

Polynomiální interpolace po částech

Piecewise Polynomial Interpolation

Kateřina Štefánková

Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Marie Sadowská, Ph.D.

Ostrava, 2023

Zadání bakalářské práce

Student: **Kateřina Štefánková**

Studijní program: B0541A170008 Výpočetní a aplikovaná matematika

Téma: **Polynomiální interpolace po částech
Piecewise polynomial interpolation**

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Klasická polynomiální interpolace (tj. úloha nalezení polynomu, jehož graf prochází vstupní množinou bodů) trpí základním neduhem: obecně nemáme zaručenu konvergenci pro rostoucí stupeň interpolantu. Nabízí se tedy přirozený nápad rozdělit daný interval na podintervaly, na nichž budeme interpolovat funkci polynomem tak, aby výsledná funkce - tzv. splajn - měla požadovaný stupeň hladkosti. Tato metoda má tedy dobré použití pro aproximování po částech hladkých funkcí. Tato bakalářská práce si klade následující cíle:

- nastudovat a zpracovat příslušnou teorii ke splajnům, počínaje nejjednoduššími splajny - lineárními a kubickými,
 - práce by měla být doplněna o řešení zajímavých příkladů souvisejících s danou tematikou.
- Závěrem je nutno podotknout, že úlohy nalezení vhodného interpolantu se vyskytují v mnoha inženýrských odvětvích, často např. v navrhování v počítačové grafice.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] E. Süli, D.F. Mayers - An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press (2003)
- [2] M.J.D. Powell - Approximation Theory and Methods, Cambridge University Press (1981)

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Marie Sadowská, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2022
Datum odevzdání: 30.04.2023

Garant studijního programu: prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.

V IS EDISON zadáno: 12.11.2022 09:56:20

Abstrakt

Polynomiální interpolace je vhodnou metodou pro aproximaci funkce či proložení diskrétních hodnot nějaké funkce (získaných např. měření) polynomem. Mohou nastat případy, ve kterých bude chyba interpolace příliš vysoká. V těchto situacích je vhodnou alternativou polynomiální interpolace po částech. Tato metoda spočívá v rozdělení intervalu, ve kterém funkci interpolujeme, na několik podintervalů. Následně se na každém podintervalu provede polynomiální interpolace tak, aby výsledná aproximující funkce byla spojitá. Cílem této práce je nastudovat a zpracovat teorii k Lagrangeově a Hermiteově polynomiální interpolaci a k polynomiální interpolaci po částech. Významnou součástí práce je také prezentace řešení vhodných a zajímavých úloh týkajících se této problematiky.

Klíčová slova

Polynomiální interpolace, Lagrangeova interpolace, Hermiteova interpolace, Polynomiální interpolace po částech, Lineární splajn, Kubický splajn

Abstract

Polynomial interpolation can be used to approximate a function or to create a polynomial that agrees with some information about a function (for example discrete values obtained by some measurement). There may be cases in which the interpolation error is too large. In these situations piecewise polynomial interpolation is a suitable alternative. This method consists of dividing the interval in which the function is interpolated into several subintervals. Subsequently, polynomial interpolation is performed on each subinterval so that the resulting approximating function is continuous. The goal of this thesis is to study and elaborate on the topic of Lagrange and Hermite interpolation as well as on piecewise polynomial interpolation. An important part of the thesis is also the presentation of solutions to suitable and interesting problems related to this topic.

Keywords

Polynomial interpolation, Lagrange interpolation, Hermite interpolation, Piecewise polynomial interpolation, Linear spline, Cubic spline

Poděkování

Ráda bych poděkovala Ing. Marii Sadowské, Ph.D. za aktivní zodpovídání dotazů, ochotu a trpělivost při vedení této práce.

Obsah

Seznam použitých symbolů a zkratk	6
1 Úvod	7
2 Polynomiální interpolace	9
2.1 Lagrangeova interpolace	9
2.2 Úlohy k Lagrangeově interpolaci	17
2.3 Hermiteova interpolace	23
2.4 Úlohy k Hermiteově interpolaci	28
3 Polynomiální interpolace po částech	33
3.1 Lineární splajny	33
3.2 Přirozené kubické splajny	36
3.3 Úlohy ke splajnům	46
4 Závěr	59
Literatura	60
Přílohy	60
A Pojmy a tvrzení z matematické analýzy a lineární algebry	61
A.1 Některé potřebné definice	61
A.2 Některá potřebná tvrzení	62
B Thomasův algoritmus	64

Seznam použitých zkratek a symbolů

\mathbb{R}	– množina všech reálných čísel
\mathbb{R}^+	– množina všech kladných reálných čísel
\mathbb{R}^*	– $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
\mathbb{N}	– množina všech přirozených čísel
\mathbb{N}_0	– $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}^{m,n}$	– množina všech reálných matic typu (m, n)
\mathbb{R}^n	– množina všech n -rozměrných reálných vektorů
m, n	– přirozená čísla (nebude-li řečeno jinak)
\mathcal{P}_n	– množina všech reálných polynomů stupně nejvýše n
$C^n(\langle a, b \rangle)$	– množina všech funkcí n -krát spojitě diferencovatelných na intervalu $\langle a, b \rangle$
$P(a)$	– prstencové okolí bodu a
$P(x, \delta)$	– prstencové okolí bodu x s poloměrem $\delta > 0$
$f _{\langle a, b \rangle}$	– restrikce funkce f na interval $\langle a, b \rangle$
$\ f\ _\infty$	– maximová norma funkce f
$:=, :=$	– definitorické = (použité v případě, kdy by mohlo dojít k nedorozumění)
\setminus	– množinový rozdíl
FLOPS	– počet operací v pohyblivé řádové čárce
■	– konec příkladu
□	– konec důkazu
▲	– konec úlohy

Kapitola 1

Úvod

Polynomy jsou funkce s řadou výhod, kterými jsou například jejich nekonečná diferencovatelnost nebo jejich specifikace konečně mnoha koeficienty (a tedy obecně rychlý výpočet funkčních hodnot). Máme-li zadanou funkci, jejíž hodnoty jsou náročné pro vyčíslení, je složité získat její derivaci (nebo nelze derivovat vůbec) nebo bychom z jiných důvodů raději pracovali s polynomem, můžeme tuto funkci aproximovat polynomem, se kterým se nám bude pracovat výrazně lépe. Obdobně v případě, kdy získáme nějakým měřením body, které potřebujeme proložit spojitou funkcí, je vhodné tyto body proložit polynomem. Úloha aproximace zadané funkce či proložení bodů polynomem se nazývá polynomiální interpolace. Samozřejmě bude docházet k určité chybě, kterou ale (jak si ukážeme) lze dobře popsat.

Může nastat případ, kdy běžná polynomiální interpolace generuje příliš velké chyby, nebo interpolační polynom nabývá příliš vysokých řádů. V takovém případě se jako vhodná modifikace polynomiální interpolace nabízí polynomiální interpolace po částech. Při použití této metody se interval, na kterém chceme funkci aproximovat (či proložit dvojicí bodů spojitou funkcí), nejprve rozdělí na několik podintervalů a poté se provede polynomiální interpolace pro každý podinterval zvlášť. Výsledná funkce bude (dle očekávání) po částech polynom splňující všechny potřebné podmínky, který se nazývá splajn. Pomocí polynomiální interpolace po částech lze (oproti běžné polynomiální interpolaci) často získat splajn nízkého řádu při současném zmenšení chyby interpolace [1].

Cílem této práce je nastudovat a zpracovat teorii k polynomiální interpolaci a následně k polynomiální interpolaci po částech. Důležitou částí je také vyřešení vhodných úloh týkajících se dané problematiky.

V kapitole 2 projdeme příslušnou teorii k polynomiální interpolaci, konkrétně k interpolaci Lagrangeově a Hermiteově, kterou potřebujeme k porozumění polynomiální interpolace po částech. Kapitola 3 obsahuje teorii k lineárním a přirozeným kubickým splajnům. Teorie vychází primárně z kapitol 6 a 11 v knize E. Süliho a D. F. Mayerse [1]. Mnoho informací lze také nalézt v knihách W. Shen [2], C. De Boora [3] nebo ve skriptech M. Embreeho z univerzity Virginia Tech [4] nebo V. Vondráka a L. Pospíšila [5].

V obou kapitolách se nachází sekce s řešením zajímavých úloh z knihy [1], které ukazují možnosti výpočtu daných interpolačních funkcí a dále zkoumají jejich vlastnosti a souvislosti. Na modrém pozadí je vždy zadání příslušné úlohy, které je následováno jejím řešením. V kapitolách se také nachází příklady, které jsou většinou ukázkou příslušné metody interpolace a často jsou doplněny názornými grafy.

Kapitola 2

Polynomiální interpolace

V této kapitole budeme vycházet z knihy E. Süliho a D. F. Mayerse [1], z knihy W. Shen [2] a také ze skript M. Embreeho z univerzity Virginia Tech [4] a ze skript V. Vondráka a L. Pospíšila [5].

Problém nalezení polynomu, který zahrnuje určitý typ informace o funkci f , nazýváme polynomiální interpolací. Jsou-li informace ve tvaru hodnot funkce f v n různých bodech z množiny $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, nazýváme hledaný polynom **Lagrangeův interpolační polynom**. Často jsou tyto hodnoty získány nějakým měřením, typicky v pravidelných časových úsecích. Informace mohou být také obohaceny o hodnoty derivace funkce f v těchto bodech. V tomto případě je hledaný polynom nazýván **Hermiteův interpolační polynom**.

V případě, že známe hodnoty $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, je cílem polynomiální interpolace najít polynom p , který bude těmito body procházet. Polynomiální interpolace tedy umožňuje aproximovat funkci f polynomem na určitém intervalu. Jelikož je polynom specifikován pouze konečně mnoha koeficienty, je výpočet jeho funkční hodnoty obecně rychlejší než výpočet funkční hodnoty samotné funkce f , která může být na vyčíslení velmi náročná.

Obecně se bude interpolační polynom p od funkce f lišit, čímž vznikne chyba, pro jejíž velikost je vhodné určit meze.

2.1 Lagrangeova interpolace

Nejjednodušším příkladem problému polynomiální interpolace je případ, kdy máme zadány dvě hodnoty $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ a chceme nalézt polynom $p_0 \in \mathcal{P}_0$ takový, že $p_0(x_0) = y_0$. Řešením je samozřejmě $p_0 \equiv y_0$. Obecně lze problém zadat následovně: Předpokládejme, že máme $x_i \in \mathbb{R} : x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$ a $y_i \in \mathbb{R}$, kde $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Cílem je nalézt interpolační polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ takový, že

$$p_n(x_i) = y_i \quad \text{pro všechna } i \in \{0, \dots, n\}. \quad (2.1)$$

Tyto podmínky nazýváme **interpolační podmínky**.

2.1.1 Existence a jednoznačnost Lagrangeova interpolačního polynomu

Abychom ukázali, že problém Lagrangeovy polynomiální interpolace má jednoznačné řešení, uvedeme důležitou větu.

Věta 1 *Existují polynomy $L_k \in \mathcal{P}_n$, $k \in \{0, \dots, n\}$, takové, že platí*

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = k, \\ 0 & \text{pro } i \neq k, \end{cases} \quad (2.2)$$

$x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, n\}$. Polynomy L_k nazýváme **kardinální funkce**. Navíc polynom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)y_k, \quad (2.3)$$

$y_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, splňuje interpolační podmínky (2.1).

Důkaz [1] Ukážeme jen konstrukční důkaz existence kardinálních funkcí L_k (2.2). Tvrzení (2.3) je pak dokázáno např. v [1] v kapitole 6.2. Pro každé pevné k takové, že $0 \leq k \leq n$, se musí polynom L_k rovnat 0 v právě n bodech, takže nabývá tvaru

$$L_k(x) = C_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i), \quad (2.4)$$

kde $C_k \in \mathbb{R}$ je konstanta. Konstantu C_k spočteme po dosazení $L_k(x_k) = 1$ za $L_k(x)$ (viz (2.2)) do (2.4):

$$C_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_i}.$$

Po dosazení této rovnosti do (2.4) získáváme předpis pro kardinální funkce

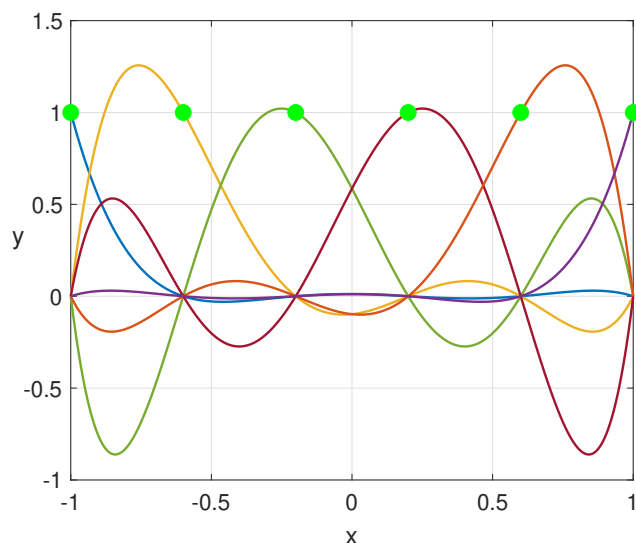
$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}. \quad (2.5)$$

□

Na obrázku 2.1 jsou znázorněny kardinální funkce pro 6 ekvidistantních interpolačních uzlů na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Příklad 1 Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom stupně 2 pro funkci $f(x) = e^x \cosh(x)$ na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ se 3 interpolačními uzly $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x^2 - 2x}{8}, \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{x^2 - 4}{-4},$$

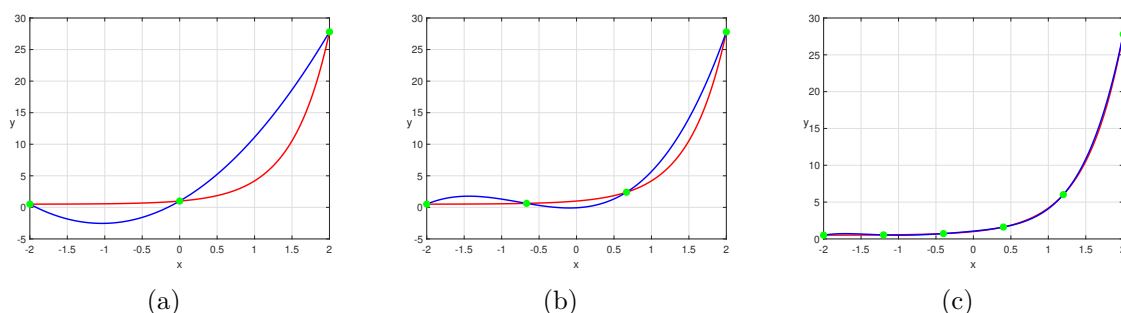


Obrázek 2.1: Kardinální funkce na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x^2 + 2x}{8},$$

$$p_2(x) = e^{-2} \cosh(-2) \frac{x^2 - 2x}{8} - \frac{x^2 - 4}{4} + e^2 \cosh(2) \frac{x^2 + 2x}{8}.$$

Na obrázku 2.2 je zobrazena funkce f modře a interpolační polynom p_2 červeně. Zeleně jsou znázorněny hodnoty funkce f v interpolačních uzlech. Graf 2.2a odpovídá zadanému příkladu, v grafech 2.2b a 2.2c bylo použito více ekvidistantních uzlů pro výpočet interpolačního polynomu vyššího stupně. Chyba interpolace pro tuto funkci je graficky znázorněna v kapitole 2.3.1 u příkladu 4 na straně 25.



Obrázek 2.2: Interpolace funkce ve 3 bodech (a), 4 bodech (b) a 6 bodech (c)

■

Věta 2 Necht $x_i \in \mathbb{R}$, kde $i \in \{0, \dots, n\}$, jsou různá čísla a $y_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, n\}$. Potom existuje právě jeden interpolační polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$, který splňuje interpolační podmínky (2.1).

Důkaz Existence je dána větou 1. Důkaz jednoznačnosti lze najít např. v [6] v kapitole 2.3. □

Definice 1 Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, n\}$, jsou různá čísla a $y_i \in \mathbb{R}$. Polynom p_n definován jako

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)y_k, \quad (2.6)$$

kde L_k je dáno pomocí (2.5), nazýváme **Lagrangeovým interpolačním polynomem stupně n pro množinu bodů** $\{(x_i, y_i) : i = 0, \dots, n\}$. Čísla x_i nazýváme **interpolační uzly**.

Definice 2 Necht $f \in C(\langle a, b \rangle)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Body $x_i \in \langle a, b \rangle$, kde $i \in \{0, \dots, n\}$, $x_0 = a$, $x_n = b$, jsou různé interpolační uzly. Pak je interpolační polynom p_n definován jako

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)f(x_k) \quad (2.7)$$

nazýváme **Lagrangeovým interpolačním polynomem stupně n funkce f s interpolačními uzly x_i** .

2.1.2 Chyba Lagrangeova interpolačního polynomu

V bodech, které nejsou interpolačními uzly, se funkce f a Lagrangeův interpolační polynom p_n mohou výrazně lišit. Proto je přirozené ptát se na velikost chyby $f(x) - p_n(x)$ v případě, že x není interpolační uzel. Následující věta nám dává odhad **interpolační chyby** pro $x \in \langle x_0, x_n \rangle$, kde x_0 a x_n jsou nejmenší a největší interpolační uzly.

Věta 3 Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle)$. Pak $\forall x \in \langle a, b \rangle \exists \xi = \xi(x) \in (a, b)$ takové, že

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (2.8)$$

Navíc $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|. \quad (2.9)$$

Důkaz Lze najít např. v [1] v kapitole 6.2. □

Informace získané z první části věty 3 nelze v praxi příliš použít (typicky neznáme hodnotu ξ a průběh interpolované funkce f), ale pokud dokážeme shora omezit maximum $|f^{(n+1)}|$ na $\langle a, b \rangle$, pak získáme horní mez velikosti chyby interpolace.

2.1.3 Konvergence

Zabýváme-li se určováním interpolačních polynomů pro funkci f na nějakém intervalu, je důležité položit si otázku, zda posloupnost interpolačních polynomů (p_n) pro spojitou funkci f konverguje k této funkci f s rostoucím n . Tento problém nezávisí jen na n , ale také na rozdělení interpolačních uzlů v intervalu.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b \rangle)$ a $p_n \in \mathcal{P}_n$ je interpolační polynom s ekvidistantními uzly $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i = a + i(b - a)/n$, $i \in \{0, \dots, n\}$. Chtěli bychom zajistit, aby $p_n \rightrightarrows f$ na $\langle a, b \rangle$.¹ Z věty 3 víme, že

$$\forall x \in \langle a, b \rangle : |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Tuto nerovnost můžeme upravit:

$$0 \leq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \max_{x \in \langle a, b \rangle} \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Z věty o sevření² víme, že pokud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \max_{x \in \langle a, b \rangle} \prod_{i=0}^n |x - x_i| = 0, \quad (2.10)$$

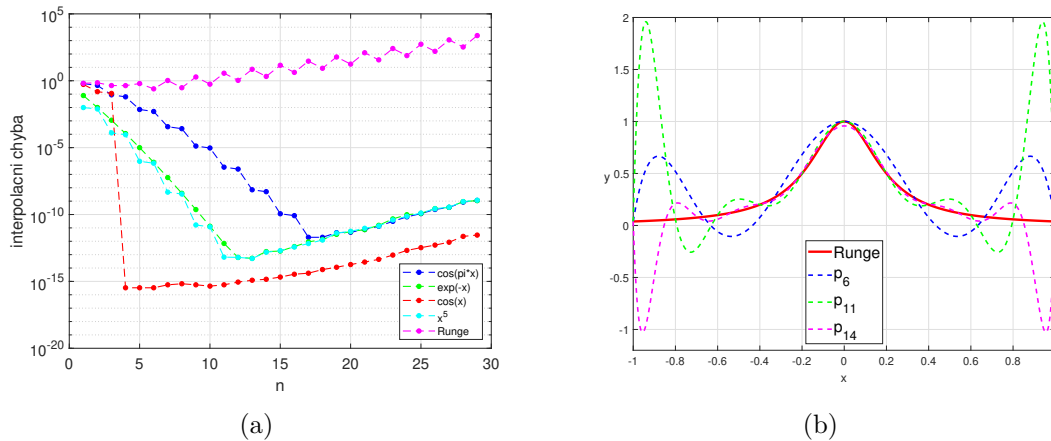
pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \langle a, b \rangle} |p_n(x) - f(x)| = 0, \text{ a tedy } p_n \rightrightarrows f \text{ na } \langle a, b \rangle.$$

Bohužel existují funkce, pro které posloupnost

$$\left(\|f^{(n+1)}\|_\infty \max_{x \in \langle a, b \rangle} \prod_{i=0}^n |x - x_i| \right)$$

konverguje k ∞ s rostoucím n rychleji, než posloupnost $(1/(n+1)!)$ konverguje k 0, takže (2.10) nebude platit.



Obrázek 2.3: Chýba interpolace daných funkcí (a) a interpolace Rungeovy funkce (b)

¹Viz definici stejnoměrné konvergence A.1.2.

²Viz větu A.2.2.

Na obrázku 2.3a je jasně vidět, že se chyby interpolace „rozumných“ funkcí zmenšují do nějakého n . Avšak např. pro **Rungeovu funkci** definovanou předpisem

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad (2.11)$$

má chyba interpolace (dokonce) rostoucí tendenci se zvětšujícím se n . Toto je příklad funkce, která nesplňuje podmínku (2.10). Lze si také všimnout, že od jistého n začínají chyby interpolace „rozumných“ funkcí znovu růst. Toto je způsobeno zaokrouhlovací chybou počítače. Na obrázku 2.3b je znázorněna Rungeova funkce a některé její interpolační polynomy. Je zřejmá velká chyba interpolačních polynomů Rungeovy funkce na okrajích intervalu při použití ekvidistantních interpolačních uzlů. Tuto chybu je možné zmenšit použitím vhodnějšího dělení intervalu. Bude-li četnost interpolačních uzlů u okrajů intervalu vyšší než v jeho zbytku a budou-li uzly vhodně zvolená (např. Čebyševovy uzly³), bude chyba interpolačního polynomu menší (s rostoucím počtem uzlů v intervalu se bude chyba zmenšovat). Často jsou ale body získány jako výsledky měření v pravidelných časových intervalech, takže není možné zvolit optimální dělení intervalu. V takovém případě je vhodné použít jinou interpolační metodu (např. splajny, o kterých si povíme více v kapitole 3). Závěrem lze tedy říct, že obecně nelze zaručit stejnoměrnou konvergenci p_n k f na $\langle a, b \rangle$ a zvyšování n může být dokonce kontraproduktivní.

2.1.4 Derivování interpolantu

Máme-li daný Lagrangeův interpolační polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ pro funkci f (definovaný v (2.3)), pak jednoduše získáme polynom p'_n derivováním jednotlivých členů:

$$p'_n(x) = \sum_{k=0}^n L'_k(x) f(x_k) \in \mathcal{P}_{n-1},$$

který použijeme k aproximaci funkce f' . Pro výpočet chyby $f' - p'_n$ zkusme využít odhad (2.8) z věty 3, který zderivujeme:

$$f'(x) - p'_n(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right).$$

Tuto derivaci však jednoduše nevypočítáme, protože obsahuje mimo jiné derivaci funkce $\xi = \xi(x)$, která je závislá na x , ale nevíme jakým způsobem. Postup, jakým vypočítat chybu $f' - p'_n$, nám dává následující věta.

Věta 4 *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle)$, $x_i \in \langle a, b \rangle$, $i \in \{0, \dots, n\}$, a p_n je Lagrangeův interpolační polynom funkce f v uzlech x_i . Pak existují různé body $\eta_1, \dots, \eta_n \in (a, b)$ takové, že platí:*

$$(\forall x \in \langle a, b \rangle) (\exists \xi \in (a, b)) : f'(x) - p'_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - \eta_i). \quad (2.12)$$

³Dělení Čebyševovými uzly je popsáno např. v [7] v kapitole 3.2.

Důkaz [1] Funkce $f - p_n$ má kořeny v $n + 1$ bodech x_i , $i \in \{0, \dots, n\}$ (dle interpolačních podmínek (2.1)). Funkce $f' - p'_n$ má dle Rolleovy věty⁴ n kořenů v intervalu (a, b) , které označíme η_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Platí tedy $f'(\eta_i) - p'_n(\eta_i) = 0$. Je-li $x = \eta_i$, pak jsou obě strany (2.12) rovny 0 a daná rovnost tedy platí. Je-li $x \neq \eta_i$ libovolné pevné, definujeme pomocnou funkci

$$\chi(t) = f'(t) - p'_n(t) - \frac{f'(x) - p'_n(x)}{\prod_{i=1}^n (x - \eta_i)} \prod_{i=1}^n (t - \eta_i).$$

Funkce χ je nulová v bodech η_i a také v bodě x . Má tedy $n + 1$ kořenů v $\langle a, b \rangle$. Po opakovaném použití Rolleovy věty zjistíme, že funkce $\chi^{(n)}$ má jeden kořen v (a, b) , který označíme ξ . Platí tedy

$$\chi^{(n)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{p_n^{(n+1)}(\xi)}_{=0} - \frac{f'(x) - p'_n(x)}{\prod_{i=1}^n (x - \eta_i)} n! = 0,$$

čímž po přeuspořádání dostáváme požadovanou rovnost (2.12). □

Důsledkem věty 4 je odhad

$$|f'(x) - p'_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{n!} \prod_{i=1}^n |x - \eta_i|.$$

Protože výraz $|x - \eta_i|$ můžeme shora omezit hodnotou $b - a$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, platí

$$\max_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x) - p'_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{n!} (b - a)^n.$$

Tzn. pro $f \in C^\infty(\langle a, b \rangle)$ platí, že $\max_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x) - p'_n(x)| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$, takže posloupnost polynomů (p'_n) konverguje stejnoměrně⁵ k f' na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Příklad 2 [1] Necht $h \in \mathbb{R}^+$, $f \in C^1(\langle -h, h \rangle)$, $p_1 \in \mathcal{P}_1$ je Lagrangeův interpolační polynom funkce f v interpolačních uzlech $x_0 = -h$ a $x_1 = h$. Funkční hodnoty v interpolačních uzlech známe, ale jen s chybou (data jsou zašuměná). Máme tedy hodnoty $f(-h) + \varepsilon_-$ a $f(h) + \varepsilon_+$. Lagrangeův interpolační polynom (viz obrázek 2.4) musí mít směrnici $\frac{f(h) - f(-h)}{2h}$. Má tedy tvar

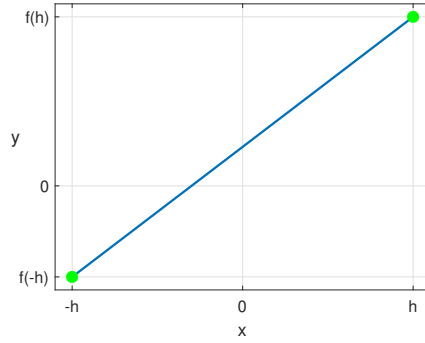
$$p_1(x) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h} (x + h) + f(-h).$$

Derivací Lagrangeova interpolačního polynomu získáme

$$p'_1(x) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \in \mathcal{P}_0.$$

⁴Viz větu A.2.4.

⁵Viz definici A.1.2.



Obrázek 2.4: Graf polynomu p_1 na intervalu $\langle -h, h \rangle$

Touto hodnotou budeme aproximovat funkci f' na $\langle a, b \rangle$, a tedy i v bodě 0:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0) + f(0) - f(0-h)}{2h} &= \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{\frac{f(0+h) - f(0)}{h}}_{\rightarrow f'(0)} + \underbrace{\frac{f(0) - f(0-h)}{h}}_{\rightarrow f'(0)} \right) = f'(0). \end{aligned}$$

Pro výpočet limity jsme využili znalost aproximace derivace pomocí dopředné a zpětné diference. Protože máme k dispozici jen zašuměná data, musíme pracovat s hodnotou

$$\frac{(f(h) + \varepsilon_+) - (f(-h) + \varepsilon_-)}{2h} = \frac{f(h) - f(-h)}{2h} + \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{2h}.$$

Z tohoto tvaru aproximace je zřejmé, že pro $h \rightarrow 0^+$ bude $\frac{f(h)-f(-h)}{2h} \rightarrow f'(0)$ a $\frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{2h} \rightarrow \infty$ pro $\varepsilon_+ - \varepsilon_- > 0$. Pro $\varepsilon_+ - \varepsilon_- < 0$ bude platit $\frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{2h} \rightarrow -\infty$. Pro výjimečný případ $\varepsilon_+ - \varepsilon_- = 0$ bude nahrazení samozřejmě bezchybné. Pro h výrazně menší než $|\varepsilon_+ - \varepsilon_-|$, bude chyba aproximace velká, a pro h výrazně větší než $|\varepsilon_+ - \varepsilon_-|$, bude chyba „rozumná“. Je tedy zjevné, že pro dosažení co nejmenší chyby aproximace musíme vhodně volit interpolační uzly (v této úloze krok $2h$) v závislosti na velikosti šumu. ■

Příklad 3 Necht $h \in \mathbb{R}^+$, $f \in C^3(\langle -h, h \rangle)$. Navážeme na příklad 2 a označíme chybu aproximace funkce f' v bodě 0:

$$E(h) = \frac{(f(h) + \varepsilon_+) - (f(-h) + \varepsilon_-)}{2h} - f'(0) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h} + \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{2h} - f'(0).$$

Pomocí Taylorova rozvoje⁶ funkce f v bodě 0 zapíšeme

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{1}{2}h^2f''(0) + \frac{1}{6}h^3f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (0, h),$$

⁶Viz Taylorovu větu A.2.5.

$$f(-h) = f(0) - hf'(0) + \frac{1}{2}h^2f''(0) - \frac{1}{6}h^3f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (-h, 0).$$

Můžeme tedy psát

$$f(h) - f(-h) = 2hf'(0) + \frac{1}{6}h^3(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)).$$

Protože f''' je spojitá na $\langle -h, h \rangle$, existuje $\xi \in (-h, h)$ takové, že $\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = f'''(\xi)$. Chybu $E(h)$ můžeme tedy zapsat jako

$$E(h) = \frac{1}{6}h^2f'''(\xi) + \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{2h}.$$

Položme nyní $\varepsilon = \max\{|\varepsilon_+|, |\varepsilon_-|\}$. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti a definice maximové normy⁷ dostáváme:

$$|E(h)| \leq \frac{1}{6}h^2\|f'''\|_\infty + \frac{\varepsilon}{h}.$$

Na závěr ještě vypočteme, ve kterém bodě nabývá funkce $e(h) = \frac{1}{6}h^2\|f'''\|_\infty + \frac{\varepsilon}{h}$ minimum na \mathbb{R}^+ , tj. nalezneme „optimální“ volbu h . Najdeme tedy stacionární bod(y) \tilde{h} :

$$e'(h) = \frac{1}{3}h\|f'''\|_\infty - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{h} = \left(\frac{3\varepsilon}{\|f'''\|_\infty} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Uvědomíme-li si, že funkce $e(h)$ je konvexní na \mathbb{R}^+ , pak je bod \tilde{h} určitě globálním minimem funkce $e(h)$ na množině \mathbb{R}^+ . Vypočetli jsme tedy nejlepší volbu kroku h tak, abychom minimalizovali chybu aproximace. ■

2.2 Úlohy k Lagrangeově interpolaci

V této kapitole vyřešíme vybrané úlohy z kapitoly 6 v knize [1]. Některé úlohy jsou vhodně upraveny nebo doplněny.

Úloha 2.1

(i) Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom $p_1 \in \mathcal{P}_1$ pro spojitou funkci f definovanou na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ s interpolačními uzly $x_0 = -1$, $x_1 = 1$. (ii) Ukažte, že je-li $f \in C^2(\langle -1, 1 \rangle)$, pak platí

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{M_2}{2}(1 - x^2) \leq \frac{M_2}{2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad (2.13)$$

kde $M_2 = \max_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |f''(x)|$. (iii) Najděte příklad funkce f a bodu x , pro které nerovnosti (2.13) přecházejí v rovnosti.

⁷Viz definici A.1.3.

Řešení: (i) Sestavíme kardinální funkce dle předpisu (2.5) a Lagrangeův interpolační polynom dle (2.7):

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = -\frac{1}{2}(x - 1), \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$p_1(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)f(-1) + \frac{1}{2}(x + 1)f(1) = \frac{1}{2}x(f(1) - f(-1)) + \frac{1}{2}(f(-1) + f(1)).$$

Správnost výpočtu můžeme ověřit také graficky (viz obrázek 2.5), obdobně jako v příkladu 2.

(ii) Druhá nerovnost v (2.13) je zřejmá. Z tvrzení (2.9) ve větě 3 víme, že v případě $n = 1$ platí

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{M_2}{2}|(x + 1)(x - 1)|.$$

Pro dokázání první nerovnosti tedy stačí ukázat, že $(x + 1)(x - 1) = (x^2 - 1) \leq 0$. Toto platí, protože $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Místo $|x^2 - 1|$ tedy můžeme psát $1 - x^2$ a nerovnost platí.

(iii) Pro funkci $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, tedy lineární funkci, platí zřejmě, že $p_1 \equiv f$ a $M_2 = 0$, platí tedy první rovnost v (2.13) pro libovolnou volbu $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Pro kvadratickou funkci $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ukážeme, že rovnosti v (2.13) nastanou pouze pro $x = 0$:

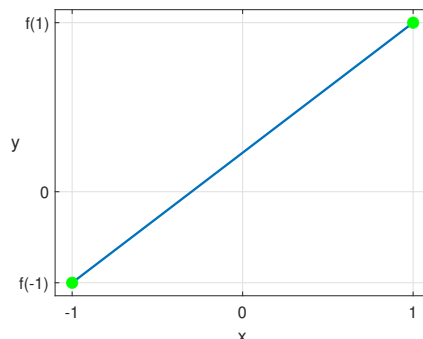
$$p_1(x) = -\frac{1}{2}x(a - b + c - a - b - c) + \frac{1}{2}(a - b + c + a + b + c) = xb + a + c,$$

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f''(x) = 2a,$$

$$|f(x) - p_1(x)| = |ax^2 + bx + c - bx - a - c| \leq \frac{|2a|}{2}(1 - x^2) \leq \frac{|2a|}{2},$$

$$|a|(1 - x^2) \leq |a|(1 - x^2) \leq |a|.$$

Druhá nerovnost přechází v rovnost právě tehdy, když $x = 0$.



Obrázek 2.5: Graf polynomu p_1 na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

Úloha 2.2

(i) Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom stupně 1 pro funkci $f(x) = x^3$ s interpolačními uzly $x_0 = 0$, $x_1 = a \in \mathbb{R}^+$. Dokažte větu 3 pro f přímým výpočtem. Ukažte, že v tomto případě je ξ jednoznačné pro každé $x \in (0, a)$. (ii) Zopakujte výpočet pro funkci $f(x) = (2x - a)^4$. Ukažte, že v tomto případě pro každé $x \in (0, a)$ může ξ nabývat právě dvou hodnot.

Řešení: (i) Lagrangeův interpolační polynom má dle (2.7) tvar

$$p_1(x) = \frac{x-a}{0-a}0 + \frac{x-0}{a-0}a^3 = a^2x.$$

Po dosazení do (2.8) dostáváme pro každé $x \in (0, a)$

$$\underbrace{x^3 - a^2x}_{=x(x-a)(x+a)} = \frac{6\xi}{2}(x-0)(x-a),$$

$$\text{tedy } x+a = 3\xi, \quad \text{a proto } \xi = \frac{1}{3}(x+a) \in (0, a).$$

(ii) Lagrangeův interpolační polynom má dle (2.7) tvar

$$p_1(x) = \frac{x-a}{0-a}a^4 + \frac{x-0}{a-0}a^4 = a^4.$$

Po dosazení do (2.8) platí pro každé $x \in (0, a)$

$$(2x-a)^4 - a^4 = \frac{1}{2} \left(192\xi^2 - 192a\xi + 48a^2 \right) x(x-a).$$

Po úpravách platí pro každé $x \in (0, a)$:

$$(2\xi - a)^2 = \frac{1}{3} (2x^2 - 2ax + a^2), \quad 2\xi - a = \pm \sqrt{\frac{(x-a)^2 + x^2}{3}},$$

$$\xi = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{(x-a)^2 + x^2}{12}} \in (0, a).$$

Zkoumané ξ může tedy nabývat právě dvou hodnot.



Úloha 2.3

Jsou dány různé body $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, n+1\}$. Necht q je Lagrangeův interpolační polynom stupně n pro množinu bodů $\{(x_i, y_i) : i = 0, \dots, n\}$ a r je Lagrangeův interpolační polynom stupně n pro množinu bodů $\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n+1\}$. Definujme

$$p(x) = \frac{(x - x_0)r(x) - (x - x_{n+1})q(x)}{x_{n+1} - x_0}. \quad (2.14)$$

Ukažte, že funkce p je Lagrangeův interpolační polynom stupně $n+1$ pro množinu bodů $\{(x_i, y_i) : i = 0, \dots, n+1\}$.

Řešení: Ověříme, že funkce p dána (2.14) splňuje Lagrangeovy interpolační podmínky (2.1) nejprve pro množinu bodů $\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$. V těchto bodech platí $q(x_i) = y_i$ a $r(x_i) = y_i$, a proto

$$p(x_i) = \frac{(x_i - x_0)y_i - (x_i - x_{n+1})y_i}{x_{n+1} - x_0} = y_i.$$

Vidíme, že podmínky (2.1) jsou splněny. Nyní ověříme podmínky pro $i = 0$ a $i = n+1$.

$$p(x_0) = \frac{(x_0 - x_0)r(x_0) - (x_0 - x_{n+1})y_0}{x_{n+1} - x_0} = y_0,$$

$$p(x_{n+1}) = \frac{(x_{n+1} - x_0)y_{n+1} - (x_{n+1} - x_{n+1})q(x_{n+1})}{x_{n+1} - x_0} = y_{n+1}.$$

V obou případech je funkce, o které v daném bodě mnoho nevíme (tedy q a r), vynásobena nulou.



Úloha 2.4

(i) Body $x_i \in \mathbb{R}$ jsou na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ rozloženy ekvidistantně, přesněji

$$x_i = \frac{2}{n}i - 1, \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

Ukažte, že

$$\prod_{i=0}^n \left(1 - \frac{1}{n} - x_i\right) = -\frac{(2n)!}{2^n n^{n+1} n!}.$$

(ii) Použitím Stirlingova vzorce

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

kde $a_n \approx b_n \xLeftrightarrow{\text{def.}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, ověřte, že

$$\prod_{i=0}^n \left(1 - \frac{1}{n} - x_i\right) \approx -\frac{2^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Řešení: (i) Ukazujeme vlastně chování $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$, kde $x = 1 - \frac{1}{n}$, tzn. x se nachází „na pravém okraji“ intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Platí:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n \left(1 - \frac{1}{n} - x_i\right) &= \prod_{i=0}^n \frac{2n - 1 - 2i}{n} = \frac{1}{n^{n+1}} (2n - 1)(2n - 3) \cdots 3 \cdot 1 \cdot (-1) = \\ &= -\frac{1}{n^{n+1}} \frac{(2n)!}{2n(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \cdot 2} = -\frac{(2n)!}{n^{n+1} 2^n n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1} = -\frac{(2n)!}{n^{n+1} 2^n n!}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n \left(1 - \frac{1}{n} - x_i\right) &= -\frac{(2n)!}{n^{n+1} 2^n n!} \approx -\frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{2^n n^{n+1} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \\ &= -\frac{2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{2^n n^{2n+\frac{3}{2}}} = -\frac{2^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n} \quad \text{pro } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

▲

Poznámka k úloze 2.4:

Po upravení si všimneme, že

$$\prod_{i=0}^n \left(1 - \frac{1}{n} - x_i\right) \approx -\frac{\sqrt{2}}{n} \left(\frac{2}{e}\right)^n \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

dominantní člen tedy určuje $\left(\frac{2}{e}\right)^n \doteq 0,7^n$, protože s rostoucím n klesá rychleji, než $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Pro eliminaci růstu chyby interpolované funkce na okrajích intervalu (např. Rungeovy funkce (2.11)) toto nestačí. Při zkoumání Čebyševových uzlů (např. tvrzení 3.2 na str. 17 v [7]) zjistíme, že dominantní řád určuje $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,5^n$. Při použití tohoto rozložení uzlů již chyba interpolace při okrajích intervalu konverguje k 0 s rostoucím n .

Úloha 2.5

Nechť $x_i \in \langle -1, 1 \rangle$, $x_i = 2(i/n) - 1$, $i = \{0, \dots, n\}$. Funkce p_n je Lagrangeův interpolační polynom funkce $f(x) = \cos(x)$ s interpolačními uzly x_i , $i = \{0, \dots, n\}$. Konverguje posloupnost (p_n) stejnoměrně k f na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$? Definice stejnoměrné konvergence A.1.2 je uvedena v příloze A.

Řešení: Ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |p_n(x) - f(x)| = 0$.⁸ Použijeme odhad (2.9):

$$0 \leq \max_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \max_{x \in \langle -1, 1 \rangle} \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Nyní využijeme odhad⁹ $\forall x \in \langle -1, 1 \rangle : \prod_{i=0}^n |x - x_i| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n!$ a dostáváme

$$\max_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \frac{1}{4} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n!.$$

Funkce $f^{(n+1)}$ může být pro všechna n pouze $\pm \sin$ nebo $\pm \cos$, takže $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq 1$. Platí tedy

$$\max_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{n!}{(n+1)!} \frac{1}{4} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1}$$

Zjevně $\frac{1}{4(n+1)} \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$ a pro $n \geq 3$ platí $0 \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Posloupnost $\left(\frac{2}{n}\right)^{n+1}$ lze zapsat jako $\left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right)^n$, takže $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} = 0$. Platí tedy, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} = 0.$$

Pomocí věty A.2.2 jsme ukázali, že $\max_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |p_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. ▲

⁸Viz větu A.2.1.

⁹Viz větu 2.4.2 v [6].

2.3 Hermiteova interpolace

Jednou z možností úpravy Lagrangeovy interpolace je rozšíření interpolačních podmínek. Od interpolačního polynomu můžeme, kromě nabývání dané hodnoty v odpovídajícím bodě, požadovat také nabývání určité hodnoty jeho první derivace v tomto bodě.

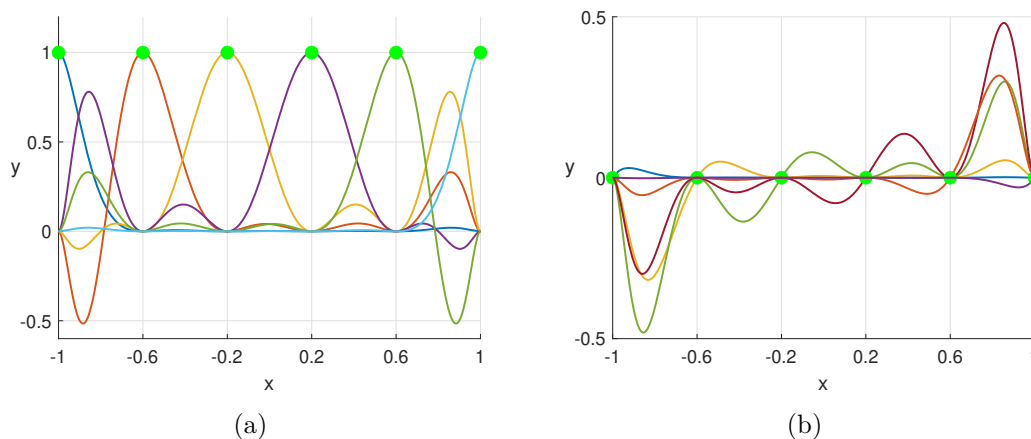
2.3.1 Kardinální funkce

Mějme tedy různé interpolační uzly x_i , kde $i \in \{0, \dots, n\}$, a dvě množiny reálných čísel $\{y_i : i = 0, \dots, n\}$ a $\{z_i : i = 0, \dots, n\}$. Hledáme interpolační polynom $p_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$ splňující **interpolační podmínky**

$$p_{2n+1}(x_i) = y_i \quad \text{a} \quad p'_{2n+1}(x_i) = z_i. \quad (2.15)$$

Pro konstrukci takového interpolačního polynomu jsou potřeba (na rozdíl od Lagrangeovy interpolace) dvě množiny **kardinálních funkcí** H_k a K_k , $k \in \{0, \dots, n\}$.

Na obrázku 2.6 jsou znázorněny kardinální funkce H_k a K_k pro ekvidistantní body x_i , $i \in \{0, \dots, 5\}$, na intervalu $(-1, 1)$ a na obrázku 2.7 jsou znázorněny derivace těchto funkcí. Kardinální funkce si lépe popíšeme v následující kapitole.



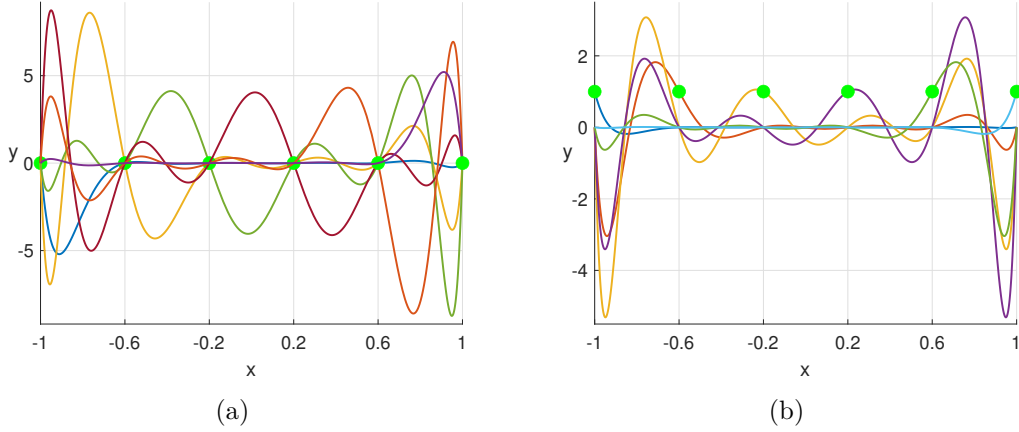
Obrázek 2.6: Funkce H_k (a) a K_k (b)

2.3.2 O existenci a jednoznačnosti Hermiteova interpolačního polynomu

Věta 5 *Nechť x_i jsou různá reálná čísla, kde $i \in \{0, \dots, n\}$. Jsou-li dány množiny reálných čísel y_i a z_i , kde $i \in \{0, \dots, n\}$, pak existuje jednoznačný polynom $p_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$ splňující podmínky (2.15).*

Důkaz [1] Nejdříve dokážeme existenci interpolačního polynomu jeho konstrukcí. Vytvoříme polynomy H_k a K_k pro $k \in \{0, \dots, n\}$ pomocí Lagrangeových kardinálních funkcí (2.5):

$$H_k = [L_k(x)]^2 [1 - 2L'_k(x_k)(x - x_k)] \in \mathcal{P}_{2n+1}, \quad (2.16)$$



Obrázek 2.7: Funkce H'_k (a) a K'_k (b)

$$K_k = [L_k(x)]^2 (x - x_k) \in \mathcal{P}_{2n+1}. \quad (2.17)$$

Pro $i \neq k$ platí

$$H_k(x_i) = 0, \quad K_k(x_i) = 0,$$

$$H'_k(x_i) = 2L_k(x_i)L'_k(x_i) [1 - 2L'_k(x_k)(x_i - x_k)] + [L_k(x_i)]^2 [-2L'_k(x_k)] = 0,$$

$$K'_k(x_i) = 2L_k(x_i)L'_k(x_i)(x_i - x_k) + [L_k(x_i)]^2 = 0.$$

Pro $i = k$ platí

$$H_k(x_k) = 1, \quad K_k(x_k) = 0, \quad H'_k(x_k) = 0, \quad K'_k(x_k) = 1.$$

Nyní sestavíme interpolační polynom

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n [H_k(x)y_k + K_k(x)z_k] \quad (2.18)$$

a ověříme, že splňuje podmínky (2.15):

$$p_{2n+1}(x_k) = \sum_{k=0}^n H_k(x_k)y_k = y_k, \quad p'_{2n+1}(x_k) = \sum_{k=0}^n H'_k(x_k)y_k + K'_k(x_k)z_k = z_k.$$

Pro důkaz jednoznačnosti interpolačního polynomu p_{2n+1} předpokládejme (pro spor), že existuje polynom $q_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$ různý od polynomu p_{2n+1} , který splňuje interpolační podmínky (2.15). Polynom $p_{2n+1} - q_{2n+1}$ má $n + 1$ kořenů v uzlech x_i , $i \in \{0, \dots, n\}$. Podle Rolleovy věty¹⁰ musí platit, že $p'_{2n+1} - q'_{2n+1}$ má n kořenů ležících mezi každou dvojicí po sobě jdoucích uzlů x_i , $i \in \{0, \dots, n\}$. Navíc, dle interpolačních podmínek, je polynom $p'_{2n+1} - q'_{2n+1}$ nulový v bodech x_i , $i \in \{0, \dots, n\}$. Polynom $p'_{2n+1} - q'_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n}$ má tedy $2n + 1$ kořenů, takže musí být identicky nulový. Funkce $p_{2n+1} - q_{2n+1}$ musí být tudíž konstantní. Z interpolačních podmínek ale vyplývá, že $(p_{2n+1} - q_{2n+1})(x_i) = 0$ pro $i \in \{0, \dots, n\}$. Polynom $p_{2n+1} - q_{2n+1}$ je

¹⁰Viz větu A.2.4.

tedy identicky nulový, což je v rozporu s předpokladem, že p_{2n+1} a q_{2n+1} jsou různé polynomy. Hermiteův interpolační polynom p_{2n+1} je tedy jedinečný. □

Definice 3 Necht $x_i, i \in \{0, \dots, n\}$, jsou různá reálná čísla a $y_i, z_i \in \mathbb{R}, i \in \{0, \dots, n\}$. Polynom (2.18), kde H_k a K_k jsou definovány v (2.16) a (2.17), nazýváme **Hermiteovým interpolačním polynomem stupně $2n + 1$ pro množinu bodů $\{(x_i, y_i, z_i) : i = 0, \dots, n\}$** . Čísla $x_i, i \in \{0, \dots, n\}$, nazýváme **interpolační uzly**.

Definice 4 Necht x_i jsou různá reálná čísla z intervalu $\langle a, b \rangle, i \in \{0, \dots, n\}, a, b \in \mathbb{R}$, a funkce $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$. Polynom p_{2n+1} definován jako

$$p_{2n+1} = \sum_{k=0}^n [H_k(x)f(x_k) + K_k(x)f'(x_k)] \quad (2.19)$$

nazýváme **Hermiteovým interpolačním polynomem stupně $2n + 1$ funkce f s interpolačními uzly $x_i, i \in \{0, \dots, n\}$** .

Příklad 4 Sestrojte Hermiteův interpolační polynom pro funkci $f(x) = e^x \cosh(x)$ se 3 interpolačními uzly $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 2$.

Tento příklad je analogií příkladu 1 na str. 10 z kapitoly o Lagrangeově interpolaci. Hodnoty L_0, L_1 a L_2 budou tedy stejné:

$$L_0(x) = \frac{x^2 - 2x}{8}, \quad L_1(x) = \frac{x^2 - 4}{-4}, \quad L_2(x) = \frac{x^2 + 2x}{8}.$$

Nyní vypočteme hodnoty Hermiteových kardinálních funkcí H_k a K_k :

$$H_0(x) = \frac{(x^2 - 2x)^2}{64} \left[1 + \frac{3}{2}(x + 2) \right] = \frac{x^2(x - 2)^2(3x + 8)}{128}, \quad K_0(x) = \frac{x^2(x - 2)^2(x + 2)}{64},$$

$$H_1(x) = \frac{(x^2 - 4)^2}{16} = \frac{(x + 2)^2(x - 2)^2}{16}, \quad K_1(x) = \frac{(x - 2)^2(x + 2)^2x}{16},$$

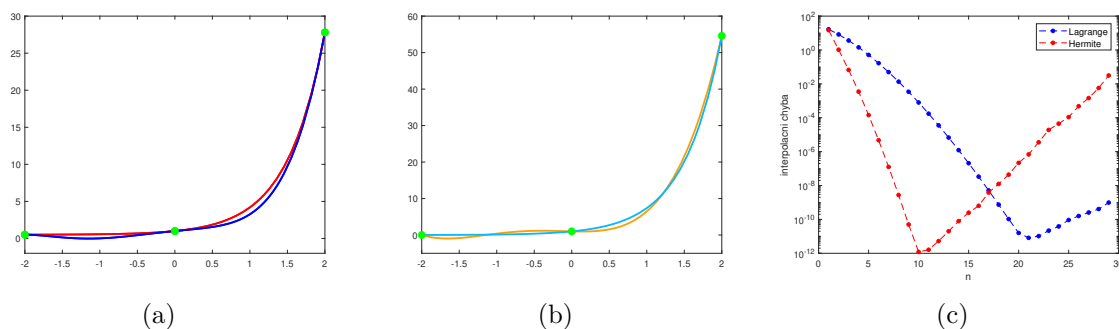
$$H_2(x) = \frac{(x^2 + 2x)^2}{64} \left[1 - \frac{3}{2}(x - 2) \right] = \frac{x^2(x + 2)^2(8 - 3x)}{128}, \quad K_2(x) = \frac{x^2(x + 2)^2(x - 2)}{64}$$

a sestavíme výsledný Hermiteův interpolační polynom

$$\begin{aligned} p_5(x) = e^{-2} \cosh(-2) \frac{x^2(x - 2)^2(3x + 8)}{128} + e^{-2} [\sinh(-2) + \cosh(-2)] \frac{x^2(x - 2)^2(x + 2)}{64} + \\ + \frac{(x + 2)^2(x - 2)^2}{16} + \frac{(x - 2)^2(x + 2)^2x}{16} + \\ + e^2 \cosh(2) \frac{x^2(x + 2)^2(8 - 3x)}{128} + e^2 [\sinh(2) + \cosh(2)] \frac{x^2(x + 2)^2(x - 2)}{64}. \end{aligned}$$

Na obrázku 2.8a je znázorněna modře funkce f a červeně Hermiteův interpolační polynom p_5 pro tuto funkci v interpolačních uzlech $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 2$ (zeleně jsou vyznačeny hodnoty

funkce f v interpolačních uzlech). Na obrázku 2.8b je modře znázorněna derivace funkce f a oranžově derivace interpolačního polynomu p_5 . Pro případ se čtyřmi interpolačními uzly již nevidíme v grafu rozdíl mezi interpolačním polynomem a interpolovanou funkcí. Na obrázku 2.8c je srovnání chyby Lagrangeova a Hermiteova interpolačního polynomu. Vidíme, že pro Hermiteovu interpolaci se chyba zmenšuje rychleji než pro interpolaci Lagrangeovu. Stejně jako na obrázku 2.3a na straně 13 je růst chyby od jistého n způsoben zaokrouhlovací chybou počítače.



Obrázek 2.8: Interpolace $f(x) = e^x \cosh(x)$ (a), odpovídající derivace (b) a srovnání chyb (c)

■

2.3.3 Chyba Hermiteovy interpolace

Nyní ještě uvedeme větu analogickou k větě 3 v kapitole o Lagrangeově interpolaci na straně 12 pro odhad velikosti chyby Hermiteovy interpolace.

Věta 6 *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^{2n+2}(\langle a, b \rangle)$, $p_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$ je Hermiteův interpolační polynom funkce f v interpolačních uzlech $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, n\}$. Pak pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ existuje $\xi = \xi(x) \in (a, b)$ takové, že*

$$f(x) - p_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2. \quad (2.20)$$

Navíc pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí

$$|f(x) - p_{2n+1}(x)| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2. \quad (2.21)$$

Důkaz [1] Rovnost (2.20) platí pro $x = x_i$, $i \in \{0, \dots, n\}$, viz interpolační podmínky (2.15). Dokážeme tedy, že (2.20) platí pro $x \in \langle a, b \rangle$: $x \neq x_i$, $i \in \{0, \dots, n\}$. Pro přehlednost označíme x jako t . Nejdříve sestavíme Hermiteův interpolační polynom $p_{2n+2} \in \mathcal{P}_{2n+2}$ v různých interpolačních uzlech x_0, \dots, x_n , $x \in \langle a, b \rangle$:

$$p_{2n+2}(t) = p_{2n+1}(t) + \lambda \prod_{i=0}^n (t - x_i)^2,$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Polynom p_{2n+2} zjevně splňuje interpolační podmínky pro body x_0, \dots, x_n . Aby splňoval podmínky také pro x , tedy aby $p_{2n+2}(x) = f(x)$, zvolíme

$$\lambda = \frac{f(x) - p_{2n+1}(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)^2}.$$

Nyní můžeme zadefinovat pomocnou funkci

$$\psi(t) = f(t) - p_{2n+1}(t) - \frac{f(x) - p_{2n+1}(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)^2} \prod_{i=0}^n (t - x_i)^2,$$

kteřá má význam chyby aproximace funkce f v interpolačních uzlech $x_0, \dots, x_n, x \in \langle a, b \rangle$ pomocí polynomu p_{2n+2} . Funkce ψ má tedy $n+2$ kořenů v bodech x_0, \dots, x_n, x . Dle Rolleovy věty¹¹ má funkce ψ' kořeny v $n+1$ bodech ležících mezi každou dvojicí po sobě jdoucích bodů z množiny $\{x_0, \dots, x_n, x\}$. Funkce ψ' má tvar

$$\psi'(t) = f'(t) - p'_{2n+1}(t) - \frac{f(x) - p_{2n+1}(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)^2} \left[\prod_{i=0}^n (t - x_i)^2 \right]'$$

Zapíšeme-li $\prod_{i=0}^n (t - x_i)^2$ jako $(t - x_k)^2 \underbrace{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (t - x_i)^2}_{=:\alpha_k(t)}$, pak podle pravidla pro derivování součinu

platí:

$$\left[\prod_{i=0}^n (t - x_i)^2 \right]' = \left[(t - x_k)^2 \alpha_k(t) \right]' = 2(t - x_k) \alpha_k(t) + (t - x_k)^2 \alpha_k'(t).$$

Je tedy zjevné, že funkce ψ' má kořeny v bodech $x_k, k \in \{0, \dots, n\}$. Má tedy celkově $2n+2$ kořenů v $\langle a, b \rangle$. Nyní použijeme opakovaně Rolleovu větu a zjistíme, že $\psi^{(2n+2)}$ má jeden kořen v intervalu (a, b) , který označíme ξ . Rozmyslíme-li si, že $\prod_{i=0}^n (t - x_i)^2$ má tvar $t^{2n+2} + q_{2n+1}(t)$, kde $q_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$, pak vidíme, že

$$0 = \psi^{(2n+2)}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi) - \underbrace{p_{2n+1}^{(2n+2)}(\xi)}_{=0} - \frac{f(x) - p_{2n+1}(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)^2} (2n+2)!.$$

Platí tedy, že

$$f(x) - p_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2.$$

□

¹¹Viz větu A.2.4.

2.4 Úlohy k Hermiteově interpolaci

V této kapitole vyřešíme vybrané úlohy z kapitoly 6 v knize [1]. Některé úlohy jsou vhodně upraveny nebo doplněny.

Úloha 2.6

(i) Ukažte, že maximum funkce $|q|$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ leží v bodě $\frac{1}{2}$, je-li

$$q(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x - 3).$$

(ii) Hodnoty funkce $f(x) = \sin(x)$ jsou dány v ekvidistantně rozdělených uzlech $x_i = i\frac{\pi}{8}$, $i \in \mathbb{Z}$. Zvolíme nyní $x \in \mathbb{R}$ a uvažujme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že platí $x_k \leq x < x_{k+1}$. Funkci f interpolujeme lokálně pomocí Lagrangeova interpolantu u v interpolačních uzlech $x_{k-2}, x_{k-1}, \dots, x_{k+3}$. Pro libovolnou volbu x odhadněte chybu interpolace $|f - u|$.

Řešení: (i) Zkusíme ověřit, zda je graf funkce q na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ osově souměrný podle přímky $x = \frac{1}{2}$, tj. ověříme, zda platí $q(x) = q(1 - x)$:

$$\begin{aligned} q(1 - x) &= (1 - x)(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3)(-x - 2) = \\ &= (1 - x)x(x - 2)(x + 1)(x - 3)(-x - 2) = \\ &= x(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x - 3) = q(x). \end{aligned}$$

Nyní ještě ověříme, zda je funkce q na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ ryze konvexní (nebo ryze konkávní).¹² Pro druhou derivaci q'' platí

$$q''(x) = 30x^4 - 60x^3 - 60x^2 + 90x + 8 > 0 \quad \text{pro } x \in (0, 1).$$

Funkce q je tedy na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ ryze konvexní. Protože je funkce q na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ nekladná, ryze konvexní a její graf je osově souměrný podle přímky $x = \frac{1}{2}$, má v bodě $x = \frac{1}{2}$ minimum, a tedy funkce $|q|$ má v bodě $x = \frac{1}{2}$ maximum, jehož hodnota je

$$\left| q\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{225}{64}.$$

Funkce $|q|$ je znázorněna na obrázku 2.9 a je zřejmé, že naše úvahy byly správné.

(ii) Nejprve si uvědomíme, že x má tvar

$$x = x_k + t_x \frac{\pi}{8}, \quad t_x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Zavedme transformaci

$$\xi(t) = x_k + t \frac{\pi}{8}, \quad t \in \langle -2, 3 \rangle,$$

¹²Zkoumání průběhu funkce je popsáno např. v [8] v sekci H na straně 62.

kteřá zobrazuje interval $\langle -2, 3 \rangle$ na $\langle x_{k-2}, x_{k+3} \rangle$. Funkci f a interpolant u můžeme tedy zapsat jako

$$u(\xi(t)) = u\left(x_k + t\frac{\pi}{8}\right) =: \tilde{u}(t), \quad f(\xi(t)) = f\left(x_k + t\frac{\pi}{8}\right) =: \tilde{f}(t)$$

a \tilde{u} je tedy interpolantem \tilde{f} v uzlech $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Nyní využijeme odhad z věty 3 na straně 12, a jelikož $t_x \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\xi(t_x) = x$, dostaneme

$$|u(x) - f(x)| = |\tilde{u}(t_x) - \tilde{f}(t_x)| \leq \frac{\max_{t \in \langle -2, 3 \rangle} |\tilde{f}^{(6)}(t)|}{6!} \prod_{i=-2}^3 |t_x - i|.$$

Podle pravidla o derivaci složené funkce určíme hodnotu derivace: $\tilde{f}^{(6)}(t) = -\sin(\xi(t)) \left(\frac{\pi}{8}\right)^6$. Zjevně tedy platí

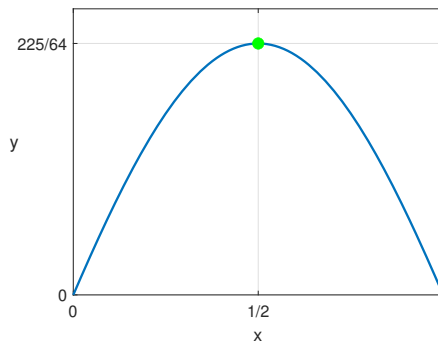
$$\max_{t \in \langle -2, 3 \rangle} |\tilde{f}^{(6)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{8}\right)^6.$$

Po rozepsání $\prod_{i=-2}^3 |t - i|$ si všimneme, že součin má stejný tvar, jako funkce $|q(t)|$ z části (i) této úlohy. Pro $t_x \in \langle 0, 1 \rangle$ tedy můžeme psát

$$\prod_{i=-2}^3 |t_x - i| \leq \frac{225}{64}.$$

Chybu interpolace tedy shora omezíme a všimneme si (jak lze očekávat), že nezávisí na volbě x :

$$|u(x) - f(x)| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^6}{6!} \frac{225}{64} = \frac{225\pi^6}{16^6 6!} < 1,8 \cdot 10^{-5}.$$



Obrázek 2.9: Graf funkce $|q(x)|$

Úloha 2.7

(i) Interpoláční uzly $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$, jsou rzne a pro každe $j \in \{0, \dots, n-1\}$ platí $x_{n+j} = x_j + \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Polynom $p_{2n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}$ je Lagrangeův interpoláčn polynom pro funkci $f \in C^1(\langle x_0, x_{2n-1} \rangle)$ v uzlech x_k , $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$. Ukažte, e členy polynomu p_{2n-1} obsahující $f(x_j)$ a $f(x_{n+j})$ mohou být zapsány jako

$$\frac{\varphi_j(x)\varphi_j(x-\varepsilon)}{\varepsilon\varphi_j(x_j)} \left[\frac{x-x_j}{\varphi_j(x_j+\varepsilon)} f(x_j+\varepsilon) - \frac{x-x_j-\varepsilon}{\varphi_j(x_j-\varepsilon)} f(x_j) \right], \quad (2.22)$$

kde

$$\varphi_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n-1} (x-x_i).$$

(ii) Najděte limitu funkce s předpisem (2.22) pro $\varepsilon \rightarrow 0_+$ a pevne $x \in \mathbb{R}$.

Řešení: (i) Lagrangeův interpoláčn polynom p_{2n-1} má dle (2.7) tvar

$$p_{2n-1}(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} L_k(x)f(x_k) = \sum_{j=0}^{n-1} [L_j(x)f(x_j) + L_{n+j}(x)f(x_{n+j})].$$

Označme $\Phi_j(x, \varepsilon) = L_j(x)f(x_j) + L_{n+j}(x)f(x_j + \varepsilon)$. Pro $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tedy platí

$$\begin{aligned} L_j(x) &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{2n-1} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n-1} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \prod_{i=n}^{2n-1} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} = \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n-1} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x-x_i-\varepsilon}{x_j-x_i-\varepsilon} = \frac{\varphi_j(x)}{\varphi_j(x_j)} \frac{\varphi_j(x-\varepsilon)(x-x_j-\varepsilon)}{-\varepsilon\varphi_j(x_j-\varepsilon)} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} L_{n+j}(x) &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n+j}}^{2n-1} \frac{x-x_i}{x_{n+j}-x_i} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x-x_i}{x_j+\varepsilon-x_i} \prod_{\substack{i=n \\ i \neq n+j}}^{2n-1} \frac{x-x_i}{x_j+\varepsilon-x_i} = \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x-x_i}{x_j+\varepsilon-x_i} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n-1} \frac{x-x_i-\varepsilon}{x_j+\varepsilon-x_i-\varepsilon} = \frac{\varphi_j(x)(x-x_j)}{\varepsilon\varphi_j(x_j+\varepsilon)} \frac{\varphi_j(x-\varepsilon)}{\varphi_j(x_j)}. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$\Phi_j(x, \varepsilon) = \frac{\varphi_j(x)\varphi_j(x-\varepsilon)}{\varepsilon\varphi_j(x_j)} \underbrace{\left[\frac{x-x_j}{\varphi_j(x_j+\varepsilon)} f(x_j+\varepsilon) - \frac{x-x_j-\varepsilon}{\varphi_j(x_j-\varepsilon)} f(x_j) \right]}_{=:\psi_j(\varepsilon)}.$$

(ii) Nyní vypočteme limitu $\Phi_j(x, \varepsilon)$ pro $\varepsilon \rightarrow 0_+$ a pevné $x \in \mathbb{R}$. Uvědomíme si, že pro $\varepsilon \rightarrow 0_+$ platí $\varphi_j(x - \varepsilon) \rightarrow \varphi_j(x)$. Platí tedy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \Phi_j(x, \varepsilon) = \frac{[\varphi_j(x)]^2}{\varphi_j(x_j)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{\psi_j(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Pro $\varepsilon \rightarrow 0_+$ zjevně platí $\psi_j(\varepsilon) \rightarrow 0_+$, takže můžeme zkusit použít l'Hospitalovo pravidlo:¹³

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \Phi_j(x, \varepsilon) = \frac{[\varphi_j(x)]^2}{\varphi_j(x_j)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \psi'_j(\varepsilon).$$

Podle pravidla o derivaci podílu spočteme ψ'_j :

$$\begin{aligned} \psi'_j(\varepsilon) &= \frac{\varphi_j(x_j + \varepsilon)(x - x_j)f'(x_j + \varepsilon) - \varphi'_j(x_j + \varepsilon)(x - x_j)f(x_j + \varepsilon)}{[\varphi_j(x_j + \varepsilon)]^2} - \\ &\quad - \frac{f(x_j) \left[(x - x_j - \varepsilon)\varphi'_j(x_j - \varepsilon) - \varphi_j(x_j - \varepsilon) \right]}{[\varphi_j(x_j - \varepsilon)]^2} \end{aligned}$$

a upravíme pro $\varepsilon \rightarrow 0_+$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \psi'_j(\varepsilon) = f'(x_j) \frac{\varphi_j(x_j)(x - x_j)}{[\varphi_j(x_j)]^2} - f(x_j) \left[\frac{\varphi'_j(x_j)(x - x_j)}{[\varphi_j(x_j)]^2} - \frac{(x - x_j)\varphi'_j(x_j) - \varphi_j(x_j)}{[\varphi_j(x_j)]^2} \right].$$

Nyní můžeme dopočíst požadovanou limitu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \Phi_j(x, \varepsilon) = \left[\frac{\varphi_j(x)}{\varphi_j(x_j)} \right]^2 (x - x_j)f'(x_j) + \left[\frac{\varphi_j(x)}{\varphi_j(x_j)} \right]^2 \left[1 - 2 \frac{\varphi'_j(x_j)}{\varphi_j(x_j)} (x - x_j) \right] f(x_j). \quad (2.23)$$

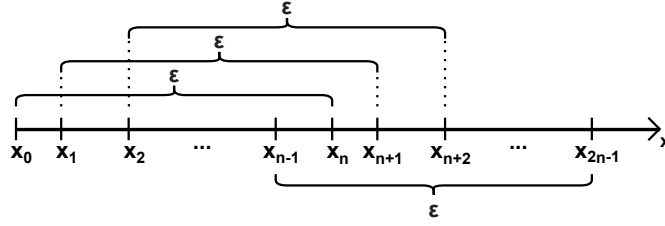
▲

Poznámka k úloze 2.7:

Rozmyslíme-li si, že Lagrangeova kardinální funkce má pro uzly x_0, \dots, x_{n-1} při zápisu pomocí φ_j tvar $L_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\varphi_j(x_j)}$, můžeme vidět shodu mezi (2.23) a tvarem Hermiteova interpolačního polynomu (2.19). Tímto jsme tedy ukázali, že Hermiteův interpolační polynom v n interpolačních uzlech je limitním případem Lagrangeova interpolačního polynomu v $2n$ speciálně rozdělených uzlech.

Podívejme se ještě blíže na rozdělení uzlů x_k , $k \in \{0, \dots, 2n - 1\}$, které je znázorněno na obrázku 2.10. Můžeme si všimnout, že díky podmínce $x_{n+j} = x_j + \varepsilon$, $j \in \{0, \dots, n - 1\}$, je vzdálenost mezi uzly x_j a x_{n+j} vždy ε . Distribuce uzlů x_0, \dots, x_{n-1} je tedy stejná jako distribuce uzlů x_n, \dots, x_{2n-1} .

¹³Viz větu A.2.3.



Obrázek 2.10: Distribuce uzlů x_k

Úloha 2.8

Vytvořte Hermiteův interpolační polynom stupně 3 pro funkci $f(x) = x^5$ v interpolačních uzlech $x_0 = 0$ a $x_1 = a \in \mathbb{R}^+$. Ověřte větu 6 ze strany 26 přímým výpočtem a ukažte, že ξ je jednoznačné pro každé $x \in (0, a)$.

Řešení: Nejprve si všimneme, že $f(x_0) = 0$ a $f'(x_0) = 0$, takže nemusíme počítat H_0 a K_0 . Spočteme tedy jen polynomy H_1 a K_1 dle (2.16) a (2.17):

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x}{a}, \quad H_1(x) = \frac{x^2}{a^2} \left[1 - \frac{2}{a}(x - a) \right], \quad K_1(x) = \frac{x^2}{a^2}(x - a).$$

Nyní určíme Hermiteův interpolační polynom p_3 dle (2.18):

$$p_3(x) = H_1(x)f(x_1) + K_1(x)f'(x_1) = \dots = 3x^3a^2 - 2x^2a^3.$$

Pro chybu interpolace platí

$$f(x) - p_3(x) = x^5 - 3a^2x^3 + 2a^3x^2.$$

Ukažme nyní platnost věty 6, tj. zvolme $x \in (0, a)$ a pišme

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 = \frac{120\xi}{24}x^2(x - a)^2 = 5\xi(x^4 - 2ax^3 + a^2x^2).$$

Dělením polynomů tedy vyřešíme rovnici

$$x^5 - 3a^2x^3 + 2a^3x^2 = 5\xi(x^4 - 2ax^3 + a^2x^2).$$

Pro krajní případy $x = 0$ a $x = a$ bychom mohli volit ξ libovolně, musíme tedy uvažovat x v intervalu $(0, a)$. Pro každé $x \in (0, a)$ tedy existuje právě jedno $\xi = \frac{1}{5}(x + 2a) \in (0, a)$ takové, že platí rovnost (2.20) z věty 6 na straně 26.



Kapitola 3

Polynomiální interpolace po částech

V této kapitole budeme vycházet opět z knihy E. Süliho a D. F. Mayerse [1], z knihy W. Shen [2] a také z knihy C. De Boora [3] a ze skript V. Vondráka a L. Pospíšila [5]. V předchozí kapitole jsme se zabývali Lagrangeovou a Hermiteovou interpolací, tedy hledáním interpolačního polynomu dané funkce, který je definován stejným předpisem na celém interpolačním intervalu. Tyto způsoby interpolace mají ale několik nedostatků. Mohou se například vyskytnout velké chyby interpolační funkce na okrajích intervalu (např. v případě Rungeovy funkce (2.11)), nebo může interpolační polynom nabývat velmi vysokých řádů (což může způsobit velké „rozkmítání“ polynomu mezi interpolačními uzly). Jednou z vlastností polynomů je nekonečná diferencovatelnost (tedy vysoký stupeň hladkosti), která ale často není potřeba. Při polynomiální interpolaci po částech nejprve interval rozdělíme na několik podintervalů a interpolaci provádíme na každém podintervalu zvlášť. Po interpolační funkci, kterou budeme nazývat splajn, požadujeme rozumnou třídu hladkosti a přesnou interpolaci v krajních bodech podintervalů. Interpolační uzly značíme $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, m\}$, a požadujeme $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Známe také body $y_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, m\}$, tedy funkční hodnoty interpolované funkce v interpolačních uzlech. Hledáme tedy splajn s takový, že $s(x_i) = y_i$ pro každé $i \in \{0, \dots, m\}$.

Definice 5 Funkce s se nazývá **splajn řádu n** , jestliže $s \in C^{n-1}(\langle a, b \rangle)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, m\}$, a

$$\forall i \in \{0, \dots, m\} : s(x_i) = y_i \quad \text{a} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} : s|_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} \in \mathcal{P}_n. \quad (3.1)$$

3.1 Lineární splajny

Nejjednodušším případem interpolace po částech je interpolace lineárním splajnem. Takový interpolační splajn můžeme popsat jako spojitou, po částech lineární funkci, tedy lomenou čáru. Nejdříve uvedeme přesnou definici lineárního splajnu.

Definice 6 Necht $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, m\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $m \geq 2$, jsou interpolační uzly a $y_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, m\}$, jsou hodnoty funkce f v těchto uzlech. **Lineární**

splajn s_L interpolující funkci f v interpolačních uzlech x_i je definován jako

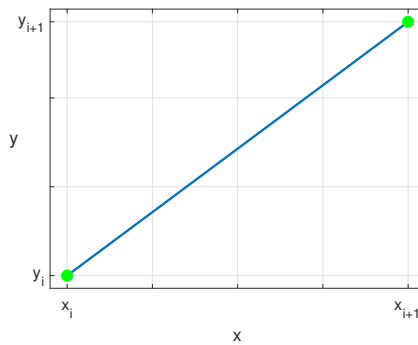
$$s_L(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_i, \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, \quad i \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Tento tvar lineárního splajnu je zjevný také z obrázku 3.1.

Uvedeme také **Lagrangeův tvar lineárního splajnu**, který odpovídá předpisu pro Lagrangeovu interpolaci pro 2 uzly uvedený v definici 1 v kapitole 2.1.1 na straně 10:

$$s_L(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}y_{i+1}, \quad i \in \{0, \dots, m-1\}. \quad (3.2)$$

Lagrangeův tvar lineárního splajnu s_L bude důležitý v následující kapitole pro odvození kubického splajnu.



Obrázek 3.1: Lineární splajn s_L na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$

Věta 7 *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^2(\langle a, b \rangle)$ a s_L je lineární splajn, který interpoluje funkci f v uzlech $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, m\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$. Pak platí*

$$\|f - s_L\|_\infty \leq \frac{1}{8}h^2\|f''\|_\infty,$$

kde $h = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, m\}$.

Důkaz [1] Budeme uvažovat podinterval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Dle věty 3 uvedené v podkapitole 2.1.2 na straně 12 platí $\forall x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$:

$$|f(x) - s_L(x)| \leq \frac{1}{2}\|f''\|_\infty|x - x_{i-1}||x - x_i|.$$

Všimneme si, že minimum kvadratické funkce $(x - x_{i-1})(x - x_i)$ leží v bodě $\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$. Maximum funkce $|x - x_{i-1}||x - x_i|$ na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ bude tedy také v bodě $\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ a hodnota tohoto maxima je $\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4}$. Rozšíříme-li interval na $\langle a, b \rangle$ můžeme hodnotu $\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4}$ shora omezit jako $\frac{h^2}{4}$. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ tedy platí

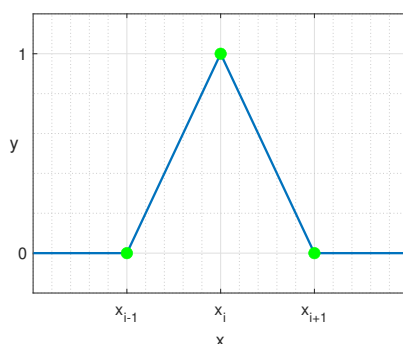
$$|f(x) - s_L(x)| \leq \frac{1}{8}\|f''\|_\infty h^2.$$

3.1.1 Bázové funkce lineárního splajnu

Lineární splajn s_L interpolující funkci f v uzlech x_i , $i \in \{0, \dots, m\}$, jsme v definici 6 určili předpisem na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Jiná možnost popisu lineárního splajnu je jeho vyjádření vhodnou lineární kombinací **bázových funkcí** φ_i :

$$s_L(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) \varphi_i(x).$$

Funkce φ_i jsou po částech lineární a splňují podmínky $\varphi_i(x_i) = 1$, kde $i \in \{0, \dots, m\}$, a $\varphi_i(x_j) = 0$ pro $i \neq j$, kde $i, j \in \{0, \dots, m\}$. Na obrázku 3.2 je znázorněna bázová funkce φ_i , $i \in \{1, \dots, m-1\}$.



Obrázek 3.2: Bázová funkce φ_i lineárního splajnu s_L

Zapišeme si nyní předpisy bázových funkcí φ_i . Označíme $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, a $x_0 = a$, $x_m = b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pro $i \in \{1, \dots, m-1\}$ bude tvar φ_i následující:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } a \leq x < x_{i-1} \quad \vee \quad b \geq x > x_{i+1}, \\ \frac{1}{h_i}(x - x_{i-1}) & \text{pro } x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle, \\ \frac{1}{h_{i+1}}(x_{i+1} - x) & \text{pro } x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle. \end{cases} \quad (3.3)$$

Bázové funkce φ_0 a φ_m mají tvar

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_1}(x_1 - x) & \text{pro } x \in \langle a, x_1 \rangle, \\ 0 & \text{pro } b \geq x > x_1, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_m}(x - x_{m-1}) & \text{pro } x \in \langle x_{m-1}, b \rangle, \\ 0 & \text{pro } a \leq x < x_{m-1}. \end{cases} \quad (3.5)$$

3.2 Přirozené kubické splajny

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b \rangle)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, m\}$, $a = x_0 < \dots < x_m = b$. Uvažujme množinu S obsahující funkce $s \in C^2(\langle a, b \rangle)$ splňující podmínky (3.1). Funkce s jsou **kubické splajny**, které nejsou dány jednoznačně (jak si ukážeme později v úloze 3.1 na straně 46). Pro jednoznačnost nám chybí 2 podmínky, které vhodně zadáme.

Jedním z nejčastějších kubických splajnů je **přirozený kubický splajn** s_2 , pro který jako dvě dodatečné podmínky použijeme

$$s_2''(a) = s_2''(b) = 0. \quad (3.6)$$

3.2.1 Konstrukce přirozeného kubického splajnu

Označme

$$\sigma_i = s_2''(x_i), \quad i \in \{0, \dots, m\},$$

a $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Z podmínek (3.6) víme, že $\sigma_0 = \sigma_m = 0$. Všimněme si, že s_2'' je lineární funkce na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a můžeme ji vyjádřit pomocí Lagrangeova tvaru lineárního splajnu (3.2) na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ jako

$$s_2''(x) = \frac{x_i - x}{h_i} \sigma_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \sigma_i.$$

Integrací s_2'' získáme

$$s_2'(x) = -\frac{\sigma_{i-1}}{h_i} \frac{(x_i - x)^2}{2} + \frac{\sigma_i}{h_i} \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + \alpha_i - \beta_i, \quad (3.7)$$

kde $\alpha_i - \beta_i$ je integrační konstanta, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Opětovnou integrací získáme

$$s_2(x) = \frac{\sigma_{i-1}}{h_i} \frac{(x_i - x)^3}{6} + \frac{\sigma_i}{h_i} \frac{(x - x_{i-1})^3}{6} + \alpha_i(x - x_{i-1}) + \beta_i(x_i - x). \quad (3.8)$$

Na podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ musí platit interpolační podmínky $s_2(x_i) = f(x_i)$ a $s_2(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$. Po dosazení x_i a x_{i-1} do (3.8) získáme rovnice

$$s_2(x_i) = \frac{\sigma_i}{6} h_i^2 + \alpha_i h_i = f(x_i), \quad s_2(x_{i-1}) = \frac{\sigma_{i-1}}{6} h_i^2 + \beta_i h_i = f(x_{i-1}).$$

Z těchto rovnic můžeme vyjádřit α_i a β_i :

$$\alpha_i = \frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{\sigma_i}{6} h_i, \quad \beta_i = \frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{\sigma_{i-1}}{6} h_i, \quad (3.9)$$

kteří dosadíme zpět do předpisů (3.7) a (3.8) pro s_2 a s_2' :

$$s_2(x) = \frac{\sigma_{i-1}}{h_i} \frac{(x_i - x)^3}{6} + \frac{\sigma_i}{h_i} \frac{(x - x_{i-1})^3}{6} + \left[\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{\sigma_i}{6} h_i \right] (x - x_{i-1}) + \left[\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{\sigma_{i-1}}{6} h_i \right] (x_i - x),$$

$$s_2'(x) = -\frac{\sigma_{i-1}}{h_i} \frac{(x_i - x)^2}{2} + \frac{\sigma_i}{h_i} \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + \underbrace{\frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h_i}}_{=: \gamma_i} - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{6} h_i. \quad (3.10)$$

Od splajnu s_2 požadujeme spojitost až do 2. derivace včetně na intervalu $\langle a, b \rangle$. Spojitost s_2'' jsme zaručili konstrukcí, zapíšeme tedy podmínky pro spojitost s_2' na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Spojitost zaručíme rovností levé a pravé derivace ve vnitřních interpolačních uzlech, tedy $s_2'(x_i^-) = s_2'(x_i^+)$, $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Derivace zleva $s_2'(x_i^-)$ má tvar

$$s_2'(x_i^-) = \frac{\sigma_i}{2} h_i + \gamma_i - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{6} h_i.$$

Pro získání předpisu pro $s_2'(x_i^+)$ musíme nejdříve určit tvar s_2' na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$:¹

$$s_2'(x) = -\frac{\sigma_i}{h_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2} + \frac{\sigma_{i+1}}{h_{i+1}} \frac{(x - x_i)^2}{2} + \gamma_{i+1} - \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{6} h_{i+1}.$$

Nyní můžeme zapsat:

$$s_2'(x_i^+) = -\frac{\sigma_i}{2} h_{i+1} + \gamma_{i+1} - \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{6} h_{i+1}.$$

Požadujeme platnost rovnosti $s_2'(x_i^-) = s_2'(x_i^+)$, $i \in \{1, \dots, m-1\}$, tedy $s_2'(x_i^-) - s_2'(x_i^+) = 0$:

$$\frac{\sigma_i}{2} h_i + \gamma_i - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{6} h_i + \frac{\sigma_i}{2} h_{i+1} - \gamma_{i+1} + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{6} h_{i+1} = 0.$$

Po vynásobení obou stran číslem 6 a drobných úpravách získáme $m-1$ rovnic

$$h_i \sigma_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \sigma_i + h_{i+1} \sigma_{i+1} = 6(\gamma_{i+1} - \gamma_i), \quad i \in \{1, \dots, m-1\}. \quad (3.11)$$

Tuto soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat také maticově:

$$\begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & \dots \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & h_{m-1} & 2(h_{m-1} + h_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \gamma_2 - \gamma_1 \\ \gamma_3 - \gamma_2 \\ \gamma_4 - \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_m - \gamma_{m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Vidíme, že matice soustavy (3.12) je čtvercová, třídiagonální, symetrická a ryze řádkově diagonálně dominantní.² Ze symetrie matice vyplývá, že spektrum matice je reálné.³ Z Geršgorinovy věty⁴ plyne, že spektrum matice je v \mathbb{R}^+ , matice je tedy pozitivně definitní, a tedy také regulární.⁵

Nyní víme, že soustava (3.12) je jednoznačně řešitelná. Po vyřešení soustavy získáme hodnoty σ_i , $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Hodnoty σ_0 , σ_m a h_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, známe, máme tedy vše pro sesta-

¹Vycházíme z tvaru (3.10) s posunutou indexací.

²Viz definici A.1.4.

³Viz větu A.2.7.

⁴Viz větu A.2.9.

⁵Viz větu A.2.10.

vení přirozeného kubického splajnu s_2 dle (3.8). Hodnoty α_i a β_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, získáme z předpisů (3.9).

Příklad 5 Interpolujme funkci $f(x) = \cos(x)$ v uzlech $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \pi$ přirozeným kubickým splajnem s_2 .

Interpolační uzly jsou rozloženy ekvidistantně, všechny kroky h_i budou tedy stejné a označíme je $h = \frac{\pi}{2}$. Nejprve spočteme hodnoty $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ dle předpisu $\gamma_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}$ (viz (3.10)):

$$\gamma_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2}) - \cos(-\pi)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{\pi}, \quad \gamma_3 = -\frac{2}{\pi}, \quad \gamma_4 = -\frac{2}{\pi}.$$

Nyní vytvoříme soustavu dle (3.12):

$$\begin{bmatrix} 2\pi & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 2\pi & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 2\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

a vyřešíme ji:

$$\sigma_1 = \frac{24}{7\pi^2}, \quad \sigma_2 = -\frac{96}{7\pi^2}, \quad \sigma_3 = \frac{24}{7\pi^2}.$$

Protože hledáme přirozený kubický splajn, máme dáno $\sigma_0 = \sigma_4 = 0$. Teď můžeme dopočítat koeficienty α_i a β_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$, dle (3.9):

$$\alpha_1 = \frac{\cos(x_1)}{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sigma_1 \pi}{6 \cdot 2} = -\frac{2}{7\pi}, \quad \alpha_2 = \frac{22}{7\pi}, \quad \alpha_3 = -\frac{2}{7\pi}, \quad \alpha_4 = -\frac{2}{\pi},$$

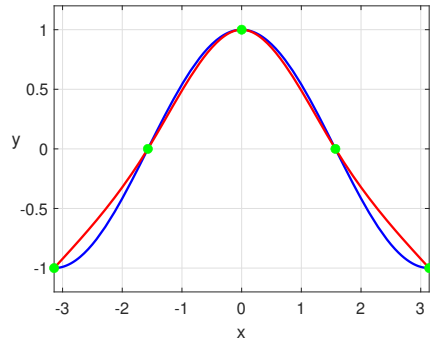
$$\beta_1 = \frac{\cos(x_0)}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}, \quad \beta_2 = -\frac{2}{7\pi}, \quad \beta_3 = \frac{22}{7\pi}, \quad \beta_4 = -\frac{2}{7\pi}.$$

Máme tedy vše potřebné pro sestavení kubického splajnu s_2 dle (3.8):

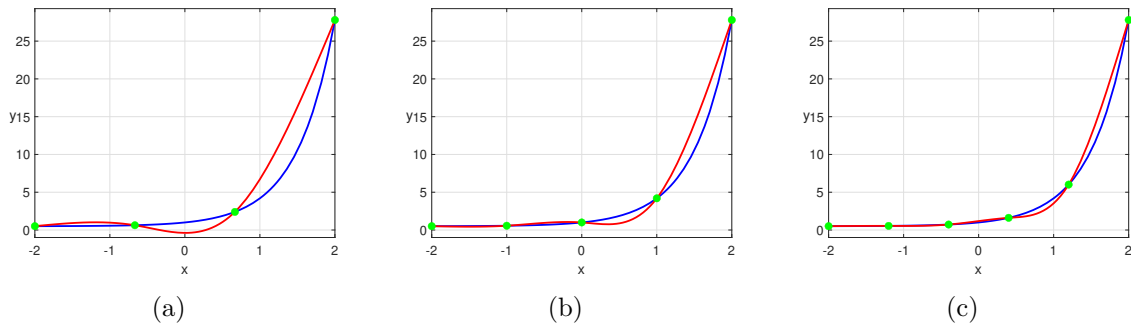
$$s_2(x) = \begin{cases} \frac{48(x+\pi)^3}{42\pi^3} - \frac{2(x+\pi)}{7\pi} - \frac{2(-\frac{\pi}{2}-x)}{\pi} & \text{pro } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{-48x}{42\pi^3} - \frac{192(x-\frac{\pi}{2})^3}{42\pi^3} + \frac{22(x+\frac{\pi}{2})}{7\pi} + \frac{2x}{7\pi} & \text{pro } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ -\frac{192(\frac{\pi}{2}-x)^3}{42\pi^3} + \frac{48x^3}{42\pi^3} - \frac{2(x+\frac{\pi}{2})}{7\pi} + \frac{22(\frac{\pi}{2}-x)}{7\pi} & \text{pro } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{48(\pi-x)^3}{42\pi^3} - \frac{2(x-\frac{\pi}{2})}{\pi} - \frac{2\pi-x}{7\pi} & \text{pro } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Tento interpolační splajn je znázorněn na obrázku 3.3 červeně spolu s interpolovanou funkcí $f(x) = \cos(x)$ (modře). Zeleně jsou vyznačeny hodnoty funkce f v zadaných interpolačních uzlech. ■

Příklad 6 Na obrázku 3.4 je znázorněna interpolace funkce $e^x \cosh(x)$ na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ v 4, 5 a 6 ekvidistantně rozložených interpolačních uzlech (interpolovaná funkce modře, interpolační splajn červeně). ■

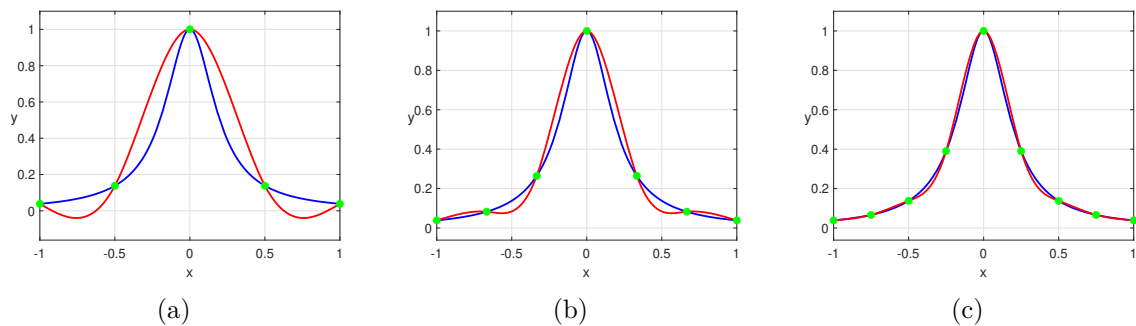


Obrázek 3.3: Interpolace funkce $\cos(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$



Obrázek 3.4: Interpolace funkce $e^x \cosh(x)$ ve 4 bodech (a), 5 bodech (b) a 6 bodech (c)

Příklad 7 Na obrázku 3.5 je znázorněna interpolace Rungeovy funkce $\frac{1}{1+25x^2}$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ v 5, 7 a 9 ekvidistantně rozložených interpolačních uzlech (interpolovaná funkce modře, interpolační splajn červeně). Vidíme, že nedochází k velikým chybám na okrajích intervalu, které jsme pozorovali u polynomiální interpolace na ekvidistantní síti uzlů v kapitole 2.1.3 na straně 14.



Obrázek 3.5: Interpolace Rungeovy funkce v 5 bodech (a), 7 bodech (b) a 9 bodech (c)

■

3.2.2 Hladkost přirozeného kubického splajnu

Věta 8 Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^2(\langle a, b \rangle)$ a s_2 je přirozený kubický splajn interpolující funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ v uzlech $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, m\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$. Pak

$$\int_a^b [s_2''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx.$$

Důkaz [1, 2] Definujme chybovou funkci

$$e(x) = f(x) - s_2(x), \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Víme (z interpolačních podmínek (3.1)), že $e(x_i) = 0$, $i \in \{0, \dots, m\}$, a funkci f zapíšeme jako $f(x) = s_2(x) + e(x)$. Pak

$$f''(x) = s_2''(x) + e''(x)$$

a

$$[f''(x)]^2 = [s_2''(x)]^2 + 2s_2''(x)e''(x) + [e''(x)]^2.$$

Nyní můžeme vyjádřit integrál:

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx = \int_a^b [s_2''(x)]^2 dx + 2 \int_a^b s_2''(x)e''(x) dx + \int_a^b [e''(x)]^2 dx.$$

Funkce $[e''(x)]^2$ je nezáporná, bude tedy platit $\int_a^b [e''(x)]^2 dx \geq 0$, a stačí proto ukázat, že $\int_a^b s_2''(x)e''(x) dx \geq 0$. Integrál vypočteme pomocí metody per partes:⁶

$$\int_a^b s_2''(x)e''(x) dx = \left| \begin{array}{l} u=s_2''(x) \\ u'=s_2'''(x) \end{array} \right|_{v=e''(x)} = [s_2''(x)e'(x)]_a^b - \int_a^b s_2'''(x)e'(x) dx.$$

Po rozepsání $[s_2''(x)e'(x)]_a^b = s_2''(b)e'(b) - s_2''(a)e'(a) = 0$, protože dodatečné podmínky přirozeného kubického splajnu jsou $s_2''(a) = 0 = s_2''(b)$. Protože také víme, že s_2 je na intervalu $\langle a, b \rangle$ po částech kubická funkce, je s_2''' po částech konstantní. Platí tedy $\forall x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$: $s_2'''(x) = c_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $c_i \in \mathbb{R}$. Můžeme tedy psát

$$\int_a^b s_2''(x)e''(x) dx = - \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} e'(x) dx}_{=[e(x)]_{x_{i-1}}^{x_i}=0} = 0.$$

□

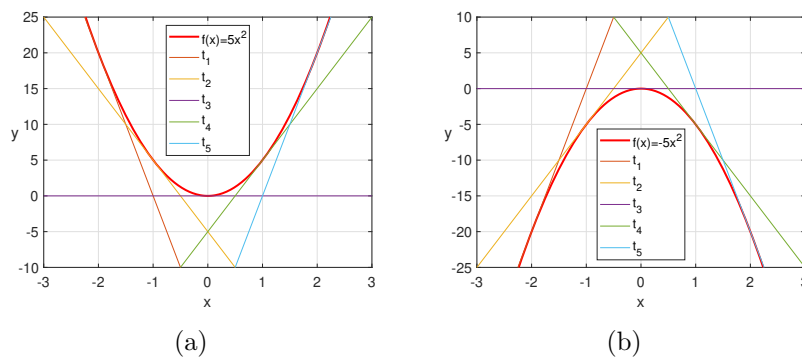
Poznámka k významu 2. derivace:

Geometrický význam první derivace funkce f v bodě x_0 je směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$. Druhá derivace určuje, jak se mění směrnice tečny ke grafu f , jinými slovy nám říká, jakou křivost má funkce f . Například uvažujeme-li spojitou, ryze konvexní funkci, směrnice tečen s rostoucím x také rostou a druhá derivace funkce je kladná. Uvažujeme-li

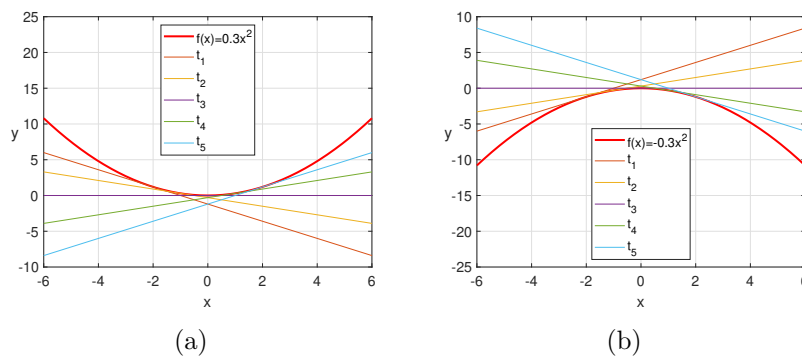
⁶Viz větu A.2.11.

funkci ryze konkávní, směrnice klesají a druhá derivace funkce je záporná. Na obrázku 3.6a je znázorněna funkce $f(x) = 5x^2$ (červeně) a tečny ke grafu této funkce v bodech dotyku $\{(x, f(x)) : x = -2, -1, 0, 1, 2\}$. Druhá derivace této funkce je $f''(x) = 10$. Na obrázku 3.6a je znázorněná stejná funkce, jen s opačným znaménkem: $f(x) = -5x^2$. Druhá derivace této funkce je $f''(x) = -10$. Na obrázcích 3.7a a 3.7b jsou znázorněny funkce „s menší křivostí“ $f(x) = \pm 0,3x^2$. Druhé derivace těchto funkcí jsou $f''(x) = \pm 0,6$. Vidíme, že čím má funkce „větší křivost“, tím rychleji se mění směrnice tečen ke grafu této funkce a druhá derivace funkce má vyšší (respektive nižší) hodnoty. Směrnice funkce s menší křivostí se mění pomalu a hodnoty druhé derivace této funkce jsou nižší (respektive vyšší). Všimněme si také, že v případě lineární funkce, která „nemá žádnou křivost“, je její druhá derivace nulová.

Vraťme se nyní ke splajnům. Věta 8 nám tedy v jistém smyslu říká, že přirozený kubický splajn má na intervalu $\langle a, b \rangle$ „menší křivost“ než interpolovaná funkce f .



Obrázek 3.6: Ryze konvexní (a) a ryze konkávní (b) funkce s tečnami



Obrázek 3.7: Ryze konvexní (a) a ryze konkávní (b) funkce s tečnami

3.2.3 Bázové funkce kubického splajnu

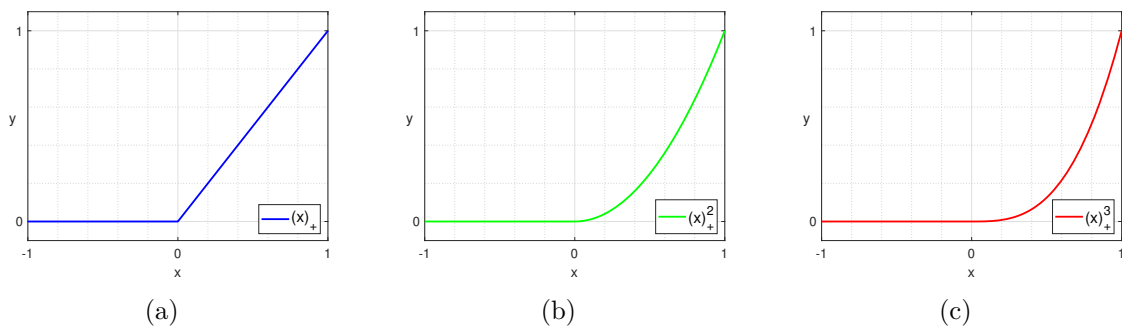
V této kapitole, obdobně jako v kapitole 3.1.1, kde jsme definovali lineární splajn jako lineární kombinaci bázových funkcí a tyto bázové funkce jsme odvodili, ukážeme, jak definovat bázové funkce pro kubický splajn.

Pro jednoduchost budeme uvažovat ekvidistantní dělení uzlů, tedy $x_k = kh$, $k \in \{0, \dots, m\}$, $h \in \mathbb{R}^+$. Nejdříve uvedeme potřebnou definici.

Definice 7 *Pozitivní částí funkce* $(x - x_k)^n$ je funkce $(x - x_k)_+^n$ definovaná jako

$$(x - x_k)_+^n = \begin{cases} (x - x_k)^n & \text{pro } x \geq x_k, \\ 0 & \text{pro } x < x_k. \end{cases}$$

Funkce $(x - x_k)_+^n$ je zjevně po částech mnohočlen. V bodě x_k jsou všechny její derivace až do řádu $n - 1$ včetně rovny nule, a proto jsou v tomto bodě spojité. V bodě x_k však n -tá derivace funkce $(x - x_k)_+^n$ není spojitá (protože derivace zleva je rovna nule, ale derivace zprava je $n!$).



Obrázek 3.8: Pozitivní části funkcí x , x^2 a x^3

Věta 9 *Buď $P \in \mathcal{P}_n$. Pak pro každé $r \in \{1, \dots, n\}$ je funkce*

$$Q_{(r)}(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} P(x - kh) \quad (3.13)$$

polynomem stupně $n - r$ a $Q_{(n+1)} \equiv 0$ na \mathbb{R} .

Důkaz [1] Nejdříve si zopakujeme definici kombinačního čísla:

$$\forall k, n \in \mathbb{N}_0, n \geq k : \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

v jiných případech není kombinační číslo definované. Připomeneme si také některé vlastnosti kombinačních čísel:⁷

$$1 = \binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{pro } n \geq k \geq 1, \quad (3.14)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad \text{pro } n \geq k \geq 1. \quad (3.15)$$

⁷Kombinační čísla jsou blíže popsána např. v [9].

Důkaz provedeme indukcí. Pro $r = 1$ platí

$$Q_{(1)}(x) = \binom{1}{0}P(x) - \binom{1}{1}P(x-h) = P(x) - P(x-h).$$

$Q_{(1)}$ je tedy polynom stupně $n-1$. Předpokládejme nyní, že pro nějaké $r \in \mathbb{N}$ je $Q_{(r)}$ polynom stupně $n-r$. Pak $Q_{(r)}(x) - Q_{(r)}(x-h)$ je polynom stupně o 1 nižší, tedy $n-(r+1)$.⁸ Cílem je ukázat, že $Q_{(r+1)}$ je polynom stupně $n-(r+1)$. Rozepíšeme dle (3.13)

$$Q_{(r)}(x) - Q_{(r)}(x-h) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} P(x-kh) - \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} P(x-(k+1)h).$$

Z první sumy oddělíme člen pro $k=0$ a upravíme indexy druhé sumy:

$$\begin{aligned} Q_{(r)}(x) - Q_{(r)}(x-h) &= P(x) + \sum_{k=1}^r (-1)^k \binom{r}{k} P(x-kh) - \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k-1} \binom{r}{k-1} P(x-kh) = \\ &= P(x) + (-1)^{r+1} P(x-(r+1)h) + \sum_{k=1}^r (-1)^k \binom{r}{k} P(x-kh) + \sum_{k=1}^r (-1)^k \binom{r}{k-1} P(x-kh) = \\ &= P(x) + (-1)^{r+1} P(x-(r+1)h) + \sum_{k=1}^r (-1)^k P(x-kh) \binom{r+1}{k} = \\ &= \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k \binom{r+1}{k} P(x-kh) = Q_{(r+1)}(x), \end{aligned}$$

tj. $Q_{(r+1)} \in \mathcal{P}_{n-(r+1)}$. Pomocí matematické indukce jsme tedy ukázali, že $Q_{(r)}$ je polynom stupně $n-r$ pro $r \in \{1, \dots, n\}$. Polynom $Q_{(n)}$ je tedy stupně 0.

Víme, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R} : Q_{(r+1)}(x) = Q_{(r)}(x) - Q_{(r)}(x-h).$$

Položíme-li $r = n$, platí

$$\forall x \in \mathbb{R} : Q_{(n+1)}(x) = Q_{(n)}(x) - Q_{(n)}(x-h) = 0,$$

jelikož $Q_{(n)}$ je konstantní funkce. □

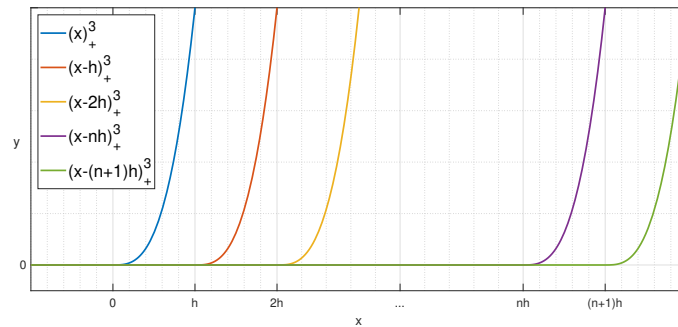
Věta 10 Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce

$$S_{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (x-kh)_+^n \quad (3.16)$$

po částech mnohočlenem stupně n . Mnohočlen se mění v ekvidistantně rozložených uzlech kh , $k \in \{0, \dots, n+1\}$. Dále $S_{(n)} \in C^{(n-1)}$ a je identicky nulová mimo interval $(0, (n+1)h)$.

⁸Při odečtení polynomů se členy s nejvyšší mocninou odečtou a výsledkem je polynom stupně o 1 nižší.

Důkaz [1] Funkce $S_{(n)}$ je lineární kombinací po částech mnohočlenů (které jsou znázorněny na obrázku 3.9), je tedy také po částech mnohočlenem.



Obrázek 3.9: Ilustrace po částech mnohočlenů tvořících funkci $S_{(n)}$

Každá pozitivní část v (3.16) je třídy $C^{(n-1)}$, tj. výsledná funkce $S_{(n)}$ musí být také třídy $C^{(n-1)}$.

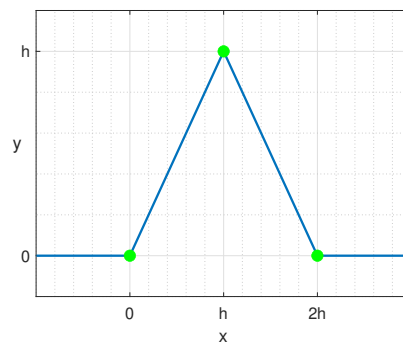
Pro každé $x \leq 0$ je $(x - kh)_+^n = 0$, funkce $S_{(n)}$ je identicky nulová na intervalu $(-\infty, 0)$. Pro $x \geq (n + 1)h$ je $(x - kh)_+^n = (x - kh)^n$, tedy

$$S_{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (x - kh)^n.$$

Protože $(x - kh)^n$ je polynom stupně n , je $S_{(n)}(x) = Q_{(n+1)}(x) = 0$ pro každé $x \geq (n + 1)h$ dle věty 9. \square

Nyní máme vše potřebné k sestavení bazových funkcí lineárního i kubického splajnu. Dle předpisu (3.16) získáme

$$S_{(1)}(x) = (x)_+ - 2(x - h)_+ + (x - 2h)_+.$$



Obrázek 3.10: Funkce $S_{(1)}$

Podíváme-li se na obrázek 3.10, vidíme, že pro získání bazové funkce lineárního splajnu φ_k , $k \in \{1, \dots, m - 1\}$, popsané v kapitole 3.1.1 na straně 35, musíme bod $x = 0$ přesunout do bodu

$x = x_{k-1}$ a funkci normalizovat (maximální hodnota funkce musí být 1 v bodě $x = x_k$):

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{h} S_{(1)}(x - x_{k-1}), \quad k \in \{1, \dots, m-1\}.$$

Nyní ještě doplníme předpis pro φ_0 a φ_m . Po krátkém rozmyšlení můžeme definovat

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} S_{(1)}(x + h) & \text{pro } x \in \langle 0, x_1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

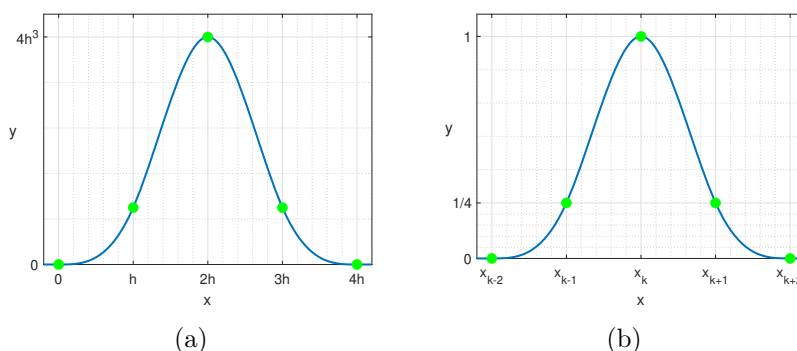
a

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} S_{(1)}(x - (m-1)h) & \text{pro } x \in \langle x_{m-1}, x_m \rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dosažením odpovídajících hodnot snadno ověříme, že opravdu platí $\varphi_k(x_k) = 1$ a výše uvedené předpisy se shodují s předpisy (3.3) - (3.5) na straně 35.

Nyní se pokusíme získat předpis pro báze funkce kubického splajnu. V předpise (3.16) položíme $n = 3$:

$$S_{(3)}(x) = (x)_+^3 - 4(x-h)_+^3 + 6(x-2h)_+^3 - 4(x-3h)_+^3 + (x-4h)_+^3.$$



Obrázek 3.11: Funkce $S_{(3)}$ (a) a báze funkce ψ_k kubického splajnu (b)

Obdobně jako u báze funkcí lineárního splajnu musíme funkci normalizovat a přesunout bod $x = 0$ do bodu $x = x_{k-2}$. Z obrázku 3.11a vidíme, že graf funkce $S_{(3)}$ je osově souměrný podle přímky $x = 2h$. Dále z věty 10 víme, že $S_{(3)} \in C^2$ a $S_{(3)} = 0$ na $\mathbb{R} \setminus (0, 4h)$. Můžeme si také rozmyslet, že funkce $S_{(3)}$ je rostoucí na intervalu $\langle 0, 2h \rangle$. Maximum funkce $S_{(3)}$ tedy musí být v bodě $2h$ a hodnota maxima je $S_{(3)}(2h) = 4h^3$. Po normalizaci tedy získáme předpis pro báze funkce kubického splajnu

$$\psi_k(x) = \frac{1}{4h^3} S_{(3)}(x - x_{k-2}).$$

pro $k \in \{2, \dots, m-2\}$. Tato funkce je znázorněna na obrázku 3.11b. Funkce ψ_k je nulová mimo interval (x_{k-2}, x_{k+2}) , což plyne z věty 10. Funkce ψ_k je také nezáporná na celém \mathbb{R} a její

graf je osově souměrný podle přímky $x = x_k$. Toto rozebereme také v posledních dvou úlohách následující kapitoly.

„Okrajové“ bázové funkce $\psi_0, \psi_1, \psi_{m-1}$ a ψ_m bychom definovali obdobně jako u bázových funkcí lineárního splajnu.

3.3 Úlohy ke splajnům

V této kapitole vyřešíme vybrané úlohy z kapitoly 11 v knize [1]. Některé úlohy jsou vhodně upraveny nebo doplněny.

Úloha 3.1

Interpolační splajn stupně n musí mít spojité derivace až do stupně $n - 1$ včetně v interpolačních uzlech. Kolik podmínek bychom museli dodat k úloze interpolace splajnem stupně n , aby byl interpolační splajn dán jednoznačně?

Řešení: Splajn má na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i \in \{1, \dots, m\}$, tvar polynomu stupně n :

$$s(x) = a_n^i x^n + a_{n-1}^i x^{n-1} + \dots + a_0^i.$$

Má tedy $n + 1$ neznámých koeficientů na každém podintervalu. Celkově musíme tedy určit $m(n + 1)$ koeficientů. Z podmínek interpolace $s(x_i) = y_i$ dostáváme pro každý podinterval 2 podmínky, celkově tedy $2m$ podmínek. Dále víme, že splajn má v uzlech x_1, \dots, x_{m-1} spojité všechny derivace až do řádu $n - 1$ včetně. V každém uzlu tedy získáme $n - 1$ podmínek pro spojitost derivací. Máme tedy dalších $(m - 1)(n - 1)$ podmínek.

Celkově máme $2m + (n - 1)(m - 1)$ podmínek a $m(n + 1)$ neznámých koeficientů. Chybí nám tedy $n - 1$ podmínek pro jednoznačné určení splajnu. Toto odpovídá definici přirozeného kubického splajnu (viz kapitola 3.2 na straně 36), kde jsme pro jednoznačnost doplnili 2 podmínky (3.6).



Úloha 3.2

(i) Necht $f \in \mathcal{P}_1$ a s_L je lineární splajn interpolující funkci f v uzlech x_i , $i \in \{0, \dots, m\}$. Ukažte, že platí $s_L \equiv f$. (ii) Necht $f \in \mathcal{P}_3$ a s_H je Hermiteův kubický splajn interpolující funkci f v uzlech x_i , $i \in \{0, \dots, m\}$. Ukažte, že platí $s_H \equiv f$. Hermiteův kubický splajn je definován podobně, jako přirozený kubický splajn. Přesnou definici můžeme najít např. v knize [1] v kapitole 11.5 na stranách 300 - 302. (iii) Necht $f \in \mathcal{P}_3$. Ukažte, že pro přirozený kubický splajn s_2 interpolující funkci f v uzlech x_i , $i \in \{0, \dots, m\}$, obecně neplatí $s_2 \equiv f$.

Řešení: (i) Protože je s_L lineární splajn, plyne odpověď přímo z odhadu 2.8 ve větě 3 na straně 12. Na podintervalech $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ tedy existuje $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ takové, že

$$\forall x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle : f(x) - s_L(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_{i-1})(x - x_i), \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Funkce f je lineární, její druhá derivace je tedy nulová a platí $s_L \equiv f$.

(ii) Obdobně jako v předchozím bodě platí pro každý podinterval odhad chyby Hermiteovy interpolace (2.20) z věty 6 na straně 26:

$$f(x) - s_H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} (x - x_{i-1})^2 (x - x_i)^2, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Protože je funkce f polynom stupně 3 je její čtvrtá derivace nulová a platí $s_H \equiv f$.

(iii) Dle definice přirozeného kubického splajnu platí dodatečné podmínky (3.6):

$$s_2''(x_0) = s_2''(x_m) = 0,$$

které obecně nemusí platit pro polynomy 3. stupně, například pro funkci $f(x) = x^3$ platí $f''(x) = 6x$, což se nemůže rovnat nule pro dvě různá čísla x_0 a x_m , a tedy $s_2 \not\equiv f$.



Úloha 3.3

Nechť s_2 je kubický splajn interpolující funkci $f(x) = x^3$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ v ekvidistantně rozložených uzlech $x_i = ih, i \in \{0, \dots, m\}, h = 1/m$. **(i)** Ukažte, že jsou-li splněny doplňující podmínky

$$\sigma_0 = s_2''(0) = 0 \quad \text{a} \quad \sigma_m = s_2''(1) = 0,$$

pak platí $s_2 \not\equiv f$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. **(ii)** Ukažte, že jsou-li splněny doplňující podmínky

$$\sigma_0 = s_2''(0) = f''(0) = 0 \quad \text{a} \quad \sigma_m = s_2''(1) = f''(1) = 6,$$

pak platí $s_2 \equiv f$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Řešení: (i) Vypočteme $f''(x) = 6x$. V bodě $x = 1$ tedy platí $f''(1) = 6 \neq s_2''(1) = 0$. Nemůže tedy platit $s_2 \equiv f$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

(ii) Nejdříve ukážeme, že $\sigma_i = f''(x_i), i \in \{1, \dots, m-1\}$, je řešením soustavy (3.11). Protože jsou uzly rozloženy ekvidistantně, položíme $h = h_i, i \in \{1, \dots, m\}$. Soustava má tedy tvar

$$h\sigma_{i-1} + 4h\sigma_i + h\sigma_{i+1} = 6 \left[\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} \right], \quad i \in \{1, \dots, m-1\}.$$

Víme, že $x_i = ih, f(x_i) = x_i^3 = i^3h^3$ a $\sigma_i = 6x_i = 6ih$, a i -tá rovnice soustavy tedy vypadá následovně:

$$\underbrace{6(i-1)h^2 + 24ih^2 + 6(i+1)h^2}_{=36ih^2} = 6 \left[\underbrace{\frac{(i+1)^3h^3 - i^3h^3}{h} - \frac{i^3h^3 - (i-1)^3h^3}{h}}_{=6ih^2} \right],$$

tj. $\sigma_i = f''(x_i)$ řeší soustavu (3.11). Pro $i \in \{0, \dots, m\}$ tedy platí $s_2''(x_i) = f''(x_i)$. Nyní ukážeme, že jsou funkce f a s opravdu identické. Na podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle, i \in \{1, \dots, m\}$, má splajn s tvar

$$s_2(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i,$$

a proto

$$s_2''(x) = 6a_i x + 2b_i.$$

Protože musí na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ platit $s_2''(x_i) = f''(x_i) = 6x_i$ a také $s_2''(x_{i-1}) = f''(x_{i-1}) = 6x_{i-1}$, dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých a_i a b_i :

$$6a_i x_i + 2b_i = 6x_i, \quad 6a_i x_{i-1} + 2b_i = 6x_{i-1}.$$

Z těchto rovnic dopočteme hodnoty $a_i = 1$ a $b_i = 0$. Nyní víme, že splajn s_2 má na podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ tvar

$$s_2(x) = x^3 + c_i x + d_i.$$

V interpolačních uzlech x_i musí být splněny interpolační podmínky, tedy $s_2(x_i) = f(x_i) = x_i^3$ a $s_2(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) = x_{i-1}^3$ na podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Znovu tedy dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých c_i a d_i :

$$x_i^3 + c_i x_i + d_i = x_i^3, \quad x_{i-1}^3 + c_i x_{i-1} + d_i = x_{i-1}^3.$$

Z těchto rovnic dopočteme hodnoty $c_i = d_i = 0$. Splajn s_2 má na všech podintervalech, tedy i na celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, tvar $s_2(x) = x^3$. Platí tedy $s_2 \equiv f$ na $\langle 0, 1 \rangle$.



Úloha 3.4

(i) Po částech lineární funkce s je na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ vyjádřena pomocí bázových funkcí φ_k lineárního splajnu jako

$$s(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(x). \quad (3.17)$$

Místo požadavku interpolovat funkci f v interpolačních uzlech (jako lineární splajn), funkce s minimalizuje hodnotu $\int_0^1 (f(x) - s(x))^2 dx$. Ukažte, že vektor koeficientů α_k je řešením soustavy lineárních rovnic $A\alpha = b$, kde

$$A_{i,j} = \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \quad \text{a} \quad b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx.$$

(ii) Nechť jsou interpolační uzly rozloženy ekvidistantně, tj. $x_k = kh$, $k \in \{0, \dots, m\}$, kde $h = 1/m$. Ukažte, že matice A je třídiagonální, a určete všechny nenulové prvky této matice.

Řešení: (i) Označme $F(\alpha_0, \dots, \alpha_m) = \int_0^1 (f(x) - s(x))^2 dx$. Nejprve si rozepíšeme:

$$\begin{aligned} F(\alpha_0, \dots, \alpha_m) &= \int_0^1 \left[f(x) - \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_0^1 f^2(x) - 2f(x) \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(x) + \left[\sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(x) \right]^2 dx. \end{aligned}$$

S využitím linearit určitého integrálu můžeme psát:

$$F(\alpha_0, \dots, \alpha_m) = \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(x) dx + \int_0^1 \underbrace{\left[\sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(x) \right]^2}_{=: v(\alpha_0, \dots, \alpha_m, x)} dx. \quad (3.18)$$

Hledáme koeficienty α_i , $i \in \{0, \dots, m\}$, minimalizující funkci F . Z nutné podmínky existence extrému se musí parciální derivace funkce F podle α_i , $i \in \{0, \dots, m\}$, v bodě a rovnat 0, jelikož je funkce F diferencovatelná. Pro určení této parciální derivace nejdříve spočteme parciální derivaci členu $\int_0^1 v(\alpha_0, \dots, \alpha_m, x) dx$. Platí

$$v(\alpha_0, \dots, \alpha_m, x) = \sum_{j=0}^m \left[\sum_{k=0}^m [\alpha_j \varphi_j(x) \alpha_k \varphi_k(x)] \right]$$

a s využitím linearity určitého integrálu můžeme psát:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(\alpha_0, \dots, \alpha_m, x) dx &= \sum_{j=0}^m \left[\sum_{k=0}^m \left[\alpha_j \alpha_k \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx \right] \right] = \\ &= \alpha_0 \sum_{k=0}^m \left[\alpha_k \int_0^1 \varphi_0(x) \varphi_k(x) dx \right] + \dots + \alpha_m \sum_{k=0}^m \left[\alpha_k \int_0^1 \varphi_m(x) \varphi_k(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Derivace bude mít tedy tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_0^1 v(\alpha_0, \dots, \alpha_m, x) dx &= \alpha_0 \int_0^1 \varphi_0(x) \varphi_i(x) dx + \dots + \alpha_{i-1} \int_0^1 \varphi_{i-1}(x) \varphi_i(x) dx + \\ &+ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \left[\alpha_k \int_0^1 \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx \right] + 2\alpha_i \int_0^1 \varphi_i(x)^2 dx + \alpha_{i+1} \int_0^1 \varphi_{i+1}(x) \varphi_i(x) dx + \dots + \\ &+ \alpha_m \int_0^1 \varphi_m(x) \varphi_i(x) dx. \end{aligned}$$

Po krátkém rozmyšlení zjevně platí:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_0^1 v(\alpha_0, \dots, \alpha_m, x) dx = 2 \sum_{k=0}^m \left[\alpha_k \int_0^1 \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx \right]. \quad (3.19)$$

Nyní můžeme spočítat derivaci funkce F podle α_i (viz (3.18) a (3.19)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} F(\alpha_0, \dots, \alpha_m) &= -2 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \left[\alpha_k \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx \right] + \alpha_i \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_0^1 v(\alpha_0, \dots, \alpha_m, x) dx = -2 \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx + 2 \sum_{k=0}^m \left[\alpha_k \int_0^1 \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx \right] = 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že poslední rovnost přesně odpovídá maticovému zápisu $A\alpha = b$ ze zadání úlohy.

(ii) Prvky matice A jsou $A_{i,j} = \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx$. Dle definic bázevých funkcí (3.3) - (3.5) budou prvky $A_{i,j}$ nulové, pokud $|i - j| > 1$ (dle oborů, ve kterých jsou bázevé funkce nenulové). Matice A je tedy třídiagonální. Dle definice prvků $A_{i,j}$ je matice A také symetrická. Nyní

spočteme diagonální prvky $A_{i,i}$, $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$A_{i,i} = \int_0^1 \varphi_i^2(x) dx.$$

Protože je funkce φ_i^2 nenulová pouze v intervalu $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle$ můžeme $A_{i,i}$ zapsat jako

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_{i-1})^2}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{h^2} dx = \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{(x - x_{i-1})^3}{3} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{h^2} \left[\frac{(x_{i+1} - x)^3}{3} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{h}{3} + \frac{h}{3} = \frac{2}{3}h. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili informaci o ekvidistantním rozložení uzlů (vzdálenost mezi sousedními uzly je vždy h). Nyní spočteme prvek $A_{0,0}$:

$$A_{0,0} = \int_0^1 \varphi_0^2(x) dx = \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - x)^2}{h^2} dx = -\frac{1}{h^2} \left[\frac{(x_1 - x)^3}{3} \right]_0^{x_1} = \frac{1}{3}h$$

a prvek $A_{m,m}$:

$$A_{m,m} = \int_0^1 \varphi_m^2(x) dx = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{(x - x_{m-1})^2}{h^2} dx = \frac{1}{h^2} \left[\frac{(x - x_{m-1})^3}{3} \right]_{x_{m-1}}^{x_m} = \frac{1}{3}h.$$

Zbývá spočítat nenulové prvky na vedlejších diagonálách. Víme, že je matice symetrická, stačí tedy určit prvky $A_{i,i+1}$, $i \in \{0, \dots, m-1\}$:

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)}{h} \frac{(x - x_i)}{h} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{[x - (x_i + h)](x - x_i)}{h^2} dx = \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{(x - x_i)^2 + h(x_i - x)}{h^2} dx = -\frac{1}{h^2} \left[\frac{(x - x_i)^3}{3} - \frac{h(x_i - x)^2}{2} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{6}h. \end{aligned}$$

Matice A tedy vypadá následovně:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & \\ 0 & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} \\ & & 0 & \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{bmatrix} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Poznámka k úloze 3.4:

Pro řešení soustav lineárních rovnic s maticí A (např. soustavy v následující úloze) je možné použít Thomasův algoritmus popsany v příloze B. Matice A je čtvercová a třídiagonální. Navíc

je symetrická, má tedy reálné spektrum,⁹ a je ryze řádkově diagonálně dominantní¹⁰ - spektrum matice je tedy v \mathbb{R}^+ . Matice je proto pozitivně definitní, a tedy také regulární.¹¹ Podmínky pro použití tohoto algoritmu jsou splněny.



Úloha 3.5

(i) V návaznosti na předchozí úlohu položme $f(x) = x$. Ověřte, že $\alpha_i = ih$ je řešením soustavy $A\alpha = b$. Ukažte, že $s \equiv f$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. (ii) Obdobně položme $f(x) = x^2$. Ověřte, že $\alpha_i = (ih)^2 + Ch^2$, kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, je řešením soustavy $A\alpha = b$ a určete hodnotu C . Ukažte, že $s(x_i) = f(x_i) + Ch^2$ pro $i \in \{0, \dots, m\}$.

Řešení: (i) Soustava $A\alpha = b$ (z předchozí úlohy) má tvar

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & \cdots \\ \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & \\ \vdots & & \ddots & \\ & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} \\ & 0 & \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ \vdots \\ 1-h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 x\varphi_0(x)dx \\ \int_0^1 x\varphi_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x\varphi_{m-1}(x)dx \\ \int_0^1 x\varphi_m(x)dx \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Nejprve musíme určit prvky vektoru b . Pro $i \in \{1, \dots, m-1\}$ použijeme předpis pro bázeovou funkci (3.3). Platí tedy

$$b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h} x dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h} x dx.$$

Pomocí substituční metody snadno dopočteme

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{1}{h} \left\{ \int_0^h u[u + (i-1)h] du + \int_0^h u[-u + (i+1)h] du \right\} = \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} h(i-1) \right]_0^h + \left[-\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} h(i+1) \right]_0^h \right\} = h^2 i. \end{aligned}$$

Obdobně dopočteme b_0 a b_m (použijeme předpisy pro bázeové funkce (3.4) a (3.5)):

$$b_0 = \int_0^h \frac{h-x}{h} x dx = \frac{1}{h} \left[\frac{x^2}{2} h - \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{h^2}{6},$$

⁹Viz větu A.2.7.

¹⁰Viz definici A.1.4.

¹¹Viz větu A.2.10.

$$b_m = \int_{1-h}^1 \frac{x - x_{m-1}}{h} x dx = \frac{1}{h} \int_0^h u(u+1-h) du = \frac{1}{h} \left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2}(1-h) \right]_0^h = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6}.$$

Nyní ověříme, že $\alpha_i = ih$ je opravdu řešením soustavy (3.20) tak, že vynásobíme matici A s vektorem α . Na první pohled vidíme, že pro „nultou“ rovnici soustavy platí

$$\frac{h^2}{6} = b_0.$$

Pro „ i -tou“ rovnici, kde $i \in \{1, \dots, m-1\}$, platí

$$\left(\frac{i-1}{6} + \frac{2i}{3} + \frac{i+1}{6} \right) h^2 = ih^2 = b_i.$$

Konečně pro „ m -tou“ rovnici platí

$$\frac{h}{6}(1-h) + \frac{h}{3} = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} = b_m.$$

Ukázali jsme tedy, že $\alpha_i = ih$ je opravdu řešením soustavy (3.20).

Víme, že po částech lineární funkce s má dle (3.17) tvar

$$s(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^m ih \varphi_i(x).$$

Pro $x = x_i$ platí

$$s(x_i) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(x_i) = \alpha_i = ih = x_i = f(x_i).$$

Protože je s po částech lineární funkce, pro $i \in \{0, \dots, m\}$ platí $s(x_i) = f(x_i)$ a f je lineární funkce, musí platit $s \equiv f$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

(ii) Stejně jako v předchozí části úlohy si připomeneme soustavu $A\alpha = b$:

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & \dots \\ \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & \\ \vdots & & \ddots & \\ & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} \\ & 0 & \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ch^2 \\ (1+c)h^2 \\ \vdots \\ (1-h)^2 + ch \\ 1 + ch^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 x^2 \varphi_0(x) dx \\ \int_0^1 x^2 \varphi_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x^2 \varphi_{m-1}(x) dx \\ \int_0^1 x^2 \varphi_m(x) dx \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Nejprve spočteme prvky vektoru b . Pro $i \in \{1, \dots, m-1\}$ platí

$$b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h} x^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h} x^2 dx.$$

Pomocí substituční metody dostáváme

$$b_i = \frac{1}{h} \left\{ \int_0^h u[u + (i-1)h]^2 du + \int_0^h u[-u + (i+1)h]^2 du \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \left\{ \left[\frac{u^4}{4} + \frac{2u^3}{3}h(i-1) + \frac{u^2}{2}h^2(i^2 - 2i + 1) \right]_0^h + \left[\frac{u^4}{4} - \frac{2u^3}{3}h(i+1) + \frac{u^2}{2}h^2(i^2 + 2i + 1) \right]_0^h \right\} = \\
&= h^3 \left(\frac{1}{12} - \frac{i}{3} + \frac{i^2}{2} \right) + h^3 \left(\frac{1}{12} + \frac{i}{3} + \frac{i^2}{2} \right) = h^3 \left(\frac{1}{6} + i^2 \right).
\end{aligned}$$

Obdobně dopočteme b_0 a b_m :

$$b_0 = \int_0^h \frac{h-x}{h} x^2 dx = \frac{1}{h} \left[\frac{x^3}{3}h - \frac{x^4}{4} \right]_0^h = \frac{h^3}{12},$$

$$b_m = \int_{1-h}^h \frac{x-x_{m-1}}{h} x^2 dx = \frac{1}{h} \int_0^h u(u+1-h)^2 du = \frac{h^3}{12} - \frac{h^2}{3} + \frac{h}{2}.$$

Ověříme, že $\alpha_i = (ih)^2 + Ch^2$ je opravdu řešením soustavy (3.21). Pro „nultou“ rovnici platí

$$\frac{h^3}{3}C + \frac{h^3}{6}(1+C) = \left(\frac{C}{2} + \frac{1}{6} \right) h^3 = b_0.$$

Odtud $C = -\frac{1}{6}$. Pro „ i -tou“ rovnici platí

$$\frac{h^3}{6} \left[(i-1)^2 + C \right] + \frac{2h^3}{3}(i^2 + C) + \frac{h^3}{6} \left[(i+1)^2 + C \right] = h^3 \left(i^2 + \frac{1}{3} + C \right) = b_i.$$

Rovnost zjevně platí pro volbu $C = -\frac{1}{6}$. Pro poslední „ m -tou“ rovnici platí

$$\frac{h^3}{6} \left[(m-1)^2 + C \right] + \frac{h^3}{3}(m^2 + C) = h^3 \left(\frac{m^2}{2} - \frac{m}{3} + \frac{1}{6} + \frac{C}{2} \right) = b_m.$$

Rovnost opět platí pro $C = -\frac{1}{6}$. Ukázali jsme, že $\alpha_i = (ih)^2 - \frac{h^2}{6}$ je řešením soustavy (3.21).

Pro $x = x_i$ platí

$$s(x_i) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(x_i) = \alpha_i = (ih)^2 - \frac{h^2}{6} = f(x_i) - \frac{h^2}{6}.$$

Poznámka k úloze 3.5:

Pro vyřešení soustav (3.20) a (3.21) lze efektivně použít Thomasův algoritmus popsany v příloze B. Matice A je třídiagonální a regulární, splňuje tedy všechny podmínky pro použití tohoto algoritmu. ▲

Úloha 3.6

(i) Ukažte, že platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in \mathbb{R}) : (x - a)(x - a)_+^n = (x - a)_+^{n+1}, \quad (3.22)$$

kde $a \in \mathbb{R}$. (ii) Ukažte také, že platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in \mathbb{R}) : xS_{(n)}(x) + [(n + 2)h - x]S_{(n)}(x - h) = S_{(n+1)}(x), \quad (3.23)$$

kde $S_{(n)}$ je definováno ve větě 10 na straně 43. (iii) Dále ukažte, že $S_{(n)} \geq 0$ na \mathbb{R} .

Řešení: (i) Dle definice pozitivní části funkce 7 na straně 42 rozdělíme řešení na dvě části. Pro $x \leq a$ platí

$$(x - a) \underbrace{(x - a)_+^n}_{=0} = 0 = (x - a)_+^{n+1}$$

a pro $x > a$ platí

$$(x - a)(x - a)_+^n = (x - a)(x - a)^n = (x - a)^{n+1} = (x - a)_+^{n+1}.$$

Tvrzení (3.22) tedy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Dle předpisu (3.16) na straně 43 pro $S_{(n)}$ rozepíšeme

$$\begin{aligned} & xS_{(n)}(x) + [(n + 2)h - x]S_{(n)}(x - h) = \\ & = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} x(x - kh)_+^n + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} [(n + 2)h - x](x - (k + 1)h)_+^n. \end{aligned}$$

Po upravení indexů druhé sumy tak, abychom sčítali od $k = 1$ do $k = n + 2$, a po „sjednocení sum“ dostáváme

$$\begin{aligned} & xS_{(n)}(x) + [(n + 2)h - x]S_{(n)}(x - h) = \\ & = x(x)_+^n + (-1)^{n+1} [(n + 2)h - x](x - (n + 2)h)_+^n + \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \left[\binom{n+1}{k} x - \binom{n+1}{k-1} [(n + 2)h - x] \right] (x - kh)_+^n. \end{aligned}$$

S využitím tvrzení (3.22) z části (i) úlohy můžeme výraz upravit:

$$\begin{aligned} & xS_{(n)}(x) + [(n + 2)h - x]S_{(n)}(x - h) = (x)_+^{n+1} + (-1)^{n+2} (x - (n + 2)h)_+^{n+1} + \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \left[\binom{n+1}{k} x - \binom{n+1}{k-1} [(n + 2)h - x] \right] (x - kh)_+^n. \end{aligned}$$

Zbývá upravit sumu tak, aby měla požadovaný tvar

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+2}{k} (x - kh)_+^{n+1}.$$

S využitím vlastností kombinačních čísel (3.14) můžeme psát

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} x - \binom{n+1}{k-1} [(n+2)h - x] &= \binom{n+1}{k} x + \binom{n+1}{k-1} x - \binom{n+1}{k-1} (n+2)h = \\ &= \binom{n+2}{k} x - \binom{n+1}{k-1} \frac{n+2}{k} hk = \binom{n+2}{k} x - \binom{n+2}{k} hk = \binom{n+2}{k} (x - kh). \end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} xS_{(n)}(x) + [(n+2)h - x]S_{(n)}(x-h) &= (x)_+^{n+1} + (-1)^{n+2} (x - (n+2)h)_+^{n+1} + \\ + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+2}{k} (x - kh)_+^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+2} (-1)^k \binom{n+2}{k} (x - kh)_+^{n+1} = S_{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

(iii) Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Nejprve ukážeme, že tvrzení platí pro $n = 1$.

Dle předpisu (3.16) rozepíšeme

$$S_{(1)}(x) = \sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{2}{k} (x - kh)_+ = (x)_+ - 2(x-h)_+ + (x-2h)_+.$$

Důkaz rozdělíme na 4 části:

$$\begin{aligned} \text{pro } x \leq 0: \quad S_{(1)}(x) &= 0, \\ \text{pro } 0 < x \leq h: \quad S_{(1)}(x) &= x > 0, \\ \text{pro } h < x \leq 2h: \quad S_{(1)}(x) &= x - 2(x-h) = -x + 2h \geq 0, \\ \text{pro } x > 2h: \quad S_{(1)}(x) &= x - 2(x-h) + (x-2h) = 0. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že pro nějaké $r \in \mathbb{N}$ platí $S_{(r)} \geq 0$ na \mathbb{R} , a dokažme, že platí $S_{(r+1)} \geq 0$ na \mathbb{R} . Dle (3.16) rozepíšeme

$$S_{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k \binom{r+1}{k} (x - kh)_+^{r+1}.$$

Všimněme si, že dle věty 10 na straně 43 je funkce $S_{(r)}$ nulová mimo interval $(0, (r+1)h)$. Využijeme tvrzení (3.23) z předchozí části úlohy, tedy že

$$\forall x \in \mathbb{R} : S_{(r+1)}(x) = xS_{(r)}(x) + [(r+2)h - x]S_{(r)}(x-h).$$

Ukážeme-li, že oba členy tohoto součtu jsou nezáporné, bude i jejich součet, tedy $S_{(r+1)}$, nezá-

porný. Pro $x \leq 0$ je (dle věty 10) $S_{(r)}(x) = 0$, tedy i $xS_{(r)}(x) = 0$. Pro $x > 0$ je (dle indukčního předpokladu) $S_{(r)}(x) \geq 0$, a tedy také $xS_{(r)}(x) \geq 0$. Obdobně pro $x \geq (r+2)h$ je (dle věty 10) $S_{(r)}(x-h) = 0$, tedy i $[(r+2)h-x]S_{(r)}(x-h) = 0$. Pro $x < (r+2)h$ je $[(r+2)h-x] > 0$ a (dle indukčního předpokladu) platí $S_{(r)}(x-h) \geq 0$, tedy $[(r+2)h-x]S_{(r)}(x-h) \geq 0$. Platí tedy

$$\forall x \in \mathbb{R} : S_{(r+1)}(x) \geq 0.$$

Tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $S_{(n)}$ nezáporná funkce. ▲

Úloha 3.7

Dokažte, že každá funkce $S_{(n)}$ je symetrická, tj. platí

$$\forall x \in \mathbb{R} : S_{(n)}\left(\frac{1}{2}(n+1)h+x\right) = S_{(n)}\left(\frac{1}{2}(n+1)h-x\right). \quad (3.24)$$

Výrok (3.24) nám vlastně říká, že graf funkce $S_{(n)}$ je osově souměrný podle přímky $x = \frac{1}{2}(n+1)h$.

Řešení: Provedeme důkaz matematickou indukcí. Nejdříve si rozmyslíme, že rovnost (3.24) platí pro $n = 1$. Podíváme-li se na obrázek 3.10 na straně 44, vidíme, že graf funkce $S_{(1)}$ je osově souměrný podle přímky $x = h$.

Nyní předpokládejme, že pro nějaké $r \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall x \in \mathbb{R} : S_{(r)}\left(\frac{1}{2}(r+1)h+x\right) = S_{(r)}\left(\frac{1}{2}(r+1)h-x\right), \quad (3.25)$$

a ukážeme, že platí také

$$\forall x \in \mathbb{R} : S_{(r+1)}\left(\frac{1}{2}(r+2)h+x\right) = S_{(r+1)}\left(\frac{1}{2}(r+2)h-x\right). \quad (3.26)$$

Využijme tvrzení (3.23) z předchozí úlohy a rozepišme

$$\begin{aligned} & S_{(r+1)}\left(\frac{1}{2}(r+2)h+x\right) = \\ & = \left(\frac{1}{2}(r+2)h+x\right) S_{(r)}\left(\frac{1}{2}(r+2)h+x\right) + \left[(r+2)h - \frac{1}{2}(r+2)h-x\right] S_{(r)}\left(\frac{1}{2}(r+2)h-x\right) = \\ & = \left(\frac{1}{2}(r+2)h+x\right) \underbrace{S_{(r)}\left(\frac{1}{2}(r+1)h+x+\frac{1}{2}h\right)}_{\stackrel{(3.25)}{=} S_{(r)}\left(\frac{1}{2}(r+1)h-x-\frac{1}{2}h\right)} + \left(\frac{1}{2}(r+2)h-x\right) \underbrace{S_{(r)}\left(\frac{1}{2}(r+1)h+x-\frac{1}{2}h\right)}_{\stackrel{(3.25)}{=} S_{(r)}\left(\frac{1}{2}(r+1)h-x+\frac{1}{2}h\right)}. \end{aligned}$$

Nyní obdobně pomocí (3.23) zapíšeme

$$\begin{aligned} & S_{(r+1)} \left(\frac{1}{2}(r+2)h - x \right) = \\ & = \left(\frac{1}{2}(r+2)h - x \right) S_{(r)} \left(\frac{1}{2}(r+1)h - x + \frac{1}{2}h \right) + \left(\frac{1}{2}(r+2)h + x \right) S_{(r)} \left(\frac{1}{2}(r+1)h - x - \frac{1}{2}h \right). \end{aligned}$$

Vidíme, že rovnost (3.26) platí, čímž jsme ukázali platnost (3.24).



Kapitola 4

Závěr

Ve 2. kapitole jsme se seznámili s teorií ohledně Lagrangeovy interpolace. Dozvěděli jsme se, že Lagrangeova interpolace je poměrně jednoduchým a efektivním způsobem interpolace funkce, má ale své nedostatky – nemusí nutně platit, že s rostoucím stupněm interpolačního polynomu se zmenšuje chyba interpolace. Ukázali jsme případ interpolace Rungeovy funkce, pro kterou chyba interpolačního polynomu výrazně roste v případě ekvidistantně zvolených uzlů na okrajích intervalu interpolace. Zmínili jsme také větu, díky které dokážeme odhadnout maximum chyby derivací interpolované funkce a interpolačního polynomu a ukázali jsme, že pro nekonečně diferencovatelnou funkci konverguje posloupnost derivací interpolačního polynomu k derivaci funkce s rostoucím stupněm polynomu. Spočetli jsme také několik zajímavých úloh, ve kterých jsme blíže prozkoumali některé vlastnosti Lagrangeovy interpolace.

Seznámili jsme se také s Hermiteovou interpolací, která je úpravou Lagrangeovy interpolace s rozšířenými interpolačními podmínkami. Zjistili jsme, že Hermiteův interpolační polynom má (pro stejný počet interpolačních uzlů) vyšší řád než Lagrangeův interpolační polynom a jeho sestavení je o něco náročnější. Stejně jako pro Lagrangeovu interpolaci jsme uvedli mimo jiné větu o odhadu chyby Hermiteovy interpolace a tuto větu jsme dokázali. Vypočetli jsme také několik úloh ukazujících souvislost mezi Lagrangeovou a Hermiteovou interpolací.

V kapitole 3 jsme uvedli teorii k lineárním a přirozeným kubickým splajnům a uvedli jsme způsob konstrukce příslušných bázeových funkcí i samotných splajnů, při kterém jsme si museli zopakovat některá tvrzení z lineární algebry. Zjistili jsme, že v případech, kdy není možné zvolit výhodnější (např. Čebyševovo) rozložení interpolačních uzlů (typicky máme-li data získaná měřením v daných časových intervalech), jsou splajny dobrou modifikací polynomiální interpolace. Připomněli jsme si také geometrický význam 2. derivace, díky čemuž jsme zjistili, že přirozený kubický splajn má „menší křivost“ než interpolovaná funkce. Nakonec jsme vypočetli několik úloh, ve kterých jsme se seznámili s dalšími vlastnostmi splajnů a jejich konstrukce. Narazili jsme také na Thomasův algoritmus, který je popsán v příloze B.

Literatura

1. SÜLI, Endre; MAYERS, David F. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, 2003.
2. SHEN, Wen. *An Introduction To Numerical Computation*. World Scientific, 2019.
3. DE BOOR, Carl. *A practical guide to splines*. Sv. 27. Springer-Verlag New York, 2001.
4. EMBREE, Mark. *Lecture Notes on Numerical Analysis* [online]. Virginia Tech, 2016 [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: <https://personal.math.vt.edu/embree/math5466/nanotes.pdf>.
5. VONDRÁK, Vít; POSPÍŠIL, Lukáš. *Numerické metody I* [online]. 2011. [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf.
6. CINGEL, Jiří. *Barycentrická Lagrangeova interpolace a její aplikace* [online]. Ostrava, 2022 [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10084/147363>.
7. STAŠKO, Tomáš. *Nejlepší polynomiální aproximace* [online]. Ostrava, 2020 [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10084/140434>.
8. BOUCHALA, Jiří; SADOWSKÁ, Marie. *Mathematical analysis I* [online]. Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2007 [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: https://home1.vsb.cz/~bou10/MA_1/MathematicalAnalysis.pdf.
9. KUBESA, Michael. *Základy diskrétní matematiky* [online]. Vysoká škola báňská - Technická univerzita, Ostrava, 2012 [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/zaklady_diskretni_matematiky.pdf.
10. BOUCHALA, Jiří. *Matematická analýza 1*. Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2005.
11. DOSTÁL, Zdeněk; VONDRÁK, Vít. *Lineární algebra* [online]. Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2001 [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra.pdf.

Příloha A

Pojmy a tvrzení z matematické analýzy a lineární algebry

Definice a tvrzení v této příloze jsou čerpány primárně ze skript J. Bouchaly [10] a skript Z. Dostála a V. Vondráka [11].

A.1 Některé potřebné definice

Definice A.1.1 Necht (f_n) je posloupnost funkcí, kde $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dále necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že **posloupnost (f_n) konverguje bodově k f na množině M** , pokud

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in M)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightarrow f$ na M .

Definice A.1.2 Necht (f_n) je posloupnost funkcí, kde $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dále necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že **posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k f na množině M** , pokud

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall x \in M) : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$ na M .

Definice A.1.3 Maximovou normu funkce f na intervalu (a, b) značíme $\|f\|_\infty$ a definujeme pomocí

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in (a, b)} |f(x)|.$$

Definice A.1.4 Matice $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ se nazývá **ryze řádkově diagonálně dominantní**, jestliže platí

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| < |a_{i,i}|, \quad \text{pro každé } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Definice A.1.5 Necht $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Jestliže existuje matice $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ taková, že $AB = BA = I$, kde I je jednotková matice, pak B nazýváme **inverzní maticí** k matici A . Pokud k matici A existuje inverzní matice, nazývá se A **regulární maticí**, jinak ji nazýváme **singulární maticí**. Inverzní matici k A značíme A^{-1} .

Definice A.1.6 Matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je **pozitivně definitní**, jestliže

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq o) : x^T A x > 0,$$

kde o je nulový vektor v \mathbb{R}^n .

Definice A.1.7 Necht $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Jestliže existuje nenulový vektor $e \in \mathbb{R}^n$ a číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $Ae = \lambda e$, pak se λ nazývá **vlastní číslo** matice A a e se nazývá **vlastní vektor** matice A . Množina všech vlastních čísel matice A se nazývá **spektrum** matice A a značí se $\sigma(A)$.

A.2 Některá potřebná tvrzení

Věta A.2.1 Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na intervalu $\langle a, b \rangle$ stejnoměrně k funkci f právě tehdy, když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Věta A.2.2 (o sevření) Uvažujme funkce $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a body $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Necht

$$(\exists P(x_0))(\forall x \in P(x_0)) : f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a.$$

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

Věta A.2.3 (l'Hospitalovo pravidlo) Necht $x_0, a \in \mathbb{R}^*$ a necht buď $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$ nebo

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Potom existuje i $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$$

Věta A.2.4 (Rolleova) Necht $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$ a $f(a) = f(b) = 0$. Pak $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Věta A.2.5 (Taylorova) Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je $(n+1)$ -krát diferencovatelná funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + h_{n+1}(x)(x-a)^{n+1},$$

kde

$$h_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

pro nějaké ξ ležící mezi body x a a . Polynom

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem funkce f n -tého stupně v bodě a** .

Věta A.2.6 Necht $b \in \mathbb{R}^n$ a matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je regulární. Pak soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení $x = A^{-1}b$.

Věta A.2.7 Necht $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická matice. Pak $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Věta A.2.8 Je-li matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ pozitivně definitní a symetrická, pak má všechna vlastní čísla kladná.

Věta A.2.9 (Geršgorinova pro reálné symetrické matice) Necht $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická matice a necht

$$r_i := |a_{i,1}| + |a_{i,2}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{i,n}|, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

a

$$S_i := \{x \in \mathbb{R} : |x - a_{i,i}| \leq r_i\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pak

$$\sigma(A) \subset S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n.$$

Věta A.2.10 Je-li matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symetrická a pozitivně definitní, pak je také regulární.

Věta A.2.11 (metoda per partes pro určitý integrál) Necht funkce $f, g \in C^1((a, b))$. Pak

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Příloha B

Thomasův algoritmus

Algoritmus vysvětlený v této příloze je popsán např. v knize E. Süliho a D. F. Mayerse [1] v kapitole 3.3. Pro přehlednost nebudeme v následujícím textu uvádět nulové prvky v maticích.

Thomasův algoritmus je metoda pro výpočet soustavy lineárních rovnic $Tx = r$, kde $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ je třídiagonální regulární¹ matice a $r \in \mathbb{R}^n$. První krok algoritmu spočívá v zapsání matice T jako $T = LU$, kde $L \in \mathbb{R}^{n,n}$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ je horní trojúhelníková matice. Matice T má tvar

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix}.$$

Matice L a U jsou pásové a mají tvar

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & & \\ & \ell_3 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ell_n & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & & \\ & u_2 & v_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Pro určení prvků matic L a U tyto matice nejdříve vynásobíme a součin položíme roven T :

$$LU = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & & \\ \ell_2 u_1 & \ell_2 v_1 + u_2 & v_2 & & & \\ & \ell_3 u_2 & \ell_3 v_2 + u_3 & v_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ell_n u_{n-1} & \ell_n v_{n-1} + u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix}.$$

¹Viz definici A.1.5.

Vidíme, že platí

$$v_j = c_j, \quad j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Následně musí platit $a_j = \ell_j u_{j-1}$, tedy

$$\ell_j = \frac{a_j}{u_{j-1}}, \quad j \in \{2, \dots, n\}.$$

Platí také $b_j = \ell_j v_{j-1} + u_j$, tedy

$$u_j = b_j - \ell_j v_{j-1}, \quad j \in \{2, \dots, n\},$$

a navíc $u_1 = b_1$. Jednoduše tedy získáme všechny prvky matic L a U v n iteracích.

Dalším krokem Thomasova algoritmu je samotné řešení soustavy $Tx = r$. Soustavu zapíšeme s využitím asociativity násobení matic jako

$$Ly = r, \quad Ux = y$$

a vyřešíme nejdříve soustavu $Ly = r$ pomocí dopředné substituce a poté soustavu $Ux = y$ pomocí zpětné substituce. Soustava $Ly = r$ vypadá následovně:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ell_3 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ell_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}.$$

Je zjevné, že $y_1 = r_1$. Po krátkém rozmyšlení si všimneme, že

$$y_j = r_j - \ell_j y_{j-1}, \quad j \in \{2, \dots, n\}.$$

Nyní můžeme vyřešit soustavu $Ux = y$:

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Nejdříve určíme hodnotu x_n , která je zjevně $x_n = \frac{y_n}{u_n}$. Dále platí

$$x_j = \frac{y_j - v_j x_{j+1}}{u_j}, \quad j \in \{n-1, \dots, 1\}.$$

Běžný LU rozklad plné matice má složitost řádově $\frac{2}{3}n^3$ FLOPS (bez řešení soustavy). Rozklad

pomocí Thomasova algoritmu má složitost řádově pouze $3n$ FLOPS. Celkově má tedy řešení soustavy $Tx = r$ pomocí Thomasova algoritmu složitost řádově pouze $8n$ FLOPS.

B.0.1 Thomasův algoritmus v Matlabu

V této příloze je uvedena implementace řešení soustavy $Tx = r$ pomocí Thomasova algoritmu v MATLABU. Vstupní parametry funkce jsou třídiagonální matice T a vektor r .

```

1  function x = ThomasuvAlgoritmus(T, r)
2
3  %n je dimenze čtvercové matice T
4  n = size(T, 1);
5
6  %inicializace vektorů
7  l = zeros(n, 1);
8  u = zeros(n, 1);
9  v = zeros(n-1, 1);
10
11 %získání vektorů a, b, c z matice T
12 a = diag(T, -1);
13 b = diag(T);
14 c = diag(T, 1);
15
16 %výpočet prvků l, u, v
17 v = c;
18
19 u(1) = b(1);
20 for j = 2 : n
21     l(j) = a(j-1) / u(j-1);
22     u(j) = b(j) - l(j)*v(j-1);
23 end
24
25 %řešení soustavy Ly=r
26 y = zeros(n, 1);
27 y(1) = r(1);
28 for j = 2 : n
29     y(j) = r(j) - l(j)*y(j-1);
30 end
31
32 %řešení soustavy Ux=y
33 x = zeros(n, 1);
34 x(n) = y(n) / u(n);

```

```
35 for j = n-1 :-1: 1
36     x(j) = (y(j) - v(j)*x(j+1)) / u(j);
37 end
38
39 %kontrola řešení x
40 norm_solution = norm(T\r - x);
41 if norm_solution < 1e-13
42     disp('x řeší soustavu Tx = r')
43 end
```