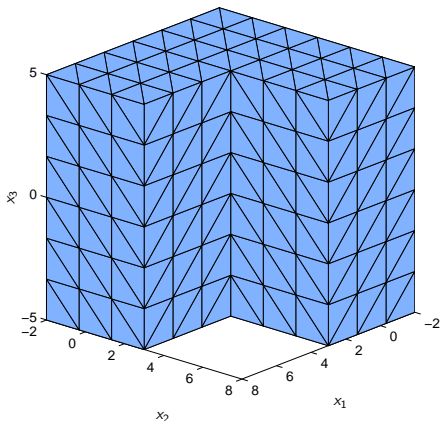
Dopočtení řešení v Ω^e

- Oba potenciály v reprezentační větě vyčísleny Gaussovou kvadraturou s 8 uzly
- $x_1 := (0, 0, -10)$, $x_2 := (16, 3, 1981)$

N	M	$\frac{ u(x_1) - u_{ex}(x_1) }{ u_{ex}(x_1) }$	$\frac{ u(x_2) - u_{ex}(x_2) }{ u_{ex}(x_2) }$
		$2,2 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-5}$
48	26	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$
180	92	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$
390	197	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-6}$
720	362	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-6}$
1104	554		

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (3)

- $\Omega :=$ „3D L-shape“



$N = 396$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (3)

- Ω := „3D L-shape“; děkuji Alexovi za vygenerované geometrie!

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (3)

- Ω := „3D L-shape“; děkuji Alexovi za vygenerované geometrie!
- $g(x) := -\frac{2}{\|x\|} + 1$, $u_0 := 1$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (3)

- Ω := „3D L-shape“; děkuji Alexovi za vygenerované geometrie!
- $g(x) := -\frac{2}{\|x\|} + 1$, $u_0 := 1$
- $u_{ex}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (3)

- $\Omega :=$ „3D L-shape“; děkuji Alexovi za vygenerované geometrie!
- $g(x) := -\frac{2}{\|x\|} + 1, \quad u_0 := 1$
- $u_{ex}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$
- $t_{ex}^e(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x)) = \frac{2}{\|x\|^3}(x, \underline{n}(x))$

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (3)

- Ω := „3D L-shape“; děkuji Alexovi za vygenerované geometrie!
- $g(x) := -\frac{2}{\|x\|} + 1, \quad u_0 := 1$
- $u_{ex}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$
- $t_{ex}^e(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x)) = \frac{2}{\|x\|^3}(x, \underline{n}(x))$
- Přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (3)

- $\Omega :=$ „3D L-shape“; děkuji Alexovi za vygenerované geometrie!
- $g(x) := -\frac{2}{\|x\|} + 1, \quad u_0 := 1$
- $u_{ex}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$
- $t_{ex}^e(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x)) = \frac{2}{\|x\|^3}(x, \underline{n}(x))$
- Přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)
- Vyčíslení matic s použitím semi-analytického přístupu (Rjasanow & Steinbach)

Numerické výsledky pro vnější Dirichletovu úlohu (3)

- Ω := „3D L-shape“; děkuji Alexovi za vygenerované geometrie!
- $g(x) := -\frac{2}{\|x\|} + 1$, $u_0 := 1$
- $u_{ex}(x) = -\frac{2}{\|x\|} + 1$
- $t_{ex}^e(x) = (\underline{n}(x), \nabla u_{ex}(x)) = \frac{2}{\|x\|^3}(x, \underline{n}(x))$
- Přímý řešič (lze i CG, PCG, ...)
- Vyčíslení matic s použitím semi-analytického přístupu (Rjasanow & Steinbach)

N	M	$err(\mathbf{t}^e, \mathbf{t}_{ex}^e, V_h)$
44	24	$1,7 \cdot 10^{-1}$
176	90	$7,9 \cdot 10^{-2}$
396	200	$4,4 \cdot 10^{-2}$
704	354	$2,8 \cdot 10^{-2}$
1100	552	$1,7 \cdot 10^{-2}$

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)
- Husté matice tuhosti (-),

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)
- Husté matice tuhosti (-), vyčíslení: $\mathcal{O}(N^2)$ \Rightarrow $N_{max} \approx 10^4$

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)
- Husté matice tuhosti (-), vyčíslení: $\mathcal{O}(N^2)$ \Rightarrow $N_{max} \approx 10^4$
- Nutnost znalosti fundamentálního řešení (-)

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)
- Husté matice tuhosti (-), vyčíslení: $\mathcal{O}(N^2) \Rightarrow N_{max} \approx 10^4$
- Nutnost znalosti fundamentálního řešení (-)

Fast BEM

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)
- Husté matice tuhosti (-), vyčíslení: $\mathcal{O}(N^2)$ $\Rightarrow N_{max} \approx 10^4$
- Nutnost znalosti fundamentálního řešení (-)

Fast BEM

- Navázanost na iterační řešič (CG, GMRES, ...)

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)
- Husté matice tuhosti (-), vyčíslení: $\mathcal{O}(N^2) \Rightarrow N_{max} \approx 10^4$
- Nutnost znalosti fundamentálního řešení (-)

Fast BEM

- Navázanost na iterační řešič (CG, GMRES, ...)
- Vyčíslení násobení maticí tuhosti: $\mathcal{O}(N \log N) \Rightarrow N_{max} \approx 10^6$

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)
- Husté matice tuhosti (-), vyčíslení: $\mathcal{O}(N^2) \Rightarrow N_{max} \approx 10^4$
- Nutnost znalosti fundamentálního řešení (-)

Fast BEM

- Navázanost na iterační řešič (CG, GMRES, ...)
- Vyčíslení násobení maticí tuhosti: $\mathcal{O}(N \log N) \Rightarrow N_{max} \approx 10^6$
- Adaptive Cross Approximation (ACA)

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)
- Husté matice tuhosti (-), vyčíslení: $\mathcal{O}(N^2) \Rightarrow N_{max} \approx 10^4$
- Nutnost znalosti fundamentálního řešení (-)

Fast BEM

- Navázanost na iterační řešič (CG, GMRES, ...)
- Vyčíslení násobení maticí tuhosti: $\mathcal{O}(N \log N) \Rightarrow N_{max} \approx 10^6$
- Adaptive Cross Approximation (ACA)
- Fast Multipole Method (FMM)

Shrnutí a možnost vylepšení

BEM

- Hraniční formulace vede ke snížení dimenze diskrétní úlohy (+)
- Použití pro vnější úlohy/úlohy tvarové optimalizace (+)
- Přesnost výpočtu „druhotných“ proměnných (+)
- Husté matice tuhosti (-), vyčíslení: $\mathcal{O}(N^2) \Rightarrow N_{max} \approx 10^4$
- Nutnost znalosti fundamentálního řešení (-)

Fast BEM

- Navázanost na iterační řešič (CG, GMRES, ...)
- Vyčíslení násobení maticí tuhosti: $\mathcal{O}(N \log N) \Rightarrow N_{max} \approx 10^6$
- Adaptive Cross Approximation (ACA)
- Fast Multipole Method (FMM)

Děkuji!