

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2005

Marie Sadowská

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Řešení variačních nerovnic pomocí hraničních integrálních rovnic

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 10. května 2005

.....

Abstrakt

V této práci je představeno řešení 2D Signoriniho úlohy pomocí Symmetric Galerkin Boundary Element Method. Tato metoda je založena na větě o třech potenciálech, symetrické reprezentaci Steklovova-Poincarého operátoru a aproximaci inverze operátoru jednoduché vrstvy. Diskretizace hraniční slabé formulace problému tak vede na úlohu minimalizace energetického funkcionálu. Duální úloha k tomuto minimalizačnímu problému je dále řešena pomocí algoritmu kvadratického programování s proporcionalizací a projekcemi. Nakonec jsou uvedeny numerické experimenty.

Klíčová slova: Boundary Element Method, Steklovův-Poincarého operátor, Signoriniho úloha, kvadratické programování

Abstract

In this work Symmetric Galerkin Boundary Element Method for 2D Signorini problem is presented. This method is based on a theorem about three potentials, a symmetric representation of Steklov-Poincaré operator and an approximation of an inverse of single layer operator. A discretization of a boundary weak formulation of the problem then leads to an energetic functional minimization problem. A dual problem to this minimization problem is solved using a quadratic programming algorithm with proportioning and projections. Also, numerical experiments are given.

Keywords: Boundary Element Method, Steklov-Poincaré operator, Signorini problem, quadratic programming

Poděkování

Tato práce byla podpořena grantem číslo 101/02/0072 Grantové agentury České republiky.

Za ochotu, motivaci a trpělivost děkuji svým dvěma učitelům doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D. a prof. RNDr. Zdeňkovi Dostálovi, DSc.

Seznam použitých zkratk a symbolů

- BEM - Boundary Element Method (metoda hraničních prvků),
- FEM - Finite Element Method (metoda konečných prvků),
- FFT - Fast Fourier Transform (rychlá Fourierova transformace),

- $\partial\Omega$ - hranice množiny Ω ,
- $\bar{\Omega}$ - uzávěr množiny Ω ,
- \mathbf{N} - množina všech přirozených čísel,
- \mathbf{R}^n - n -rozměrný euklidovský prostor, $n \in \mathbf{N}$,
- \mathbf{R} - množina všech reálných čísel,
- \mathbf{R}^+ - množina všech kladných reálných čísel,
- $\mathbf{R}^{m \times n}$ - prostor všech reálných matic řádu $m \times n$, $m, n \in \mathbf{N}$,
- $C^n(\Omega)$ - prostor všech reálných funkcí se spojitými derivacemi na množině Ω do n -tého řádu včetně, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,
- $C^\infty(\Omega)$ - prostor všech reálných funkcí se spojitými derivacemi všech řádů na množině Ω ,
- $C(\Omega)$ - prostor všech reálných spojitých funkcí na množině Ω ,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ - skalární součin v Lebesgueově prostoru $L^2(\partial\Omega)$,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - skalární součin v \mathbf{R}^n ,
- $\|\cdot\|$ - euklidovská norma v \mathbf{R}^n ,
- Δu - Laplaceův operátor,
- ∇u - gradient funkce u ,
- $u|_\Omega$ - restrikce funkce u na množinu Ω ,
- X^* - duální prostor k prostoru X ,
- $\text{Lin}M$ - lineární obal množiny M ,
- $\text{diam}M$ - průměr množiny M ,
- $\text{supp}f$ - nosič funkce f ,
- I - identické zobrazení,
- $(\cdot)^T$ - symbol pro transponování vektoru nebo matice.

Obsah

1 Úvod.	10
2 Formulace okrajové úlohy. Fundamentální řešení.	11
3 Věta o třech potenciálech.	15
4 Potenciály v rovině a jejich vlastnosti.	16
5 Sobolevovy prostory.	18
6 Steklovův-Poincarého operátor.	20
7 Hraniční slabá formulace Signoriniho úlohy.	22
8 Diskretizace Steklovova-Poincarého operátoru.	24
9 Řešení Signoriniho úlohy pomocí minimalizace energetického funkcionálu.	29
10 Diskretizace hranice. Volba testovacích funkcí.	30
11 Vyčíslení diskretizovaného operátoru jednoduché vrstvy.	31
11.1 Diagonální prvek.	33
11.2 První prvek vpravo od diagonály.	37
11.3 Druhý prvek vpravo od diagonály.	40
11.4 Další prvky vpravo od diagonály.	42
11.5 Zbývající prvky na prvním a druhém řádku.	43
12 Vyčíslení diskretizovaného operátoru dvojvrstvy.	43
12.1 Integrace přes shodné dílky, $\Gamma_k = \Gamma_l$	44
12.2 Integrace přes sousední dílky, Γ_l sousedí zleva s Γ_k	45
12.3 Integrace přes sousední dílky, Γ_l sousedí zprava s Γ_k	46
12.4 Integrace přes disjunktní dílky.	47
12.5 Sestavení matice.	48
13 Vyčíslení diskretizovaného hypersingulárního operátoru.	49
13.1 První prvek vpravo od diagonály.	50
13.2 Druhý prvek vpravo od diagonály.	56
13.3 Další prvky vpravo od diagonály.	59
13.4 Zbývající prvky na prvním a druhém řádku.	60

14 Vyčíslení diskretizovaného operátoru identity.	60
14.1 Diagonální prvek.	61
14.2 První prvek vpravo od diagonály.	62
14.3 Poslední prvek na prvním řádku.	62
15 Vyčíslení diskretizovaného Newtonova potenciálu.	62
16 Užitečné vlastnosti matic operátorů.	64
17 Dopočtení řešení ve vnitřním bodě.	65
18 Duální formulace.	66
19 Algoritmus pro řešení duální úlohy.	67
20 Modelová úloha a numerické experimenty.	69
21 Závěr.	72

Seznam obrázků

1	Obrázek k důkazu věty 2.1.	13
2	Příklad diskretizace hranice pro $n = 7$	31
3	Zvolené testovací funkce.	32
4	Lineární interpolace uzlových hodnot řešení na Γ_i	33
5	Zvolená diskretizace hranice.	71
6	Řešení modelové úlohy pro $n = 64$	72

1 Úvod.

Boundary Element Method (BEM) představuje alternativu k Finite Element Method (FEM), která je dnes nejužívanější metodou matematického modelování. Význam BEM spočívá především v redukci dimenze problému, 2D problém se převede na problém na 1D hranici, 3D problém se převede na 2D hranici. Výhodou tak je, že diskretizujeme pouze hranici oblasti, zatímco u FEM musíme diskretizovat celou oblast. Metodu dále dobře použijeme, pokud má hranice geometricky složitý tvar. Z jednoduchosti diskretizace hranice a z toho, že nemáme žádnou síť uvnitř oblasti, plyne velmi výhodné použití BEM při řešení úloh tvarové optimalizace, kontaktních úloh a také vnějších úloh. Základním znakem BEM je nutnost znalosti fundamentálního řešení příslušného diferenciálního operátoru v dané dimenzi. Tím můžeme být poněkud omezeni, protože ne u všech diferenciálních operátorů je fundamentální řešení známo. Naopak to, že fundamentální řešení je přesné řešení, může zvýšit přesnost ve výpočtu druhotných proměnných (například napětí) [6]. Výchozím bodem této metody je věta o třech potenciálech a znalost vlastností jednotlivých potenciálů. Věta o třech potenciálech určuje řešení v libovolném vnitřním bodě oblasti pomocí integrální rovnice. Od této integrální rovnice se odvíjejí dva základní postupy přibližného řešení, a to metoda kolokace a Symmetric Galerkin BEM. V této práci jsme zvolili druhý přístup. Ten sice oproti kolokaci zahrnuje navíc jednu integraci přes hranici, a proto je také více komplikovanější a o něco pomalejší metodou než kolokace, avšak zahrnuje vyčíslení hypersingulárního integrálního operátoru, což má využití v mnoha aplikacích (například při modelování šíření trhlin). Pomocí symetrie lze dále dobře snížit dobu výpočtu matice tuhosti, která je jednou z výhod kolokace.

Jako modelový problém z oblasti mechaniky jsme zvolili 2D kontaktní úlohu s Laplaceovým operátorem a překážkou definovanou na části hranice. Uvažovaná úloha má slabou formulaci ve tvaru variační nerovnosti. Pomocí Greenovy věty a vyjádření normálové derivace řešení problému pomocí symetrické reprezentace Steklovova-Poincarého operátoru na hranici [11], přejdeme od této variační nerovnosti na oblasti k hraniční variační nerovnosti. Není-li však naše kontaktní úloha homogenní, na pravé straně nerovnosti se nám stále vyskytuje operátor, jehož předpis je určen integrálem přes celou oblast. Steklovův-Poincarého operátor zobrazuje řešení homogenního problému na hranici na normálové derivace tohoto řešení na hranici a je dán předpisem obsahující další hraniční integrální operátory. Jsou jimi operátor jednoduché vrstvy a dvojrstvy, adjungovaný operátor k operátoru dvojrstvy a hypersingulární operátor. K nalezení aproximace inverze operátoru jednoduché vrstvy, která je obsažena v předpisu Steklovova-Poincarého operátoru a pro níž nemáme explicitní vyjádření, stejně jako k diskretizaci hraniční slabé formulace úlohy, byla použita Galerkinova metoda. Příslušné vlastnosti aproximovaného Steklovova-Poincarého operátoru jsou obsaženy například v [5].

Použití symetrické reprezentace Steklovova-Poincarého operátoru se ukázalo být velmi efektivní pro řešení variačních nerovnic, neboť vede na úlohu minimalizace energetického funkcionálu s omezením na nerovnost. Pomocí principu duality jsme získali příslušnou duální minimalizační úlohu mnohem menší dimenze a s ještě lépe podmíněnou maticí tuhosti. Pro tuto minimalizaci jsme užili nedávno navržený algoritmus kvadratického programování založený na kroku sdružených gradientů s projekcemi a proporcionalizací [3]. Tento algoritmus se kvalitativně liší od jiných algoritmů tím, že je pro něj dokázána rychlost konvergence v závislosti na podmíněnosti Hessiánu a zcela nezávisle na omezeních. Pomocí řešení duální úlohy jsme pak dopočetli řešení původního problému. Následným dosazením tohoto řešení a jeho normálové derivace na hranici do přepisu z věty o třech potenciálech obdržíme užitím numerické kvadratury řešení v libovolném bodě uvnitř oblasti.

Při výpočtu matice tuhosti je nutné počítat dvojnásobné integrály přes hranici oblasti, přičemž jádro integrálů má tvar buď přímo fundamentálního řešení Laplaceovy rovnice nebo jeho derivace. Z tvaru fundamentálního řešení je jasné, že v určitých případech budou dané integrály singulární. Jejich výpočtu jsme proto věnovali jistou péči. Použili jsme zejména symbolických výpočtů, pomocí nichž jsme dosáhli analytického vyčíslení tam, kde to bylo možné, a zbývající integraci jsme provedli pomocí pravidel pro numerický výpočet integrálu. Výpočet diagonálních prvků matice příslušející

hypersingulárnímu operátoru jsme obešli pomocí důležitého vztahu odvozeného v kapitole (13). Stejně tak lze například ke kontrole správnosti výpočtu jednotlivých matic užít vztahy z kapitoly (16).

Numerické řešení zvolené modelové úlohy na kruhové oblasti pomocí Symmetric Galerkin BEM se spojitými po částech lineárními testovacími funkcemi je pro zvolený počet uzlů na hranici uvedeno v poslední kapitole.

2 Formulace okrajové úlohy. Fundamentální řešení.

Bud' $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí, $f \in C(\Omega)$. Budeme uvažovat úlohu

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ v } \Omega, \\ \text{okrajové podmínky zadané na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Okrajové podmínky mohou být předepsány ve tvaru

- Dirichletovy okrajové podmínky: $u = g$ na $\partial\Omega$, kde g je spojitá funkce na $\partial\Omega$,
- Neumannovy okrajové podmínky: $\frac{du}{dn} = g$ na $\partial\Omega$, kde g je spojitá funkce na $\partial\Omega$ a n je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$,
- Smíšené okrajové podmínky: na $\emptyset \neq \Gamma_1 \subset \partial\Omega$ je zadána Dirichletova okrajová podmínka a na $\emptyset \neq \Gamma_2 \subset \partial\Omega$ je zadána Neumannova okrajová podmínka, přičemž $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$.

Uvažujme dále funkci $v : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danou předpisem

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x - y\|}. \quad (1)$$

Symbolem $\|\cdot\|$ budeme rozumět euklidovskou normu, tj.

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Všimněme si, že funkce $v \in C^\infty((\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2) \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : x = y\})$. V bodech $(x, x) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ je funkce v singulární.

Dále buď y libovolný bod z \mathbf{R}^2 . Spočtěme pro každé $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{y\}$ první a druhé parciální derivace funkce v vůči proměnné x :

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \|x - y\| \cdot \frac{-1}{\|x - y\|^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x_i - y_i)}{\|x - y\|} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^2}, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\|x - y\|^2} - \frac{1}{2\pi} \cdot (x_i - y_i) \cdot \frac{-2}{\|x - y\|^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x_i - y_i)}{\|x - y\|} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\|x - y\|^2} + \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{(x_i - y_i)^2}{\|x - y\|^4}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Potom

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{\|x - y\|^2} - 2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2}{\|x - y\|^4} \right) = 0.$$

Ukázali jsme tedy, že

$$\text{pro libovolné pevné } y \in \mathbf{R}^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{y\} : \quad \Delta_x v(x, y) = 0.^1$$

Pro každé pevně zvolené $y \in \mathbf{R}^2$ je funkce $x \mapsto v(x, y)$ harmonická v každé omezené oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{y\}$.

Definice 2.1 Funkci $v : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danou předpisem (1) nazveme **fundamentálním řešením Laplaceovy rovnice v \mathbf{R}^2** .

Dále si připomeňme, že Diracovou distribucí se středem v libovolném bodě $a \in \mathbf{R}^2$ rozumíme takový spojitý lineární funkcionál δ_a na prostoru testovacích funkcí $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ ², že pro každé $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ platí rovnost $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ ³.

Věta 2.1 Pro každé $y \in \mathbf{R}^2$ platí

$$\Delta_x v(x, y) = -\delta_y,$$

tj.

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2) : \langle \Delta_x v, \varphi \rangle = \langle -\delta_y, \varphi \rangle.$$

Důkaz: Buď $y \in \mathbf{R}^2$ pevné a pro každé $\varepsilon > 0$ označme $B_\varepsilon(y) \stackrel{\text{ozn}}{=} \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x - y\| < \varepsilon\}$. Zřejmě funkce $x \mapsto v(x, y)$ je prvkem $L^1_{loc}(\mathbf{R}^2 \setminus \{y\})$ ⁴. Dále platí

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon(y)} |v(x, y)| dx &= \int_{B_\varepsilon(y)} \frac{1}{2\pi} \left| \ln \frac{1}{\|x - y\|} \right| dx = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\varepsilon \frac{1}{2\pi} r \left| \ln \frac{1}{\|r(\cos t, \sin t)\|} \right| dr \right) dt = \\ &= \int_0^\varepsilon r |\ln r| dr. \end{aligned}$$

Snadno ověříme, že poslední integrál je konečný. Tedy pro libovolné $y \in \mathbf{R}^2$ je funkce $x \mapsto v(x, y)$ prvkem $L^1_{loc}(\mathbf{R}^2)$. Dále buď $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ a $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí tak, aby $\text{supp } \varphi \subset \Omega$. Pro každé (dost malé) $\varepsilon > 0$ označme $\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{ozn}}{=} \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(y)}$ (viz. obrázek (1)). Protože

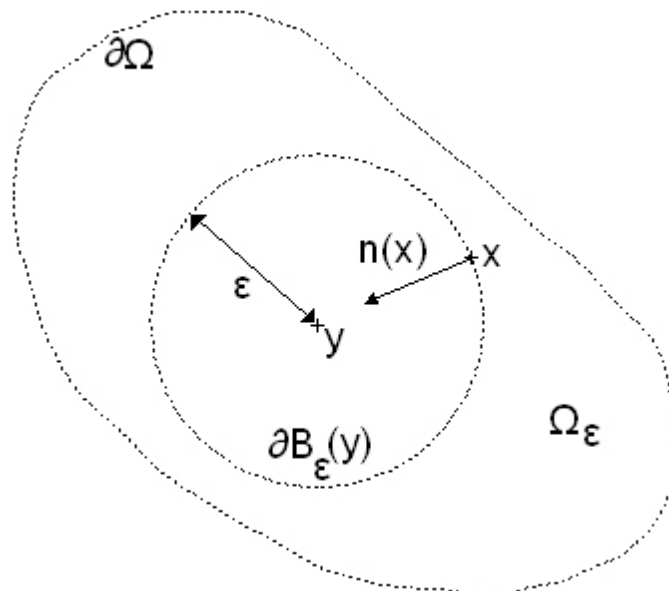
¹Symbol Δ_x označuje Laplaceův operátor vůči proměnné x , tj. pro $v : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definujeme $\Delta_x v(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x, y)$.

² $C_0^\infty(\mathbf{R}^2) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^2) : \text{supp } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \in \mathbf{R}^2 : \varphi(x) \neq 0\}} \text{ je kompaktní množina v } \mathbf{R}^2 \right\}$

³Pomocí ostrých závorek budeme nyní značit hodnotu distribuce v dané testovací funkci.

⁴Buď $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{R}^2$. Pak f je prvkem $L^1_{loc}(\Omega)$, pokud pro každý kompaktní $K \subset \Omega$ platí, že f je prvkem $L^1(K)$ (tj. že f je měřitelná a $\int_K |f| dx < +\infty$). Každá funkce $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ je také distribucí na Ω .

Obrázek 1: Obrázek k důkazu věty 2.1.



oblast Ω_ε již neobsahuje y , platí

$$\Delta_x v(x, y) = 0 \quad \text{pro každé } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Platí tedy také rovnost

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v(x, y) \cdot \Delta \varphi(x) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} (v(x, y) \cdot \Delta \varphi(x) - \Delta_x v(x, y) \cdot \varphi(x)) dx.$$

Z tzv. druhé Greenovy formule⁵ a ze vztahu $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(y)$ pak dostaneme⁶

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} v(x, y) \cdot \Delta \varphi(x) dx &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d\varphi}{dn}(x) v(x, y) - \varphi(x) \frac{dv}{dn_x}(x, y) \right) ds_x + \\ &+ \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(\frac{d\varphi}{dn}(x) v(x, y) - \varphi(x) \frac{dv}{dn_x}(x, y) \right) ds_x. \end{aligned}$$

Díky tomu, že $\text{supp} \varphi \subset \Omega$, je první integrál na pravé straně nulový. Takže

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v(x, y) \cdot \Delta \varphi(x) dx = \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{d\varphi}{dn}(x) v(x, y) ds_x}_{\text{ozn } I_1} - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \varphi(x) \frac{dv}{dn_x}(x, y) ds_x}_{\text{ozn } I_2}. \quad (3)$$

⁵Ta říká, že $\forall u, w \in C^2(\bar{\Omega}) : \int_{\Omega} (\Delta u \cdot w - u \cdot \Delta w) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{du}{dn} w - u \frac{dw}{dn} \right) ds$.

⁶Symbol $\frac{dv}{dn_x}$ označuje normálovou derivaci funkce v vůči proměnné x a symbol ds_x znamená, že budeme integrovat podle x .

Podívejme se nyní, jak vypadá $\frac{dv}{dn_x}(x, y)$ pro $x \in \partial B_\varepsilon(y)$. Jednotkový vnější normálový vektor k $\partial B_\varepsilon(y)$ v bodě $x \in \partial B_\varepsilon(y)$ (viz. obrázek (1)) je dán předpisem

$$n(x) = \frac{1}{\varepsilon} (y_1 - x_1, y_2 - x_2).$$

Užitím (2) pak získáme

$$\frac{dv}{dn_x}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y) \cdot n_i(x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}, \quad x \in \partial B_\varepsilon(y).$$

Parametrizací $\partial B_\varepsilon(y)$ dále dostaneme

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{dn} (y + \varepsilon (\cos t, \sin t)) \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|\varepsilon (\cos t, \sin t)\|} \cdot \|\varepsilon (-\sin t, \cos t)\| dt = \\ &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{dn} (y + \varepsilon (\cos t, \sin t)) dt \end{aligned}$$

a

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \varphi (y + \varepsilon (\cos t, \sin t)) \cdot \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \|\varepsilon (-\sin t, \cos t)\| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi (y + \varepsilon (\cos t, \sin t)) dt.$$

Protože

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \varepsilon \ln \varepsilon = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \varepsilon = 0, \quad (4)$$

platí také

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} I_1 = 0 \cdot \frac{d\varphi}{dn}(y) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} I_2 = \varphi(y).$$

Limitním přechodem od (3) při $\varepsilon \rightarrow 0_+$ získáme rovnost

$$\int_{\Omega} v(x, y) \cdot \Delta \varphi(x) dx = -\varphi(y)$$

a protože $\text{supp} \varphi \subset \Omega$, platí

$$\int_{\mathbf{R}^2} v(x, y) \cdot \Delta \varphi(x) dx = -\varphi(y).$$

Takže

$$\langle -\delta_y, \varphi \rangle = -\varphi(y) = \int_{\mathbf{R}^2} v(x, y) \cdot \Delta \varphi(x) dx = \langle v, \Delta \varphi \rangle = {}^7 \langle \Delta_x v, \varphi \rangle$$

a tímto je důkaz ukončen.

⁷Tato rovnost plyne z $\left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle v, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right\rangle$, $i = 1, 2$.

3 Věta o třech potenciálech.

Věta 3.1 (O třech potenciálech) *Buď*

- $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí,
- $v : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ fundamentální řešení Laplaceovy rovnice v rovině, tj.

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x - y\|},$$

- $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Pak pro každé $x \in \Omega$ platí:

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Delta u(y) \cdot v(x, y) dy + \int_{\partial\Omega} \left(v(x, y) \frac{du}{dn}(y) - \frac{dv}{dn_y}(x, y) u(y) \right) ds_y.$$

Důkaz: Buď dáno $x \in \Omega$. Pro každé (dost malé) $\varepsilon > 0$ označme $B_\varepsilon(x) \stackrel{\text{ozn}}{=} \{y \in \mathbf{R}^2 : \|y - x\| < \varepsilon\}$ a dále $\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{ozn}}{=} \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$. Oblast Ω_ε nyní neobsahuje x , platí tak

$$\Delta_y v(x, y) = 0 \quad \text{pro každé } y \in \Omega_\varepsilon.$$

Protože dále $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(x)$, dostáváme podobně jako v důkazu věty 2.1 použitím druhé Greenovy formule rovnost

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(y) \cdot v(x, y) dy &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{du}{dn}(y) v(x, y) - u(y) \frac{dv}{dn_y}(x, y) \right) ds_y + \\ &+ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(\frac{du}{dn}(y) v(x, y) - u(y) \frac{dv}{dn_y}(x, y) \right) ds_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Vyjádříme si teď $\frac{dv}{dn_y}(x, y)$ na hranici kruhu $B_\varepsilon(x)$. Spočtíme nejprve první parciální derivace funkce v vůči proměnné y :

$$\frac{\partial v}{\partial y_i}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \|x - y\| \cdot \frac{-1}{\|x - y\|^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2(x_i - y_i)}{\|x - y\|} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^2}, \quad i = 1, 2.$$

Když si vnější jednotkový normálový vektor k hranici kruhu $B_\varepsilon(x)$ v bodě $y \in \partial B_\varepsilon(x)$ vyjádříme ve tvaru⁸

$$n(y) = \frac{1}{\varepsilon} (x_1 - y_1, x_2 - y_2),$$

můžeme psát

$$\frac{dv}{dn_y}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial y_i}(x, y) \cdot n_i(y) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}, \quad y \in \partial B_\varepsilon(x).$$

⁸Pro představu může sloužit obrázek (1), v němž zaměníme x a y .

Dosazením za v a $\frac{dv}{dn_y}$ do druhého integrálu na pravé straně vztahu (5) obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(y) \cdot v(x, y) dy &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{du}{dn}(y) v(x, y) - u(y) \frac{dv}{dn_y}(x, y) \right) ds_y + \\ &+ \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{du}{dn}(y) \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x-y\|} ds_y}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} I_1} - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \frac{1}{2\pi\varepsilon} ds_y}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} I_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Parametrizací $\partial B_\varepsilon(x)$ získáme

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{du}{dn}(x + \varepsilon(\cos t, \sin t)) \cdot \frac{\|\varepsilon(-\sin t, \cos t)\|}{2\pi} \ln \frac{1}{\|\varepsilon(\cos t, \sin t)\|} dt = \\ &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{du}{dn}(x + \varepsilon(\cos t, \sin t)) dt \end{aligned}$$

a

$$I_2 = \int_0^{2\pi} u(x + \varepsilon(\cos t, \sin t)) \cdot \frac{\|\varepsilon(-\sin t, \cos t)\|}{2\pi\varepsilon} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \varepsilon(\cos t, \sin t)) dt.$$

Ze vztahu (4) pak plyne, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} I_1 = 0 \cdot \frac{du}{dn}(x) = 0$$

a dále pak

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} I_2 = u(x).$$

Limitním přechodem od rovnosti (6) při $\varepsilon \rightarrow 0_+$ tedy získáme

$$\int_{\Omega} \Delta u(y) \cdot v(x, y) dy = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{du}{dn}(y) v(x, y) - u(y) \frac{dv}{dn_y}(x, y) \right) ds_y - u(x),$$

což jsme měli dokázat.

Jednotlivé integrální operátory v předchozí větě se nazývají **potenciály** a podobněji se jimi budeme zabývat v následující kapitole.

4 Potenciály v rovině a jejich vlastnosti.

Definice 4.1 *Bud' $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí. Funkce $v, w, \varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, které jsou dány předpisy*

- $v(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y) \ln \frac{1}{\|x-y\|} ds_y,$

- $w(x) = \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{d}{dn_y} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) ds_y,$
- $\varphi(x) = \int_{\Omega} \rho(y) \ln \frac{1}{\|x-y\|} dy,$

postupně nazýváme

- **potenciál jednoduché vrstvy,**
- **potenciál dvojvrstvy,**
- **Newtonův potenciál.**

Funkcím $\mu, \sigma, \rho : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ říkáme **hustoty příslušných potenciálů.**

Věta 4.1 (O vlastnostech potenciálu jednoduché vrstvy) *Bud' $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $\mu \in C(\partial\Omega)$. Pak potenciál v je spojitý v \mathbf{R}^2 a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí*

- $\left[\frac{dv}{dn_x}(x) \right]_{int} \stackrel{\text{ozn } 9}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{dv}{dn_x}(x + \alpha n_x) = \pi\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{d}{dn_x} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) ds_y,$
- $\left[\frac{dv}{dn_x}(x) \right]_{ext} \stackrel{\text{ozn}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{dv}{dn_x}(x + \alpha n_x) = -\pi\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{d}{dn_x} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) ds_y,$

tj. $\left[\frac{dv}{dn_x}(x) \right]_{int} - \left[\frac{dv}{dn_x}(x) \right]_{ext} = 2\pi\mu(x)$. Tedy potenciál jednoduché vrstvy má v bodech na $\partial\Omega$ skok v derivaci podle vnější normály k $\partial\Omega$.

Věta 4.2 (O vlastnostech potenciálu dvojvrstvy) *Bud' $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $\sigma \in C(\partial\Omega)$. Pak restrikce potenciálu w na $\partial\Omega$ je spojitá funkce a pro každé $x_0 \in \partial\Omega$ platí*

- $w_{ext}(x_0) \stackrel{\text{ozn}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}}} w(x) = \pi\sigma(x_0) + w(x_0),$
- $w_{int}(x_0) \stackrel{\text{ozn}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} w(x) = -\pi\sigma(x_0) + w(x_0),$

tj. $w_{ext}(x_0) - w_{int}(x_0) = 2\pi\sigma(x_0)$. Potenciál dvojvrstvy má tedy v bodech na $\partial\Omega$ skok ve funkční hodnotě.

Tyto limitní vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy a dvojvrstvy v rovině lze najít například v [9].

Věta 4.3 (O vlastnostech Newtonova potenciálu) *Bud' $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $\rho \in L^\infty(\Omega)$ ¹⁰. Pak potenciál φ je spojitý a spojitě diferencovatelný v \mathbf{R}^2 .*

⁹Symbol n_x označuje vnější jednotkový normálový vektor k $\partial\Omega$ v bodě $x \in \partial\Omega$.

¹⁰ $L^\infty(\Omega)$ značí množinu všech měřitelných funkcí f , pro které $\exists M \in \mathbf{R} : |f| \leq M$ skoro všude v Ω .

5 Sobolevovy prostory.

V následujících definicích a tvrzeních se omezíme pouze na oblasti v \mathbf{R}^2 . Více podrobností lze najít například v [10].

Definice 5.1 (Sobolevův prostor) *Bud'*

- Ω neprázdná omezená oblast v \mathbf{R}^2 ,
- $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,
- $p \in [1, \infty)$.

Prostor

$$W^{k,p}(\Omega)$$

definovaný jako zúplnění

$$\left(C^\infty(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{k,p} \right),$$

kde pro každé $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ definujeme¹¹

$$\|u\|_{k,p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

nazveme Sobolevovým prostorem.

Platí:

- $L^2(\Omega) = W^{0,2}(\Omega) \supset W^{1,2}(\Omega) \supset W^{2,2}(\Omega) \supset \dots$,
- $W^{k,2}(\Omega)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle u, v \rangle_{k,2} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Definice 5.2 (Oblast s lipschitzovskou hranicí) *Bud'* Ω neprázdná omezená oblast v \mathbf{R}^2 . Tuto oblast nazveme oblastí s lipschitzovskou hranicí, pokud lze její hranici pokrýt konečným počtem okolí tak, že pro každé z těchto okolí U existují

- kartézský systém souřadnic (y_1, y_2) ,
- $\varepsilon, \delta \in \mathbf{R}^+$,
- funkce $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

tak, že

- $U \cap \partial\Omega = \{(y_1, y_2) : |y_1| < \delta, y_2 = a(y_1)\}$,
- $\{(y_1, y_2) : |y_1| < \delta, a(y_1) < y_2 < a(y_1) + \varepsilon\} \subset \Omega$,
- $\{(y_1, y_2) : |y_1| < \delta, a(y_1) - \varepsilon < y_2 < a(y_1)\} \subset \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$,

¹¹Zde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ je multiindex a $D^\alpha u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$.

- funkce a je lipschitzovsky spojitá na $\{y_1 : |y_1| < \delta\}$.¹²

Definice 5.3 (Prostor $L^p(\partial\Omega)$) Buď $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ oblast s lipschitzovskou hranicí. Vzhledem k předchozí definici tak můžeme uvažovat konečný počet m kartézských systémů souřadnic (y_{1_r}, y_{2_r}) , čísel ε_r, δ_r a lipschitzovsky spojitých funkcí a_r daných vlastností. Dále buď

- $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$,
- $p \in [1, \infty)$.

Pak definujeme

$$f \in L^p(\partial\Omega) \stackrel{\text{def}}{\iff} \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{r=1}^m \int_{-\delta_r}^{\delta_r} |f(y_{1_r}, a_r(y_{1_r}))|^p dy_{1_r} \right)^{1/p} < \infty.$$

Věta 5.1 (O stopách) Buď $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ oblast s lipschitzovskou hranicí a $p \in [1, \infty)$. Potom existuje právě jedno spojitě lineární zobrazení

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

takové, že

$$\forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : Tu = u|_{\partial\Omega}.$$

Prvek $Tu \in L^p(\partial\Omega)$ nazýváme stopou funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Definice 5.4 (Prostor $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$) Buď $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ oblast s lipschitzovskou hranicí. Obraz prostoru $W^{1,2}(\Omega)$ při zobrazení T označíme

$$T(W^{1,2}(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

a v $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ zavedeme normu

$$\|w\|_{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{v \in W^{1,2}(\Omega) : Tv=w} \|v\|_{1,2}.$$

$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je vektorovým podprostorem $L^2(\partial\Omega)$.

Definice 5.5 (Prostor $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$) Buď $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ oblast s lipschitzovskou hranicí. Pak symbolem $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ označujeme duální prostor¹³ k $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, tj.

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right)^*.$$

¹²Tzn. existuje $L \in \mathbf{R}^+$ takové, že pokud $|y_1| < \delta$ a $|z_1| < \delta$, pak $|a(y_1) - a(z_1)| \leq L|y_1 - z_1|$.

¹³Ke každému normovanému lineárnímu prostoru \mathbf{X} lze definovat duální prostor \mathbf{X}^* jako množinu všech lineárních spojitých funkcionalů nad \mathbf{X} .

6 Steklovův-Poincarého operátor.

Bud' $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, přičemž $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $g_1 \in C(\Gamma_1)$, $g_2 \in C(\Gamma_2)$ a $f \in C(\bar{\Omega})$. Uvažujme smíšenou úlohu

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = g_1 & \text{na } \Gamma_1, \\ \frac{du}{dn} = g_2 & \text{na } \Gamma_2. \end{cases} \quad (7)$$

Bud' $u \in C^2(\bar{\Omega})$ řešením úlohy (7). Pak dle věty o třech potenciálech platí

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega: \quad u(x) = & \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x-y\|} \frac{du}{dn}(y) ds_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn_y} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) u(y) ds_y + \\ & + \int_{\Omega} f(y) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x-y\|} dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Protože máme zadánu Dirichletovu okrajovou podmínku na Γ_1 a Neumannovu okrajovou podmínku na Γ_2 , je nutné najít hodnoty $\frac{du}{dn}$ na Γ_1 a hodnoty u na Γ_2 , abychom mohli řešení u uvnitř oblasti Ω vypočítat podle vzorce (8). Všimněme si, že první integrál je vlastně potenciál jednoduché vrstvy s hustotou $\mu(y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{du}{dn}(y) \in C(\partial\Omega)$, druhý integrál představuje potenciál dvojvrstvy s hustotou $\sigma(y) = \frac{1}{2\pi} u(y) \in C(\partial\Omega)$ a třetí integrál je Newtonův potenciál s hustotou $\rho(y) = \frac{1}{2\pi} f(y) \in C(\bar{\Omega})$. Protože již známe vlastnosti prvních dvou potenciálů se spojitými hustotami na $\partial\Omega$ a vlastnosti Newtonova potenciálu s hustotou „skoro všude omezenou“ na Ω (viz. kapitolu (4)), dostaneme limitním přechodem $\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \partial\Omega$ rovnost

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x-y\|} \frac{du}{dn}(y) ds_y - \left[-\pi \frac{1}{2\pi} u(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn_y} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) u(y) ds_y \right] + \\ & + \int_{\Omega} f(y) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x-y\|} dy, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \forall x \in \partial\Omega: \quad \frac{1}{2} u(x) = & \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x-y\|} \frac{du}{dn}(y) ds_y}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} V\left(\frac{du}{dn}\right)(x)} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn_y} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) u(y) ds_y}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} K(u)(x)} + \\ & + \underbrace{\int_{\Omega} f(y) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x-y\|} dy}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} N_0(f)(x)}. \end{aligned}$$

Obdobně při stejném limitním přechodu obdržíme

$$\begin{aligned} \left[\frac{du}{dn_x}(x) \right]_{int} = & \frac{du}{dn}(x) = \pi \frac{1}{2\pi} \frac{du}{dn}(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{du}{dn}(y) \frac{d}{dn_x} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) ds_y - \\ & - \frac{d}{dn_x} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn_y} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) u(y) ds_y + \frac{d}{dn_x} \int_{\Omega} f(y) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x-y\|} dy, \end{aligned}$$

tj.

$$\forall x \in \partial\Omega : \frac{1}{2} \frac{du}{dn}(x) = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{du}{dn}(y) \frac{d}{dn_x} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) ds_y}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} K' \left(\frac{du}{dn} \right) (x)} - \underbrace{\frac{d}{dn_x} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn_y} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) u(y) ds_y}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} -D(u)(x)} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2\pi} f(y) \frac{d}{dn_x} \left(\ln \frac{1}{\|x-y\|} \right) dy}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} N_1(f)(x)}.$$

Na $\partial\Omega$ tedy současně platí

$$\frac{1}{2} u = V \left(\frac{du}{dn} \right) - K(u) + N_0(f), \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dn} = K' \left(\frac{du}{dn} \right) + D(u) + N_1(f). \quad (10)$$

Jednotlivé integrální operátory pak nazýváme

- V ... operátor jednoduché vrstvy,
- K ... operátor dvojvrstvy,
- K' ... adjungovaný operátor k operátoru dvojvrstvy,
- D ... hypersingulární operátor,
- N_0 a N_1 ... Newtonovy potenciály.

Dá se ukázat, viz. [5, 12], že

$$V : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad K : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \\ K' : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad D : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

jsou spojitými operátory, a dále pak, že

- hypersingulární operátor je symetrický a pozitivně semidefinitní,
- operátor jednoduché vrstvy je symetrický a pozitivně definitní, pokud je oblast Ω „dostatečně malá“.

Z pozitivní definitnosti V pak plyne existence V^{-1} . Z rovnice (9) si vyjádříme

$$\frac{du}{dn} = V^{-1} \left(\frac{1}{2} I + K \right) (u) - V^{-1} N_0(f). \quad (11)$$

Přičtením $\frac{1}{2} \frac{du}{dn}$ k rovnici (10) získáme

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dn} + \frac{1}{2} \frac{du}{dn} = K' \left(\frac{du}{dn} \right) + \frac{1}{2} \frac{du}{dn} + D(u) + N_1(f),$$

tedy

$$\frac{du}{dn} = \left(\frac{1}{2}I + K'\right) \left(\frac{du}{dn}\right) + D(u) + N_1(f).$$

Užijeme-li (11) k dosažení za $\frac{du}{dn}$ na pravé straně výše uvedené rovnosti, dostáváme na $\partial\Omega$ vztah

$$\frac{du}{dn} = \left(\frac{1}{2}I + K'\right) \left[V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K\right) (u) - V^{-1}N_0(f) \right] + D(u) + N_1(f),$$

tedy

$$\frac{du}{dn} = \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}I + K'\right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K\right) + D \right]}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} S} (u) + \underbrace{\left[N_1 - \left(\frac{1}{2}I + K'\right) V^{-1}N_0 \right]}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} -N} (f). \quad (12)$$

Operátor

$$S : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

se nazývá **Steklovův-Poincarého operátor**. Tento operátor je lineární, spojitý, symetrický a pozitivně semidefinitní, viz. [5, 12].

7 Hraniční slabá formulace Signoriniho úlohy.

Bud' $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{R}^2$ omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Uvažujme kontaktní úlohu

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{na } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{na } \Gamma_u, \\ \frac{du}{dn} = 0 \quad \text{na } \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \\ \frac{du}{dn} \geq 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \\ \frac{du}{dn}(u - g) = 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \end{array} \right. \quad (13)$$

přičemž Γ_u, Γ_f a Γ_c jsou navzájem disjunktí podmnožiny $\partial\Omega$, platí $\Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c = \partial\Omega$, $f \in L^2(\Omega)$ a $g \in L^2(\Gamma_c)$.

Řešení úlohy (13) můžeme interpretovat jako průhyb membrány natahované jednotkovou silou, zatížené svíslou silou f a uchycené na části hranice Γ_u . Pod další částí hranice Γ_c se nachází překážka vyjádřená pomocí funkce g . Poslední rovnost v úloze se nazývá podmínka komplementarity. Tuto podmínku lze interpretovat tak, že v bodech, ve kterých se membrána nedotkne překážky, bude tlak na překážku nulový a v bodech styku s překážkou uvažujeme tlak nezáporný (nulový pouze tehdy, když membrána přesně dosedne na překážku a reakce překážky bude tedy nulová).

Bud' $V = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : Tv = 0 \text{ na } \Gamma_u\}$. V je podprostor Sobolevova prostoru $W^{1,2}(\Omega)$. Definujme dále $K = \{v \in V : Tv - g \geq 0 \text{ na } \Gamma_c\}$. Všimněme si, že K není podprostorem $W^{1,2}(\Omega)$, avšak je to uzavřená konvexní množina¹⁴ obsahující pouze z kinematického hlediska rozumné funkce.

Předpokládejme nyní, že u je hladké řešení úlohy (13). Pak

$$\forall w \in V : \quad - \int_{\Omega} \Delta u w dx = \int_{\Omega} f w dx$$

¹⁴Množina M je konvexní, pokud pro každé $u, v \in M$ a pro každé $t \in (0, 1)$ platí, že $tu + (1-t)v \in M$.

a užitím Greenovy věty¹⁵ dostaneme

$$\forall w \in V : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx - \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} T w ds = \int_{\Omega} f w dx.$$

Protože $\forall w \in V : Tw = 0$ na Γ_u a $\frac{du}{dn} = 0$ na Γ_f , platí

$$\forall w \in V : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx - \int_{\Omega} f w dx = \int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn} T w ds.$$

Položíme-li dále $w = v - u$, $v \in K$, můžeme psát

$$\forall v \in K : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx - \int_{\Omega} f (v - u) dx = \int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn} T (v - u) ds.$$

Operátor stop T je lineární a funkci u předpokládáme hladkou, proto $T(v - u) = Tv - Tu = Tv - u|_{\partial\Omega}$. V bodech na Γ_c , kde $u - g > 0$, platí $\frac{du}{dn} = 0$. V ostatních bodech na Γ_c , kde $u - g = 0$, musí platit $\frac{du}{dn} (Tv - u) = \frac{du}{dn} (Tv - g) \geq 0$. Odtud

$$\forall v \in K : \int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn} (Tv - u) ds \geq 0,$$

tedy

$$\forall v \in K : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx - \int_{\Omega} f (v - u) dx \geq 0. \quad (14)$$

Definice 7.1 Funkci $u \in K$ nazveme slabým řešením Signoriniho problému (13), pokud

$$\forall v \in K : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx.$$

Předpokládejme znovu, že u je dostatečně hladké řešení úlohy (13), a navíc, že $\partial\Omega$ je dost hladká. Z předchozí kapitoly pak víme, že

$$\forall x \in \partial\Omega : \frac{du}{dn}(x) = Su(x) - Nf(x). \quad (15)$$

Z Greenovy věty dále dostaneme

$$\forall w \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} T w ds + \int_{\Omega} f w dx. \quad (16)$$

Dosadíme-li z (15) do (16) za $\frac{du}{dn}$, obdržíme

$$\forall w \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx = \int_{\partial\Omega} (Su - Nf) T w ds + \int_{\Omega} f w dx. \quad (17)$$

¹⁵Greenova věta říká, že

$$\forall u, v \in W^{1,2}(\Omega), i = 1, 2 : \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} T v \cdot T u \cdot n_i ds,$$

kde n_i je i -tá složka jednotkového vnějšího vektoru k $\partial\Omega$ v bodě x .

Položíme-li opět $w = v - u$, $v \in K$, a dosadíme-li z (17) do (14) za první integrál na levé straně nerovnosti, dostáváme

$$\forall v \in K : \int_{\partial\Omega} (Su - Nf)(Tv - u) ds + \int_{\Omega} f(v - u) dx - \int_{\Omega} f(v - u) dx \geq 0.$$

Integrály přes oblast Ω se nám tedy odečtou a zbude pouze hraniční integrál.

Nyní můžeme slabou formulaci původního problému (13) přepsat jako **hraniční slabou formulaci**:

Najděte $u \in K = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_u \text{ a } v - g \geq 0 \text{ na } \Gamma_c \right\}$ takové, že

$$\forall v \in K : \int_{\partial\Omega} Su \cdot (v - u) ds \geq \int_{\partial\Omega} Nf \cdot (v - u) ds. \quad (18)$$

8 Diskretizace Steklovova-Poincarého operátoru.

Buď $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ neprázdná omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Uvažujme následující úlohu: najděte $u \in V = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_u \subset \partial\Omega \right\}$ takové, že

$$\forall w \in V : \int_{\partial\Omega} Su \cdot w ds = \int_{\partial\Omega} Nf \cdot w ds, \quad (19)$$

$f \in L^2(\Omega)$. Definujeme-li na $L^2(\partial\Omega)$ skalární součin předpisem

$$\langle u, v \rangle_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Omega} u \cdot v ds,$$

můžeme tuto úlohu formulovat takto: najděte $u \in V$ takové, že

$$\forall w \in V : \langle Su, w \rangle_2 = \langle Nf, w \rangle_2.$$

Buď nyní $h > 0$. Hranici $\partial\Omega$ rozdělíme na n částí $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, přičemž $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ a $\text{diam}\Gamma_i < h$ ¹⁶ pro $i = 1, \dots, n$. Nechť dále

$$V_h = \text{Lin} \{ \varphi_i \}_{i=1}^n \subset V$$

je nějaký prostor testovacích funkcí na $\partial\Omega$, např. se spojitými bázovými funkcemi φ_i takovými, že pro každé $i = 1, \dots, n$ je φ_i lineární na Γ_i .

Budeme tedy uvažovat úlohu: najděte $u_h \in V_h$ takové, že

$$\forall v_h \in V_h : \langle Su_h, v_h \rangle_2 = \langle Nf, v_h \rangle_2. \quad (20)$$

Pokud položíme $u_h = \sum_{j=1}^n u_{h,j} \cdot \varphi_j$ a volíme postupně $v_h = \varphi_i$, $i = 1 \dots, n$, dostáváme systém rovností

$$\int_{\partial\Omega} S \left(\sum_{j=1}^n u_{h,j} \varphi_j \right) \cdot \varphi_i ds = \int_{\partial\Omega} Nf \cdot \varphi_i ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

¹⁶Průměr množiny $M \subset \mathbf{R}^2$ definujeme takto: $\text{diam}M \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \|x - y\| : x, y \in M \}$.

Protože Steklovův-Poincarého operátor je lineární, získáme soustavu

$$\sum_{j=1}^n u_{h,j} \int_{\partial\Omega} S\varphi_j \cdot \varphi_i ds = \int_{\partial\Omega} Nf \cdot \varphi_i ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tato soustava Galerkinových rovností je ekvivalentní soustavě lineárních rovnic

$$S_h \cdot u = R_h$$

pro neznámý vektor $u = (u_{h,1}, \dots, u_{h,n})^T$, kde

$$S_h = \left(\int_{\partial\Omega} S\varphi_j \cdot \varphi_i ds \right)_{i,j=1}^n$$

je **diskretizovaný Steklovův-Poincarého operátor** a

$$R_h = \left(\int_{\partial\Omega} Nf \cdot \varphi_i ds \right)_{i=1}^n$$

je **diskretizovaná pravá strana**.

Protože ovšem nemáme k dispozici explicitní vyjádření inverze operátoru V , musíme Steklovův-Poincarého operátor nějak aproximovat. Platí

$$S = D + \left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right).$$

Pro každé $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ lze pak psát

$$Su(x) = Du(x) + \left(\frac{1}{2}I + K' \right) w(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

kde $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je jednoznačné řešení úlohy

$$\langle Vw, \tau \rangle_2 = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K \right) u, \tau \right\rangle_2 \quad \forall \tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Buď $\tilde{h} > 0$. Hranici $\partial\Omega$ znovu rozložíme na části $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_m$, přičemž $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^m \tilde{\Gamma}_i$ a $\text{diam}\tilde{\Gamma}_i < \tilde{h}$ pro $i = 1, \dots, m$. Nechť

$$Z_h = \text{Lin} \{ \psi_i \}_{i=1}^m \subset H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

je prostor testovacích funkcí na $\partial\Omega$, např. se spojitými bázovými funkcemi ψ_i takovými, že ψ_i je lineární na Γ_i pro každé $i = 1, \dots, m$.

Hledáme tedy $w_h \in Z_h$ tak, aby

$$\forall \tau_h \in Z_h : \quad \langle Vw_h, \tau_h \rangle_2 = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K \right) u, \tau_h \right\rangle_2.$$

Položíme $w_h = \sum_{j=1}^m w_{h,j} \cdot \psi_j$ a volíme $\tau_h = \psi_i$, $i = 1, \dots, m$. Dostaneme

$$\left\langle V \left(\sum_{j=1}^m w_{h,j} \cdot \psi_j \right), \psi_i \right\rangle_2 = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K \right) u, \psi_i \right\rangle_2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Z linearity operátoru V a skalárního součinu pak plyne rovnost

$$\sum_{j=1}^m w_{h,j} \langle V\psi_j, \psi_i \rangle_2 = \left\langle \frac{1}{2}u, \psi_i \right\rangle_2 + \langle Ku, \psi_i \rangle_2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (21)$$

Získali jsme tedy **aproximaci \tilde{S} Steklovova-Poincarého operátoru:**

$$\text{pro každé } u \in H^{\frac{1}{2}}\partial\Omega : \quad \tilde{S}u = Du + \left(\frac{1}{2}I + K'\right)w_h \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Diskrétní Steklovův-Poincarého operátor bude mít nyní tvar

$$\tilde{S}_h = \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{S}\varphi_j \cdot \varphi_i ds \right)_{i,j=1}^n,$$

tedy

$$\tilde{S}_h = \left(\left\langle \tilde{S}\varphi_j, \varphi_i \right\rangle_2 \right)_{i,j=1}^n.$$

Nyní se budeme snažit vyjádřit \tilde{S}_h pomocí jednotlivých diskretizovaných operátorů. Podívejme se nejprve, jak vypadá $\tilde{S}\varphi_j$ pro $j = 1, \dots, n$. Z (21) pro $u = \varphi_j$ plyne

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle V\psi_1, \psi_1 \rangle_2 & \cdots & \langle V\psi_m, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle V\psi_1, \psi_m \rangle_2 & \cdots & \langle V\psi_m, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix}}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} V_h} \cdot \begin{pmatrix} w_{h,1} \\ \vdots \\ w_{h,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_1 \rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_m \rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix},$$

odtud

$$\begin{pmatrix} w_{h,1} \\ \vdots \\ w_{h,m} \end{pmatrix} = V_h^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_1 \rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_m \rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix}.$$

Označme $\tilde{v}_{k,l} \stackrel{\text{ozn}}{=} V_h^{-1}(k,l)$, $k, l = 1, \dots, m$. Pak

$$w_{h,k} = \sum_{l=1}^m \tilde{v}_{k,l} \cdot \left(\left\langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_l \right\rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_l \rangle_2 \right), \quad k = 1, \dots, m.$$

Platí proto

$$w_h = \sum_{k=1}^m w_{h,k} \cdot \psi_k = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \tilde{v}_{k,l} \cdot \left(\left\langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_l \right\rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_l \rangle_2 \right) \cdot \psi_k$$

a dostáváme tak pro $i, j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{S}\varphi_j, \varphi_i \right\rangle_2 &= \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K' \right) \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \tilde{v}_{k,l} \cdot \left(\left\langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_l \right\rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_l \rangle_2 \right) \cdot \psi_k \right), \varphi_i \right\rangle_2 + \\ &\quad + \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_2. \end{aligned}$$

Protože operátory K' a I jsou lineární, platí

$$\left\langle \tilde{S}\varphi_j, \varphi_i \right\rangle_2 = \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\left\langle \frac{1}{2}\psi_k, \varphi_i \right\rangle_2 + \langle K'\psi_k, \varphi_i \rangle_2 \right) \cdot \tilde{v}_{k,l} \cdot \left(\left\langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_l \right\rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_l \rangle_2 \right) \right] +$$

$$+ \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_2.$$

První výraz na pravé straně rovnosti představuje součin řádkového vektoru, matice a sloupcového vektoru, můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S}\varphi_j, \varphi_i \rangle_2 = & \left(\langle \frac{1}{2}\psi_1, \varphi_i \rangle_2 + \langle K'\psi_1, \varphi_i \rangle_2 \quad \cdots \quad \langle \frac{1}{2}\psi_m, \varphi_i \rangle_2 + \langle K'\psi_m, \varphi_i \rangle_2 \right) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{v}_{1,1} & \cdots & \tilde{v}_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{v}_{m,1} & \cdots & \tilde{v}_{m,m} \end{pmatrix} \\ & \cdot \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_1 \rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle \frac{1}{2}\varphi_j, \psi_m \rangle_2 + \langle K\varphi_j, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix} + \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_2. \end{aligned}$$

Operátor K' je adjungovaný k operátoru K a platí tak

$$\forall u \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \langle K'u, v \rangle_2 = \langle u, Kv \rangle_2.$$

Z linearity a symetrie skalárního součinu pak dostáváme vztah pro (i, j) -tý prvek matice \tilde{S}_h :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S}\varphi_j, \varphi_i \rangle_2 = & \left[\frac{1}{2} \left(\langle \varphi_i, \psi_1 \rangle_2 \quad \cdots \quad \langle \varphi_i, \psi_m \rangle_2 \right) + \left(\langle K\varphi_i, \psi_1 \rangle_2 \quad \cdots \quad \langle K\varphi_i, \psi_m \rangle_2 \right) \right] \cdot V_h^{-1} \\ & \cdot \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle \varphi_j, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle \varphi_j, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle K\varphi_j, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle K\varphi_j, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix} \right] + \langle D\varphi_j, \varphi_i \rangle_2, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme předpis

$$\tilde{S}_h = \left(\frac{1}{2}M_h^T + K_h^T \right) V_h^{-1} \left(\frac{1}{2}M_h + K_h \right) + D_h, \quad (22)$$

kde

$$\begin{aligned} D_h = & \begin{pmatrix} \langle D\varphi_1, \varphi_1 \rangle_2 & \cdots & \langle D\varphi_n, \varphi_1 \rangle_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle D\varphi_1, \varphi_n \rangle_2 & \cdots & \langle D\varphi_n, \varphi_n \rangle_2 \end{pmatrix}, & M_h = & \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle_2 & \cdots & \langle \varphi_n, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1, \psi_m \rangle_2 & \cdots & \langle \varphi_n, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix}, \\ K_h = & \begin{pmatrix} \langle K\varphi_1, \psi_1 \rangle_2 & \cdots & \langle K\varphi_n, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle K\varphi_1, \psi_m \rangle_2 & \cdots & \langle K\varphi_n, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix}, & V_h = & \begin{pmatrix} \langle V\psi_1, \psi_1 \rangle_2 & \cdots & \langle V\psi_m, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle V\psi_1, \psi_m \rangle_2 & \cdots & \langle V\psi_m, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Při aproximaci operátoru N postupujeme stejně. Nejprve si však ukážeme, jak nalézt jiné (jednodušší) vyjádření operátoru N . Uvažujme Dirichletovu okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Předpokládejme, že $u \in C^2(\bar{\Omega})$ je řešení (23) a že $\partial\Omega$ je dost hladká. Toto řešení musí splňovat také rovnost (9), tj.

$$\forall x \in \partial\Omega : \quad N_0 f(x) = -V \left(\frac{du}{dn} \right) (x). \quad (24)$$

Navíc u také splňuje rovnost (12), tj.

$$\forall x \in \partial\Omega : \quad \frac{du}{dn}(x) = -Nf(x). \quad (25)$$

Vyjádříme-li si z (24) $\frac{du}{dn}(x)$ a tento výraz dosadíme do (25), dostáváme vztah

$$\forall x \in \partial\Omega : \quad Nf(x) = V^{-1}N_0f(x). \quad (26)$$

Na $\partial\Omega$ tedy platí:

$$Nf = \left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1}N_0f - N_1f = V^{-1}N_0f.$$

Nyní se tedy budeme zabývat úlohou:

$$\text{nalezněte } Nf \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \text{ takové, že } \forall \tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \quad \langle V(Nf), \tau \rangle_2 = \langle N_0f, \tau \rangle_2.$$

K řešení užijeme opět Galerkinovu metodu. Nejprve zvolíme $\tilde{h} > 0$, například stejné jako na straně 25. S ohledem na toto číslo pak rozdělíme hranici $\partial\Omega$ na dílky $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_m$ a zvolíme prostor Z_h s bází $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ stejně jako na straně 25. Naším úkolem je tedy najít $(Nf)_h \in Z_h$ tak, aby

$$\forall \tau_h \in Z_h : \quad \langle V(Nf)_h, \tau_h \rangle_2 = \langle N_0f, \tau_h \rangle_2.$$

Položíme $(Nf)_h = \sum_{j=1}^m (Nf)_{h,j} \cdot \psi_j$ a postupně volíme $\tau_h = \psi_i$, $i = 1, \dots, m$. Dostáváme potom

$$\sum_{j=1}^m (Nf)_{h,j} \langle V\psi_j, \psi_i \rangle_2 = \langle N_0f, \psi_i \rangle_2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Získali jsme tak **aproximaci \tilde{N} operátoru N** :

$$\text{pro každé } f \in L^2(\Omega) : \quad \tilde{N}f = (Nf)_h \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Diskrétní pravá strana bude mít nyní tvar

$$\tilde{R}_h = \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{N}f \cdot \varphi_i ds \right)_{i=1}^n,$$

neboli

$$\tilde{R}_h = \left(\langle \tilde{N}f, \varphi_i \rangle_2 \right)_{i=1}^n.$$

Rovnost (27) lze dále zapsat jako:

$$V_h \cdot \begin{pmatrix} (Nf)_{h,1} \\ \vdots \\ (Nf)_{h,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle N_0f, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle N_0f, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li opět $\tilde{v}_{k,l} \stackrel{\text{ozn}}{=} V_h^{-1}(k,l)$, $k, l = 1, \dots, m$, pak

$$(Nf)_{h,k} = \sum_{l=1}^m \tilde{v}_{k,l} \cdot \langle N_0f, \psi_l \rangle_2, \quad k = 1, \dots, m.$$

Dostáváme tak

$$(Nf)_h = \sum_{k=1}^m (Nf)_{h,k} \cdot \psi_k = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \tilde{v}_{k,l} \cdot \langle N_0f, \psi_l \rangle_2 \cdot \psi_k$$

a pro $i = 1, \dots, n$ pak platí

$$\langle \tilde{N}f, \varphi_i \rangle_2 = \left\langle \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \tilde{v}_{k,l} \cdot \langle N_0f, \psi_l \rangle_2 \cdot \psi_k, \varphi_i \right\rangle_2.$$

Skalární součin je lineární, a proto

$$\langle \tilde{N}f, \varphi_i \rangle_2 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \langle \psi_k, \varphi_i \rangle_2 \cdot \tilde{v}_{k,l} \cdot \langle N_0f, \psi_l \rangle_2.$$

Pro i -tý prvek vektoru pravé strany \tilde{R}_h pak dostaneme:

$$\langle \tilde{N}f, \varphi_i \rangle_2 = \left(\langle \varphi_i, \psi_1 \rangle_2 \quad \dots \quad \langle \varphi_i, \psi_m \rangle_2 \right) \cdot V_h^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \langle N_0f, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle N_0f, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Odvodili jsme tak předpis

$$\tilde{R}_h = M_h^T V_h^{-1} N_{0h}, \quad (28)$$

kde

$$N_{0h} = \begin{pmatrix} \langle N_0f, \psi_1 \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle N_0f, \psi_m \rangle_2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

9 Řešení Signoriniho úlohy pomocí minimalizace energetického funkcionálu.

V minulé kapitole jsme pomocí Galerkinovy metody diskretizace slabých formulací okrajových úloh a pomocí aproximace operátorů S a N převedli úlohu (19) na řešení soustavy lineárních rovnic

$$\tilde{S}_h u = \tilde{R}_h \quad (30)$$

pro vektor neznámých $u = (u_{h,1}, \dots, u_{h,n})^T$, přičemž matice $\tilde{S}_h \in \mathbf{R}^{n \times n}$ je dána vztahem (22) a sloupcový vektor $\tilde{R}_h \in \mathbf{R}^n$ je dán rovností (28). Dá se ukázat, viz. například [8], že problém (30) je ekvivalentní minimalizačnímu problému:

$$\text{nalezněte } u \in \mathbf{R}^n \text{ takové, že } J(u) = \min_{v \in \mathbf{R}^n} J(v),$$

kde pro tzv. energetický funkcionál platí

$$J(v) = \frac{1}{2} v^T \tilde{S}_h v - \tilde{R}_h^T v, \quad v = (v_1, \dots, v_n)^T. \quad (31)$$

V kapitole (7) jsme si představili Signoriniho úlohu. Úkolem hraniční slabé formulace (18) tohoto problému tak bylo nalezení příslušné funkce $u \in V = \left\{ w \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : w = 0 \text{ na } \Gamma_u \right\}$ splňující dále

nerovnost $u \geq g$ na Γ_c . Chceme-li k řešení úlohy použít principu minima energetického funkcionálu, musíme ještě navíc zavést omezující podmínku. Nechť tedy z_k, \dots, z_{k+p} jsou všechny uzly, které při diskretizaci padnou do Γ_c . Platí-li pro zvolené testovací funkce

$$\varphi_i(z_i) = 1 \text{ pro } i = k, \dots, k+p,$$

budou mít omezující (vazební) nerovnosti tvar

$$\begin{aligned} v_k &\geq g(z_k), \\ &\vdots \\ v_{k+p} &\geq g(z_{k+p}). \end{aligned}$$

Celkové omezení tedy můžeme zapsat jako nerovnost

$$Bv \leq C,$$

kde

$$B \in \mathbf{R}^{(p+1) \times n}, \quad B(i, j) = \begin{cases} -1 & j = k + i - 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (32)$$

a

$$C \in \mathbf{R}^{(p+1)}, \quad C_i = -g(z_{k+i-1}). \quad (33)$$

Takže diskretizovaná podoba úlohy (18) bude ekvivalentní tomuto minimalizačnímu problému s omezením na nerovnost:

$$\text{naleznete } u \in \mathbf{R}^n \text{ takové, že } Bu \leq C \text{ a } J(u) = \min_{v \in \mathbf{R}^n: Bv \leq C} J(v), \quad (34)$$

přičemž hodnota energetického funkcionálu J je dána rovností (31) a maticí B a vektorem C určují vztahy (32), (33).

10 Diskretizace hranice. Volba testovacích funkcí.

V kapitole (8) jsme hranici $\partial\Omega$ diskretizovali dvakrát, a to při

- diskretizaci slabé formulace původního problému (volba $h > 0$, odpovídajících dílků $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ a testovacích funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$),
- diskretizaci příslušné rovnosti za účelem nalezení předpisu pro aproximaci operátoru S a N (volba $\tilde{h} > 0$, odpovídajících dílků $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_m$ a testovacích funkcí ψ_1, \dots, ψ_m).

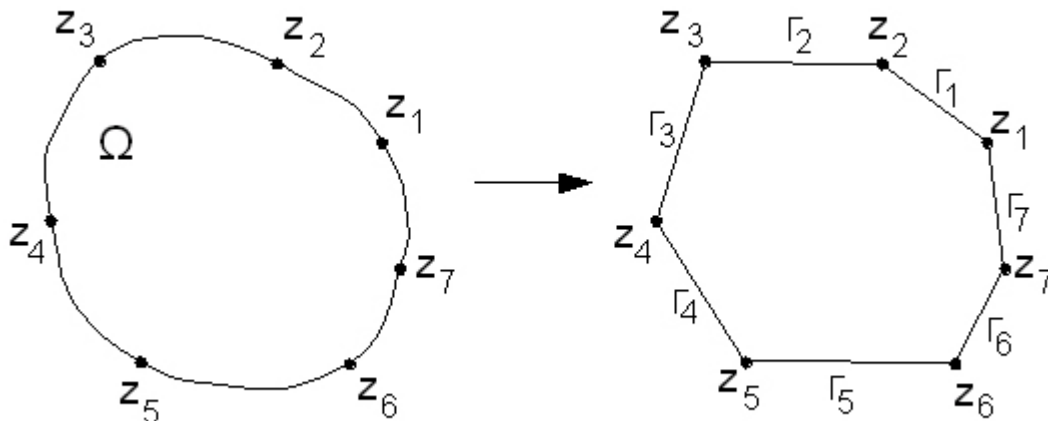
Testovací funkce φ_i musely splňovat rovnost $\varphi_i = 0$ na Γ_u . Odhlédneme-li od této podmínky, můžeme obě diskretizace provést shodně. Nesmíme pak ovšem zapomenout provést příslušné úpravy na vypočtené matici \tilde{S}_h a vektoru \tilde{R}_h pro zadání Dirichletovy podmínky na Γ_u . Položíme tedy

$$h = \tilde{h}, \quad n = m \quad \text{a pro každé } i = 1, \dots, n: \quad \Gamma_i = \tilde{\Gamma}_i \text{ a } \varphi_i = \psi_i.$$

Jednotlivé elementy a testovací funkce lze volit více způsoby.

Můžeme použít dílky obsahující dva uzly a spojitě po částech lineární testovací funkce. Množinu elementů Γ_i , $i = 1, \dots, n$, potom vytvoříme tak, že na $\partial\Omega$ (s ohledem na h) zvolíme uzly z_1, \dots, z_n

Obrázek 2: Příklad diskretizace hranice pro $n = 7$.



(očíslované levotočivě) a část hranice mezi dvěma sousedními uzly z_i a z_{i+1} nahradíme úsečkou (viz. obrázek (2)). Tato úsečka bude tvořit dílek Γ_i . Poslední element Γ_n bude úsečka mezi uzly z_n a z_1 .

Testovací funkci ψ_i , $i = 1, \dots, n$, předepíšeme tak, že bude spojitá, rovna jedné pouze v uzlu z_i , ve všech ostatních uzlech bude nulová a na všech elementech lineární. Tedy na každém elementu Γ_k , $k \neq i - 1$ a $k \neq i$, bude ψ_i nulová. Jsou-li pak $u_{h,i}$ a $u_{h,i+1}$ hodnoty numerického řešení v uzlech z_i a z_{i+1} , platí pro toto řešení $u_h(t)$ na elementu Γ_i délky L_i (viz. obrázek (4)):

$$u_h(t) = u_{h,i} \cdot \psi_i(t) + u_{h,i+1} \cdot \psi_{i+1}(t) = u_{h,i} \frac{t}{L_i} + u_{h,i+1} \left(1 - \frac{t}{L_i}\right) = u_{h,i+1} + \frac{u_{h,i} - u_{h,i+1}}{L_i} t.$$

Poznamenejme ještě, že matice V_h , K_h a D_h budou husté, jedině matice M_h bude maticí řídkou.

11 Vyčíslení diskretizovaného operátoru jednoduché vrstvy.

Pro (i, j) -tý prvek matice V_h , $i, j = 1 \dots, n$, jsme odvodili předpis (viz. stranu 27):

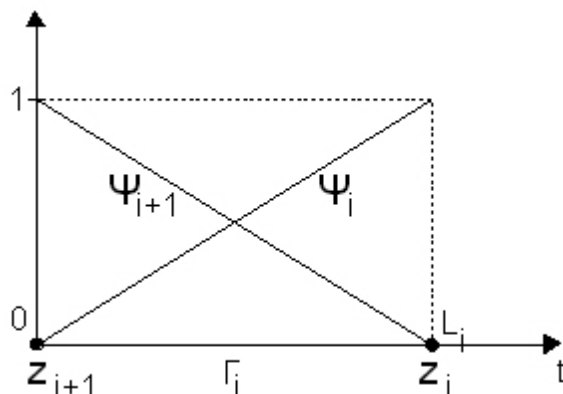
$$V_h(i, j) = \langle V\psi_j, \psi_i \rangle_2 = \int_{\partial\Omega} V\psi_j(x) \cdot \psi_i(x) ds_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \psi_i(x) \left(\int_{\partial\Omega} \psi_j(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x.$$

Protože pro každé $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ platí:

$$\begin{aligned} \langle Vu, v \rangle_2 &= \int_{\partial\Omega} v(x) \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} u(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} v(x) \left(-\frac{1}{2\pi} \right) u(y) \ln \|y - x\| ds_x ds_y = \\ &= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} v(y) \left(-\frac{1}{2\pi} \right) u(x) \ln \|y - x\| ds_y ds_x = \int_{\partial\Omega} u(x) \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} v(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x = \langle u, Vv \rangle_2, \end{aligned}$$

Obrázek 3: Zvolené testovací funkce.

$$\begin{aligned}\psi_i(t) &= \frac{t}{L_i}, & t \in [0, L_i], \\ \psi_{i+1}(t) &= 1 - \frac{t}{L_i}, & t \in [0, L_i].\end{aligned}$$



je operátor jednoduché vrstvy symetrický a také matice V_h bude symetrická. Testovací funkce jsou voleny tak, aby platilo

$$\psi_i = 0 \text{ na } \Gamma_k \Leftrightarrow (k \neq i \text{ a } k \neq i - 1),$$

a proto pro $i, j = 1, \dots, n$ dostaneme

$$V_h(i, j) = \sum_{k=i-1}^i \sum_{l=j-1}^j -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_l} \psi_j(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x, \quad \Gamma_0 = \Gamma_n. \quad (35)$$

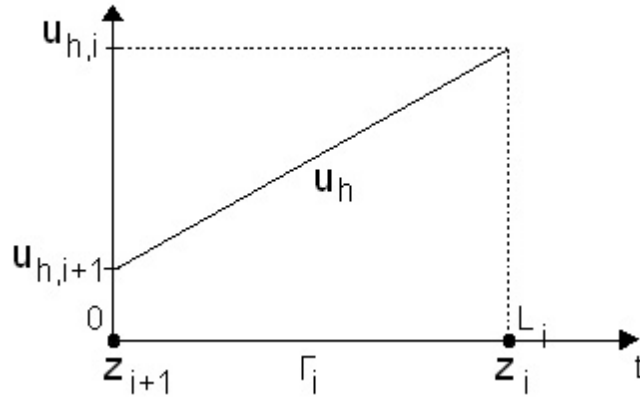
Matici V_h budeme vyčíslovat postupně po řádcích. Pro i -tý řádek musíme spočítat

- $V_h(i, i)$, tj. diagonální prvek, $i = 1, \dots, n$,
- $V_h(i, i + 1)$, tj. první prvek vpravo od diagonály, $i = 1, \dots, n - 1$,
- $V_h(i, i + 2)$, tj. druhý prvek vpravo od diagonály, $i = 1, \dots, n - 2$,
- $V_h(i, j)$, $j = \begin{cases} i + 3, \dots, n - 2 & \text{pro } i = 1, \\ i + 3, \dots, n - 1 & \text{pro } i = 2, \\ i + 3, \dots, n & \text{pro } 3 \leq i \leq n - 3, \end{cases}$
- pro $i = 1$ předposlední a poslední prvek na řádku, tj. $V_h(1, n - 1)$ a $V_h(1, n)$,
- pro $i = 2$ poslední prvek na řádku, tj. $V_h(2, n)$.

Pro prvky na i -tém řádku, $i = 2, \dots, n$, vlevo od diagonály, platí díky symetrii:

$$V_h(i, j) = V_h(j, i), \quad j = 1, \dots, i - 1.$$

Obrázek 4: Lineární interpolace uzlových hodnot řešení na Γ_i .



Zavedeme také značení

$$r(\circ, \bullet) \stackrel{\text{ozn}}{=} \|y(\circ) - x(\bullet)\|.$$

11.1 Diagonální prvek.

Podle (35) pro $i = 1, \dots, n$ platí

$$V_h(i, i) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

kde

- $I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_i} \psi_i(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_3 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_4 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_i} \psi_i(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x.$

Integrál I_1

Parametrizace Γ_{i-1} :

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)z_i + tz_{i-1}, & t &\in [0, 1], \\ y(s) &= (1-s)z_i + sz_{i-1}, & s &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}\|x'(t)\| &= \|z_i - z_{i-1}\|, & \psi_i(x(t)) &= 1 - t, \\ \|y'(s)\| &= \|z_i - z_{i-1}\|, & \psi_i(y(s)) &= 1 - s.\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}\|y(s) - x(t)\| &= \|(1-s)z_i + sz_{i-1} - (1-t)z_i - tz_{i-1}\| = \|z_{i-1}(s-t) - z_i(s-t)\| = \\ &= \|(s-t)(z_{i-1} - z_i)\| = |s-t| \|z_i - z_{i-1}\|.\end{aligned}$$

Proto

$$I_1 = -\frac{\|z_i - z_{i-1}\|^2}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 (1-s) \ln(\|z_i - z_{i-1}\| |s-t|) ds \right) dt. \quad (36)$$

Uvedeme kód v Matlabu, kterým byl integrál vyčíslen. Proměnná n zde hraje úlohu normy $\|z_i - z_{i-1}\|$.

`syms n s t`

```
ker1 = log(n*(t-s));
ker2 = log(n*(s-t));
i = int((1-s)*ker1,s,0,t) + int((1-s)*ker2,s,t,1);
i = int((1-t)*i,t,0,1);
```

Výsledkem je:

$$-7/16+1/4*\log(n)$$

Zpětným dosazením normy $\|z_i - z_{i-1}\|$ za n a přenásobením konstantou dostáváme

$$I_1 = -\frac{\|z_i - z_{i-1}\|^2}{8\pi} \left[-\frac{7}{4} + \ln \|z_i - z_{i-1}\| \right].$$

Integrál I_2

Parametrizace Γ_{i-1} :

$$x(t) = (1-t)z_i + tz_{i-1}, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_i :

$$y(w) = (1-w)z_i + wz_{i+1}, \quad w \in [0, 1].$$

Pak

$$\begin{aligned}\|x'(t)\| &= \|z_i - z_{i-1}\|, & \psi_i(x(t)) &= 1 - t, \\ \|y'(w)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, & \psi_i(y(w)) &= 1 - w.\end{aligned}$$

Dále

$$r^2(w, t) = \|(1-w)z_i + wz_{i+1} - (1-t)z_i - tz_{i-1}\|^2 = \|w(z_{i+1} - z_i) + t(z_i - z_{i-1})\|^2 = 17$$

¹⁷Symbolem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nyní značíme skalární součin v \mathbf{R}^2 , tj. $\forall a, b \in \mathbf{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$: $\langle a, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^2 a_i b_i$

$$= w^2 \|z_{i+1} - z_i\|^2 + 2wt \langle z_{i+1} - z_i, z_i - z_{i-1} \rangle + t^2 \|z_i - z_{i-1}\|^2.$$

Integrál, který máme za úkol vyčíslit, máme tak ve tvaru

$$I_2 = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\| \|z_i - z_{i-1}\|}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 (1-w) \ln(r(w,t)) dw \right) dt. \quad (37)$$

Zatímco u integrálu I_1 jsme měli celou řadu singularit podél $t = s$, zde máme pouze jeden singulární bod, a to $t = w = 0$. Vyčíslení budeme provádět pomocí transformace do polárních souřadnic, přičemž Jacobián nám pomůže eliminovat singularitu. Nejprve si integrál přes čtverec $\{(w,t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq w \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ rozložíme na součet integrálu přes trojúhelník

$$T_1 = \{(w,t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq w \leq 1, 0 \leq t \leq w\}$$

a integrálu přes trojúhelník

$$T_2 = \{(w,t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq w \leq 1, w \leq t \leq 1\}.$$

Nyní zavedeme polární souřadnice

$$w = \rho \cos \theta, \quad t = \rho \sin \theta, \quad (38)$$

pro integrál přes T_1 bude platit

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \rho \in \left[0, \frac{1}{\cos \theta}\right], \quad (39)$$

pro integrál přes T_2 bude platit

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \rho \in \left[0, \frac{1}{\sin \theta}\right]. \quad (40)$$

Jacobián bude v obou případech stejný, a to $J(\rho, \theta) = \rho$. Dále

$$r^2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^2 \underbrace{\left(\cos^2 \theta \|z_{i+1} - z_i\|^2 + \sin(2\theta) \langle z_{i+1} - z_i, z_i - z_{i-1} \rangle + \sin^2 \theta \|z_i - z_{i-1}\|^2 \right)}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} a^2(\theta)}. \quad (41)$$

Tedy

$$I_2 = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\| \|z_i - z_{i-1}\|}{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} (1 - \rho \sin \theta)(1 - \rho \cos \theta) \rho \ln(\rho a(\theta)) d\rho \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} (1 - \rho \sin \theta)(1 - \rho \cos \theta) \rho \ln(\rho a(\theta)) d\rho \right) d\theta \right].$$

Vnitřní integrály mají analytické vyčíslení, můžeme použít matlabovský kód:

`syms a rho st ct`

```
ker = rho * log( a*rho );
y1 = int( (1-rho*st) * (1-rho*ct) * ker , rho, 0, 1/ct );
y2 = int( (1-rho*st) * (1-rho*ct) * ker , rho, 0, 1/st );
```

Substituujeme teď za st , ct a a :

`syms n1 n2 n3 theta`

```

y1 = subs(y1,st,sin(theta));
y1 = subs(y1,ct,cos(theta));
y1 = subs(y1,a,sqrt( n1*(cos(theta))^2 + n2*sin(2*theta) + n3*(sin(theta))^2 ));
y1 = simple(y1);

y2 = subs(y2,st,sin(theta));
y2 = subs(y2,ct,cos(theta));
y2 = subs(y2,a,sqrt( n1*(cos(theta))^2 + n2*sin(2*theta) + n3*(sin(theta))^2 ));
y2 = simple(y2);

```

(42)

Proměnné $n1$, $n3$ mají význam druhé mocniny příslušných norem a proměnná $n2$ hraje roli skalárního součinu. Nyní provedeme v obou případech numerickou integraci vůči proměnné θ . Oba výsledky sečteme a přenásobením konstantou $-\frac{\|z_{i+1}-z_i\|\|z_i-z_{i-1}\|}{2\pi}$ získáme hodnotu integrálu I_2 .

Integrál I_3

Všimněme si:

$$\begin{aligned}
\underline{I_3} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(y) \ln \|y-x\| ds_y \right) ds_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \psi_i(y) \ln \|y-x\| ds_x ds_y = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \int_{\Gamma_i} \psi_i(y) \psi_i(x) \ln \|y-x\| ds_y ds_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_i} \psi_i(y) \ln \|y-x\| ds_y \right) ds_x = \underline{I_2}.
\end{aligned}$$

Integrál I_4

Parametrizace Γ_i :

$$\begin{aligned}
x(t) &= (1-t)z_i + tz_{i+1}, \quad t \in [0, 1], \\
y(s) &= (1-s)z_i + sz_{i+1}, \quad s \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\|x'(t)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, \quad \psi_i(x(t)) = 1-t, \\
\|y'(s)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, \quad \psi_i(y(s)) = 1-s.
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
\|y(s) - x(t)\| &= \|(1-s)z_i + sz_{i+1} - (1-t)z_i - tz_{i+1}\| = \|z_{i+1}(s-t) - z_i(s-t)\| = \\
&= \|(s-t)(z_{i+1} - z_i)\| = |s-t| \|z_{i+1} - z_i\|.
\end{aligned}$$

Integrál tak máme ve tvaru

$$I_4 = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\|^2}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 (1-s) \ln (\|z_{i+1} - z_i\| |s-t|) ds \right) dt.$$

Všimněme si, že tento integrál je až na danou normu shodný s předpisem (36) integrálu I_1 . K vyčíslení tak použijeme stejného postupu jako u I_1 a získáme výsledek

$$I_4 = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\|^2}{8\pi} \left[-\frac{7}{4} + \ln \|z_{i+1} - z_i\| \right].$$

11.2 První prvek vpravo od diagonály.

Dle vztahu (35) pro $i = 1, \dots, n-1$ platí

$$V_h(i, i+1) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

kde

- $I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_i} \psi_{i+1}(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+1}} \psi_{i+1}(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_3 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_i} \psi_{i+1}(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_4 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+1}} \psi_{i+1}(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x.$

Integrál I_1

Nejprve si všimneme, že tento integrál je téměř shodný s integrálem I_2 z výpočtu diagonálního prvku. Liší se pouze v jedné testovací funkci. Parametrizaci tedy zvolíme úplně stejně a pro odlišnou testovací funkci platí

$$\psi_{i+1}(y(w)) = w, \quad w \in [0, 1].$$

Přechodem k polárním souřadnicím obdržíme tvar

$$I_1 = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\| \|z_i - z_{i-1}\|}{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} (1 - \rho \sin \theta) (\rho \cos \theta) \rho \ln(\rho a(\theta)) d\rho \right) d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} (1 - \rho \sin \theta) (\rho \cos \theta) \rho \ln(\rho a(\theta)) d\rho \right) d\theta \right],$$

kde $a(\theta)$ je dáno vtahem (41). Vnitřní integrály mají opět analytické vyčíslení, uijeme kód

```
syms a rho st ct
```

```
ker = rho * log( a*rho );
y1 = int( (1-rho*st) * rho*ct * ker , rho, 0, 1/ct );
y2 = int( (1-rho*st) * rho*ct * ker , rho, 0, 1/st );
```

Následně substituujeme za st , ct a a pomocí kódu (42) a provedeme v obou případech numerickou integraci vůči proměnné θ . Sečtením a přenásobením konstantou $-\frac{\|z_{i+1}-z_i\|\|z_i-z_{i-1}\|}{2\pi}$ dostáváme hodnotu integrálu I_1 .

Integrál I_2

Poprvé budeme integrovat přes disjunktní dílky. Situace se tak zjednoduší, protože se nám neobjeví žádná singularita, ovšem za cenu složitějšího výrazu v jádře a nutnosti numericky integrovat dvojnásobný integrál.

Parametrizace Γ_{i-1} :

$$x(t) = (1-t)z_i + tz_{i-1}, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_{i+1} :

$$y(s) = (1-s)z_{i+2} + sz_{i+1}, \quad s \in [0, 1].$$

Potom

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|z_i - z_{i-1}\|, & \psi_i(x(t)) &= 1-t, \\ \|y'(s)\| &= \|z_{i+2} - z_{i+1}\|, & \psi_{i+1}(y(s)) &= s \end{aligned}$$

a

$$r^2(s, t) = \|(1-s)z_{i+2} + sz_{i+1} - (1-t)z_i - tz_{i-1}\|^2 = \|s(z_{i+1} - z_{i+2}) + t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+2} - z_i)\|^2. \quad (43)$$

Takže

$$I_2 = -\frac{\|z_{i+2} - z_{i+1}\| \|z_i - z_{i-1}\|}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 s \ln(r(s, t)) ds \right) dt.$$

Tento dvojnásobný integrál spočteme numericky.

Integrál I_3

Tento integrál je až na jednu testovací funkci shodný s integrálem I_4 z výpočtu diagonálního prvku. Použijeme tedy stejnou parametrizaci Γ_i a pro testovací funkci platí

$$\psi_{i+1}(y(s)) = s, \quad s \in [0, 1].$$

Integrál tak máme ve tvaru

$$I_3 = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\|^2}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 s \ln(\|z_{i+1} - z_i\| |s-t|) ds \right) dt.$$

Kód v Matlabu, kterým byl integrál vyčíslen (proměnná n má význam normy $\|z_{i+1} - z_i\|$):

```
syms n s t
ker1 = log(n*(t-s));
ker2 = log(n*(s-t));
i = int(s*ker1,s,0,t) + int(s*ker2,s,t,1);
i = int((1-t)*i,t,0,1);
```

Výsledkem je:

$-5/16+1/4*\log(n)$

Po dosazení normy $\|z_{i+1} - z_i\|$ za n a přenásobením konstantou dostaneme

$$I_3 = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\|^2}{8\pi} \left[-\frac{5}{4} + \ln \|z_{i+1} - z_i\| \right].$$

Integrál I_4

Parametrizace Γ_i :

$$x(t) = (1-t)z_{i+1} + tz_i, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_{i+1} :

$$y(w) = (1-w)z_{i+1} + wz_{i+2}, \quad w \in [0, 1].$$

Pak

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, & \psi_i(x(t)) &= t, \\ \|y'(w)\| &= \|z_{i+2} - z_{i+1}\|, & \psi_{i+1}(y(w)) &= 1-w \end{aligned}$$

a také

$$\begin{aligned} r^2(w, t) &= \|(1-w)z_{i+1} + wz_{i+2} - (1-t)z_{i+1} - tz_i\|^2 = \|w(z_{i+2} - z_{i+1}) + t(z_{i+1} - z_i)\|^2 = \\ &= w^2 \|z_{i+2} - z_{i+1}\|^2 + 2wt \langle z_{i+2} - z_{i+1}, z_{i+1} - z_i \rangle + t^2 \|z_{i+1} - z_i\|^2. \end{aligned}$$

Tedy integrál máme ve tvaru

$$I_4 = -\frac{\|z_{i+2} - z_{i+1}\| \|z_{i+1} - z_i\|}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 (1-w) \ln(r(w, t)) dw \right) dt.$$

Nyní použijeme stejnou transformaci do polárních souřadnic, jako jsme užili při výpočtu I_2 u diagonálního prvku. Vyjádříme si pak

$$r^2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^2 \underbrace{\left(\cos^2 \theta \|z_{i+2} - z_{i+1}\|^2 + \sin(2\theta) \langle z_{i+2} - z_{i+1}, z_{i+1} - z_i \rangle + \sin^2 \theta \|z_{i+1} - z_i\|^2 \right)}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} a^2(\theta)}. \quad (44)$$

Máme tak spočítat integrál

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{\|z_{i+2} - z_{i+1}\| \|z_{i+1} - z_i\|}{2\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} (\rho \sin \theta) (1 - \rho \cos \theta) \rho \ln(\rho a(\theta)) d\rho \right) d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} (\rho \sin \theta) (1 - \rho \cos \theta) \rho \ln(\rho a(\theta)) d\rho \right) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Vnitřní integrály mají opět analytické vyčíslení, můžeme použít matlabovský kód

syms a rho st ct

```
ker = rho * log( a*rho );
y1 = int( rho*st * (1-rho*ct) * ker , rho, 0, 1/ct );
y2 = int( rho*st * (1-rho*ct) * ker , rho, 0, 1/st );
```

K následné substituci za st , ct a a užijeme kódu (42), provedeme numerickou integraci vůči θ , sečteme a přenásobíme konstantou $-\frac{\|z_{i+2}-z_{i+1}\|\|z_{i+1}-z_i\|}{2\pi}$.

11.3 Druhý prvek vpravo od diagonály.

Podle (35) platí pro $i = 1, \dots, n-2$

$$V_h(i, i+2) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

kde

- $I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+1}} \psi_{i+2}(y) \ln \|y-x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+2}} \psi_{i+2}(y) \ln \|y-x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_3 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+1}} \psi_{i+2}(y) \ln \|y-x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_4 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+2}} \psi_{i+2}(y) \ln \|y-x\| ds_y \right) ds_x.$

Integrál I_1

Integrál I_1 se liší od I_2 z výpočtu prvního prvku vpravo od diagonály pouze v testovací funkci. Opět proto použijeme stejnou parametrizaci a pro testovací funkci bude platit

$$\psi_{i+2}(y(s)) = 1-s, \quad s \in [0, 1].$$

Získáme tak vztah

$$I_1 = -\frac{\|z_{i+2}-z_{i+1}\|\|z_i-z_{i-1}\|}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 (1-s) \ln(r(s,t)) ds \right) dt,$$

přičemž $r(s,t)$ je určeno vztahem (43). Výše uvedený dvojnásobný integrál spočteme numericky.

Integrál I_2

Integrujeme přes disjunktní dílky.

Parametrizace Γ_{i-1} :

$$x(t) = (1-t)z_i + tz_{i-1}, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_{i+2} :

$$y(s) = (1-s)z_{i+3} + sz_{i+2}, \quad s \in [0, 1].$$

Platí

$$\begin{aligned}\|x'(t)\| &= \|z_i - z_{i-1}\|, & \psi_i(x(t)) &= 1 - t, \\ \|y'(s)\| &= \|z_{i+3} - z_{i+2}\|, & \psi_{i+2}(y(s)) &= s\end{aligned}$$

a

$$r^2(s, t) = \|(1-s)z_{i+3} + sz_{i+2} - (1-t)z_i - tz_{i-1}\|^2 = \|s(z_{i+2} - z_{i+3}) + t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+3} - z_i)\|^2.$$

Dostáváme

$$I_2 = -\frac{\|z_{i+3} - z_{i+2}\| \|z_i - z_{i-1}\|}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 s \ln(r(s, t)) ds \right) dt.$$

Integrál vypočteme numericky.

Integrál I_3

Integrál I_3 je až na jednu testovací funkci shodný s integrálem I_4 z výpočtu prvního prvku vpravo od diagonály. Použijeme stejnou parametrizaci a platí

$$\psi_{i+2}(y(w)) = w, \quad w \in [0, 1].$$

Transformací do polárních souřadnic získáme

$$\begin{aligned}I_3 = -\frac{\|z_{i+2} - z_{i+1}\| \|z_{i+1} - z_i\|}{2\pi} & \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} (\rho \sin\theta) (\rho \cos\theta) \rho \ln(\rho a(\theta)) d\rho \right) d\theta + \right. \\ & \left. + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} (\rho \sin\theta) (\rho \cos\theta) \rho \ln(\rho a(\theta)) d\rho \right) d\theta \right],\end{aligned}$$

rovnost (44) udává hodnotu $a(\theta)$. Vnitřní integrály vyčíslíme analyticky pomocí kódu

syms a rho st ct

```
ker = rho * log( a*rho );
y1 = int( rho*st * rho*ct * ker , rho, 0, 1/ct );
y2 = int( rho*st * rho*ct * ker , rho, 0, 1/st );
```

K substituci za st , ct a a uijeme kód (42), provedeme numerickou integraci vůči θ , sečteme a vynásobíme konstantou $-\frac{\|z_{i+2} - z_{i+1}\| \|z_{i+1} - z_i\|}{2\pi}$.

Integrál I_4

Integrujeme znovu přes disjunktní dílky.

Parametrizace Γ_i :

$$x(t) = (1-t)z_{i+1} + tz_i, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_{i+2} :

$$y(s) = (1-s)z_{i+3} + sz_{i+2}, \quad s \in [0, 1].$$

Platí

$$\begin{aligned}\|x'(t)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, & \psi_i(x(t)) &= t, \\ \|y'(s)\| &= \|z_{i+3} - z_{i+2}\|, & \psi_{i+2}(y(s)) &= s\end{aligned}$$

a

$$r^2(s, t) = \|(1-s)z_{i+3} + sz_{i+2} - (1-t)z_{i+1} - tz_i\|^2 = \|s(z_{i+2} - z_{i+3}) + t(z_{i+1} - z_i) + (z_{i+3} - z_{i+1})\|^2.$$

Obdržíme

$$I_4 = -\frac{\|z_{i+3} - z_{i+2}\| \|z_{i+1} - z_i\|}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 s \ln(r(s, t)) ds \right) dt.$$

Integrál se vypočte numericky.

11.4 Další prvky vpravo od diagonály.

Vyjdeme opět ze vztahu (35). Pro $i = 1, \dots, n-3$, $j = \begin{cases} i+3, \dots, n-2 & i=1, \\ i+3, \dots, n-1 & i=2, \\ i+3, \dots, n & 3 \leq i \leq n-3, \end{cases}$

tak platí

$$V_h(i, j) = \sum_{k=i-1}^i \sum_{l=j-1}^j I_{kl},$$

kde

$$I_{kl} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_l} \psi_j(y) \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x.$$

Úkolem je tak spočítat jednotlivé integrály I_{kl} , díky Γ_k a Γ_l jsou přitom ve všech případech disjunktní.

Parametrizace Γ_k :

$$x(t) = (1-t)z_{k+1} + tz_k, \quad t \in [0, 1], \quad (45)$$

parametrizace Γ_l :

$$y(s) = (1-s)z_{l+1} + sz_l, \quad s \in [0, 1]. \quad (46)$$

Potom

$$\begin{aligned}\|x'(t)\| &= \|z_{k+1} - z_k\|, & \psi_i(x(t)) &= (1-t)\psi_i(z_{k+1}) + t\psi_i(z_k), \\ \|y'(s)\| &= \|z_{l+1} - z_l\|, & \psi_j(y(s)) &= (1-s)\psi_j(z_{l+1}) + s\psi_j(z_l)\end{aligned}$$

a

$$r_{kl}^2(s, t) = \|(1-s)z_{l+1} + sz_l - (1-t)z_{k+1} - tz_k\|^2 = \|s(z_l - z_{l+1}) + t(z_{k+1} - z_k) + (z_{l+1} - z_{k+1})\|^2. \quad (47)$$

Získáme tak

$$I_{kl} = -\frac{\|z_{k+1} - z_k\| \|z_{l+1} - z_l\|}{2\pi} \int_0^1 [(1-t)\psi_i(z_{k+1}) + t\psi_i(z_k)].$$

$$\cdot \left(\int_0^1 [(1-s)\psi_j(z_{l+1}) + s\psi_j(z_l)] \ln(r_{kl}(s,t)) ds \right) dt.$$

Tedy

- $I_{i-1,j-1} = -\frac{\|z_i - z_{i-1}\| \|z_j - z_{j-1}\|}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 (1-s) \ln(r_{i-1,j-1}(s,t)) ds \right) dt$
- $I_{i-1,j} = -\frac{\|z_i - z_{i-1}\| \|z_{j+1} - z_j\|}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 s \ln(r_{i-1,j}(s,t)) ds \right) dt,$
- $I_{i,j-1} = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\| \|z_j - z_{j-1}\|}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 (1-s) \ln(r_{i,j-1}(s,t)) ds \right) dt,$
- $I_{i,j} = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\| \|z_{j+1} - z_j\|}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 s \ln(r_{i,j}(s,t)) ds \right) dt.$

Tyto integrály se opět vypočítají numericky.

11.5 Zbývající prvky na prvním a druhém řádku.

Budou nás zajímat prvky $V_h(1, n-1)$, $V_h(1, n)$ a $V_h(2, n)$. Protože matice V_h je symetrická, platí

$$\begin{aligned} V_h(1, n-1) &= V_h(n-1, 1), \\ V_h(1, n) &= V_h(n, 1), \\ V_h(2, n) &= V_h(n, 2). \end{aligned}$$

Všimněme si, že prvky $V_h(n-1, 1)$ a $V_h(n, 2)$ jsou tvořeny součtem čtyř integrálů „stejného typu“ jako druhý prvek vpravo od diagonály. K vyčíslení tedy použijeme úplně stejného postupu, jen

$$\begin{aligned} \text{pro } V_h(n-1, 1) : & \quad i-1 = n-2, \quad i = n-1, \quad i+1 = n, \quad i+2 = 1, \quad i+3 = 2, \\ \text{pro } V_h(n, 2) : & \quad i-1 = n-1, \quad i = n, \quad i+1 = 1, \quad i+2 = 2, \quad i+3 = 3. \end{aligned}$$

Naproti tomu prvek $V_h(n, 1)$ je tvořen součtem integrálů „stejného typu“ jako první prvek vpravo od diagonály, tedy k vyčíslení uijeme taktéž stejného postupu a platí

$$i-1 = n-1, \quad i = n, \quad i+1 = 1, \quad i+2 = 2.$$

12 Vyčíslení diskretizovaného operátoru dvojrstvy.

Pro (i, j) -tý prvek matice K_h , $i, j = 1 \dots, n$, jsme získali předpis (viz. stranu 27):

$$K_h(i, j) = \langle K\psi_j, \psi_i \rangle_2 = \int_{\partial\Omega} K\psi_j(x) \cdot \psi_i(x) ds_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \psi_i(x) \left(\int_{\partial\Omega} \psi_j(y) \frac{d}{dn_y} \ln \|y-x\| ds_y \right) ds_x.$$

Testovací funkce ψ_i , $i = 1, \dots, n$, je nenulová pouze na Γ_i a Γ_{i-1} , proto pro $i, j = 1, \dots, n$ dostaneme

$$K_h(i, j) = \sum_{k=i-1}^i \sum_{l=j-1}^j \overbrace{-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_l} \psi_j(y) \frac{d}{dn_y} \ln \|y-x\| ds_y \right)}^{\text{ozn } I_{kl}} ds_x, \quad \Gamma_0 = \Gamma_n. \quad (48)$$

Operátor dvojrvtvsty není symetrický, musíme tedy spočítat všechny prvky matice. Jednotlivé integrály I_{kl} dané předpisem (48) si rozdělíme do čtyř skupin podle vzájemné polohy dílků Γ_k a Γ_l a budeme značit:

- $I_{kl}^s \stackrel{\text{ozn}}{=} I_{kl}$, kde $\Gamma_k = \Gamma_l$,
- $I_{kl}^l \stackrel{\text{ozn}}{=} I_{kl}$, kde Γ_l sousedí zleva s Γ_k ,
- $I_{kl}^p \stackrel{\text{ozn}}{=} I_{kl}$, kde Γ_l sousedí zprava s Γ_k ,
- $I_{kl}^d \stackrel{\text{ozn}}{=} I_{kl}$, kde Γ_l a Γ_k jsou disjunktní.

Nejprve si ukážeme, jak dané integrály vyčíslit, a později, jak sestavit matici. Podívejme se ještě, jak vypadá derivace ve směru jednotkového vnějšího normálového vektoru (vůči proměnné y) k hranici $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn_y} \ln \|y-x\| &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \ln \|y-x\|}{\partial y_i} \cdot n_{y_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\|y-x\|} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(y_i-x_i)}{\|y-x\|} \cdot n_{y_i} = \\ &= \frac{1}{\|y-x\|^2} \sum_{i=1}^2 (y_i-x_i) \cdot n_{y_i} = \frac{\langle y-x, n_y \rangle}{\|y-x\|^2}. \end{aligned}$$

Podobně jako v minulé kapitole zavedeme značení

$$r(\circ, \bullet) \stackrel{\text{ozn}}{=} \|y(\circ) - x(\bullet)\|$$

a necht n_i označuje vnější jednotkový normálový vektor k dílku Γ_i , tj.

$$\langle z_{i+1} - z_i, n_i \rangle = 0.$$

12.1 Integrace přes shodné dílky, $\Gamma_k = \Gamma_l$.

Buď x libovolný bod na úsečce Γ_l . Uvažujme zobrazení

$$y \mapsto \frac{\langle y-x, n_l \rangle}{\|y-x\|^2}, \quad y \in \Gamma_l \setminus \{x\}.$$

Pro $y \in \Gamma_l \setminus \{x\}$ je vektor $(y-x)$ násobkem vektoru $(z_{l+1} - z_l)$, a proto $\langle y-x, n_l \rangle = 0$. Tedy

$$\text{pro každé } y \in \Gamma_l \setminus \{x\} : \frac{\langle y-x, n_l \rangle}{\|y-x\|^2} = 0.$$

Dostáváme tak, že

$$I_{kl}^s = 0 \quad \text{pro } k = i, i-1, l = j, j-1.$$

12.2 Integrace přes sousední dílky, Γ_l sousedí zleva s Γ_k .

Parametrizace Γ_k :

$$x(t) = (1-t)z_{k+1} + tz_k, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_l :

$$y(w) = (1-w)z_l + wz_{l+1}, \quad w \in [0, 1].$$

Pak

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|z_{k+1} - z_k\|, \\ \|y'(w)\| &= \|z_{l+1} - z_l\|, \\ \psi_i(x(t)) &= (1-t)\psi_i(z_{k+1}) + t\psi_i(z_k), \\ \psi_j(y(w)) &= (1-w)\psi_j(z_l) + w\psi_j(z_{l+1}), \end{aligned}$$

a protože $z_l = z_{k+1}$, platí:

$$\begin{aligned} r_{kl}^2(w, t) &= \|(1-w)z_l + wz_{l+1} - (1-t)z_{k+1} - tz_k\|^2 = \|w(z_{l+1} - z_l) + t(z_{k+1} - z_k)\|^2 = \\ &= w^2 \|z_{l+1} - z_l\|^2 + 2wt \langle z_{l+1} - z_l, z_{k+1} - z_k \rangle + t^2 \|z_{k+1} - z_k\|^2. \end{aligned}$$

Ještě zbývá vyjádřit skalární součin

$$\langle y(w) - x(t), n_l \rangle = \langle w(z_{l+1} - z_l) + t(z_{k+1} - z_k), n_l \rangle = t \langle z_{k+1} - z_k, n_l \rangle.$$

Proto

$$\begin{aligned} I_{kl}^l &= - \frac{\|z_{k+1} - z_k\| \langle z_{k+1} - z_k, \|z_{l+1} - z_l\| n_l \rangle}{2\pi} \int_0^1 [(1-t)\psi_i(z_{k+1}) + t\psi_i(z_k)] \cdot \\ &\cdot \left(\int_0^1 [(1-w)\psi_j(z_l) + w\psi_j(z_{l+1})] \frac{t}{r_{kl}^2(w, t)} dw \right) dt, \quad k = i, i-1, \quad l = j, j-1. \end{aligned}$$

Nyní použijeme transformaci do polárních souřadnic (38), (39), (40) užitou v kapitole (11). Dostáváme

$$r_{kl}^2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^2 \underbrace{\left(\cos^2 \theta \|z_{l+1} - z_l\|^2 + \sin(2\theta) \langle z_{l+1} - z_l, z_{k+1} - z_k \rangle + \sin^2 \theta \|z_{k+1} - z_k\|^2 \right)}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} a_{kl}^2(\theta)}.$$

Po substituci má jádro tvar

$$\frac{\rho \sin \theta}{\rho^2 a_{kl}^2(\theta)},$$

a protože bude ještě tento výraz násoben Jacobiánem ρ , stává se jádro členem nezávislým na ρ . Vnitřní integrál se proto redukuje na pouhou integraci součinu testovacích funkcí. Tedy

$$I_{kl}^l = - \frac{\|z_{k+1} - z_k\| \langle z_{k+1} - z_k, \|z_{l+1} - z_l\| n_l \rangle}{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{a_{kl}^2(\theta)} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} M_{kl}(\rho, \theta) d\rho \right) d\theta + \right.$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{a_{kl}^2(\theta)} \left(\int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} M_{kl}(\rho, \theta) d\rho \right) d\theta \Big],$$

kde

$$M_{kl}(\rho, \theta) = \begin{cases} (1 - \rho \sin \theta) \rho \cos \theta & k = i - 1, l = j - 1, \\ (1 - \rho \sin \theta)(1 - \rho \cos \theta) & k = i - 1, l = j, \\ \rho \sin \theta \rho \cos \theta & k = i, l = j - 1, \\ \rho \sin \theta(1 - \rho \cos \theta) & k = i, l = j. \end{cases}$$

Vnitřní integrál podle ρ má analytické vyčíslení, vnější integrál dle θ vypočteme numericky.

12.3 Integrace přes sousední dílky, Γ_l sousedí zprava s Γ_k .

Parametrizace Γ_k :

$$x(w) = (1 - w)z_k + wz_{k+1}, \quad w \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_l :

$$y(t) = (1 - t)z_{l+1} + tz_l, \quad t \in [0, 1].$$

Potom

$$\begin{aligned} \|x'(w)\| &= \|z_{k+1} - z_k\|, \\ \|y'(t)\| &= \|z_{l+1} - z_l\|, \\ \psi_i(x(w)) &= (1 - w)\psi_i(z_k) + w\psi_i(z_{k+1}), \\ \psi_j(y(t)) &= (1 - t)\psi_j(z_{l+1}) + t\psi_j(z_l). \end{aligned}$$

Platí $z_{l+1} = z_k$, tedy

$$\begin{aligned} r_{kl}^2(t, w) &= \|(1 - t)z_{l+1} + tz_l - (1 - w)z_k - wz_{k+1}\|^2 = \|t(z_l - z_{l+1}) + w(z_k - z_{k+1})\|^2 = \\ &= t^2 \|z_{l+1} - z_l\|^2 + 2tw \langle z_{l+1} - z_l, z_{k+1} - z_k \rangle + w^2 \|z_{k+1} - z_k\|^2. \end{aligned}$$

Dále

$$\langle y(t) - x(w), n_l \rangle = \langle t(z_l - z_{l+1}) + w(z_k - z_{k+1}), n_l \rangle = w \langle z_k - z_{k+1}, n_l \rangle.$$

Proto

$$\begin{aligned} I_{kl}^p &= - \frac{\|z_{k+1} - z_k\| \langle z_k - z_{k+1}, \|z_{l+1} - z_l\| n_l \rangle}{2\pi} \int_0^1 [(1 - w)\psi_i(z_k) + w\psi_i(z_{k+1})] \cdot \\ &\cdot \left(\int_0^1 [(1 - t)\psi_j(z_{l+1}) + t\psi_j(z_l)] \frac{w}{r_{kl}^2(t, w)} dt \right) dw, \quad k = i, i - 1, \quad l = j, j - 1. \end{aligned}$$

Užijeme dále transformaci do polárních souřadnic (38), (39), (40) z kapitoly (11) a dostáváme

$$r_{kl}^2(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta) = \rho^2 \underbrace{\left(\sin^2 \theta \|z_{l+1} - z_l\|^2 + \sin(2\theta) \langle z_{l+1} - z_l, z_{k+1} - z_k \rangle + \cos^2 \theta \|z_{k+1} - z_k\|^2 \right)}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} a_{kl}^2(\theta)}.$$

Jádro má nyní tvar

$$\frac{\rho \cos \theta}{\rho^2 a_{kl}^2(\theta)}$$

a díky Jacobiánu ρ je jádro nezávislé na ρ . Vnitřní integrál se opět redukuje integraci součinu testovacích funkcí. Takže

$$I_{kl}^p = -\frac{\|z_{k+1} - z_k\| \langle z_k - z_{k+1}, \|z_{l+1} - z_l\| n_l \rangle}{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{a_{kl}^2(\theta)} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} M_{kl}(\rho, \theta) d\rho \right) d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{a_{kl}^2(\theta)} \left(\int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} M_{kl}(\rho, \theta) d\rho \right) d\theta \right],$$

kde

$$M_{kl}(\rho, \theta) = \begin{cases} \rho \cos \theta (1 - \rho \sin \theta) & k = i - 1, l = j - 1, \\ \rho \cos \theta \rho \sin \theta & k = i - 1, l = j, \\ (1 - \rho \cos \theta)(1 - \rho \sin \theta) & k = i, l = j - 1, \\ (1 - \rho \cos \theta) \rho \sin \theta & k = i, l = j. \end{cases}$$

Opět vnitřní integrál dle ρ má analytické vyčíslení, vnější integrál dle θ spočteme numericky.

12.4 Integrace přes disjunktní dílky.

V tomto případě použijeme parametrizace (45) a (46) z kapitoly (11) a pro $r_{kl}(s, t)$ tak platí vztah (47). Protože nyní nemáme žádný společný uzel, dostáváme pro skalární součin:

$$\langle y(s) - x(t), n_l \rangle = \langle s(z_l - z_{l+1}) + t(z_{k+1} - z_k) + (z_{l+1} - z_{k+1}), n_l \rangle = \\ = \langle t(z_{k+1} - z_k) + (z_{l+1} - z_{k+1}), n_l \rangle.$$

Získáme tak

$$I_{kl}^d = -\frac{\|z_{k+1} - z_k\|}{2\pi} \int_0^1 [(1-t)\psi_i(z_{k+1}) + t\psi_i(z_k)] \left(\int_0^1 [(1-s)\psi_j(z_{l+1}) + s\psi_j(z_l)] \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{\langle t(z_{k+1} - z_k) + (z_{l+1} - z_{k+1}), \|z_{l+1} - z_l\| n_l \rangle}{r_{kl}^2(s, t)} ds \right) dt.$$

Tedy

- $I_{i-1, j-1}^d = -\frac{\|z_i - z_{i-1}\|}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 (1-s) \frac{\langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_j - z_i), \|z_j - z_{j-1}\| n_{j-1} \rangle}{r_{i-1, j-1}^2(s, t)} ds \right) dt,$
- $I_{i-1, j}^d = -\frac{\|z_i - z_{i-1}\|}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 s \frac{\langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_{j+1} - z_i), \|z_{j+1} - z_j\| n_j \rangle}{r_{i-1, j}^2(s, t)} ds \right) dt,$
- $I_{i, j-1}^d = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\|}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 (1-s) \frac{\langle t(z_{i+1} - z_i) + (z_j - z_{i+1}), \|z_j - z_{j-1}\| n_{j-1} \rangle}{r_{i, j-1}^2(s, t)} ds \right) dt,$

$$\bullet \quad I_{ij}^d = -\frac{\|z_{i+1} - z_i\|}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 s \frac{\langle t(z_{i+1} - z_i) + (z_{j+1} - z_{i+1}), \|z_{j+1} - z_j\| n_j \rangle}{r_{i,j}^2(s, t)} ds \right) dt.$$

Integrály vypočteme numericky.

12.5 Sestavení matice.

Ukážeme si nyní postup, jak vypočítat (i, j) -tý prvek matice K_h , $i, j = 1, \dots, n$, $\Gamma_0 = \Gamma_n$:

1. Test vzájemné polohy Γ_{i-1} a Γ_{j-1} :
 - $\Gamma_{i-1} = \Gamma_{j-1} \Rightarrow I_1 = 0$,
 - Γ_{j-1} sousedí zleva s $\Gamma_{i-1} \Rightarrow I_1 = I_{i-1, j-1}^l$,
 - Γ_{j-1} sousedí zprava s $\Gamma_{i-1} \Rightarrow I_1 = I_{i-1, j-1}^p$,
 - Γ_{i-1} a Γ_{j-1} jsou disjunktní $\Rightarrow I_1 = I_{i-1, j-1}^d$.
2. Test vzájemné polohy Γ_{i-1} a Γ_j :
 - $\Gamma_{i-1} = \Gamma_j \Rightarrow I_2 = 0$,
 - Γ_j sousedí zleva s $\Gamma_{i-1} \Rightarrow I_2 = I_{i-1, j}^l$,
 - Γ_j sousedí zprava s $\Gamma_{i-1} \Rightarrow I_2 = I_{i-1, j}^p$,
 - Γ_{i-1} a Γ_j jsou disjunktní $\Rightarrow I_2 = I_{i-1, j}^d$.
3. Test vzájemné polohy Γ_i a Γ_{j-1} :
 - $\Gamma_i = \Gamma_{j-1} \Rightarrow I_3 = 0$,
 - Γ_{j-1} sousedí zleva s $\Gamma_i \Rightarrow I_3 = I_{i, j-1}^l$,
 - Γ_{j-1} sousedí zprava s $\Gamma_i \Rightarrow I_3 = I_{i, j-1}^p$,
 - Γ_i a Γ_{j-1} jsou disjunktní $\Rightarrow I_3 = I_{i, j-1}^d$.
4. Test vzájemné polohy Γ_i a Γ_j :
 - $\Gamma_i = \Gamma_j \Rightarrow I_4 = 0$,
 - Γ_j sousedí zleva s $\Gamma_i \Rightarrow I_4 = I_{i, j}^l$,
 - Γ_j sousedí zprava s $\Gamma_i \Rightarrow I_4 = I_{i, j}^p$,
 - Γ_i a Γ_j jsou disjunktní $\Rightarrow I_4 = I_{i, j}^d$.
5. $K_h(i, j) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$.

Ještě zbývá ukázat, jak vyjádřit jednotkový vnější normálový vektor n_l . Označíme si souřadnice uzlů:

$$z_{l+1} \stackrel{\text{ozn}}{=} (x_{l+1}, y_{l+1}), \quad z_l \stackrel{\text{ozn}}{=} (x_l, y_l),$$

potom $(z_l - z_{l+1}) = (x_l - x_{l+1}, y_l - y_{l+1})$. Vektor kolmý k vektoru $(z_l - z_{l+1})$ bude mít souřadnice $(y_{l+1} - y_l, x_l - x_{l+1})$. Tento vektor je vnější normálový vektor¹⁸ ke Γ_l . Pro jednotkový vnější

¹⁸Výpočtem zjistíme, že $(y_{l+1} - y_l, x_l - x_{l+1}, 0) \times (x_l - x_{l+1}, y_l - y_{l+1}, 0) = (0, 0, -(y_l - y_{l+1})^2 - (x_l - x_{l+1})^2)$. Protože je třetí souřadnice vektorového součinu záporná, je vektor $(y_{l+1} - y_l, x_l - x_{l+1})$ vnějším normálovým vektorem.

normálový vektor pak platí

$$n_l = \frac{(y_{l+1} - y_l, x_l - x_{l+1})}{\|z_{l+1} - z_l\|}$$

a tedy také

$$\|z_{l+1} - z_l\| n_l = (y_{l+1} - y_l, x_l - x_{l+1}).$$

13 Vyčíslení diskretizovaného hypersingulárního operátoru.

Pro (i, j) -tý prvek matice D_h , $i, j = 1, \dots, n$, máme odvozeno (viz. stranu 27):

$$D_h(i, j) = \langle D\psi_j, \psi_i \rangle_2 = \int_{\partial\Omega} D\psi_j(x) \cdot \psi_i(x) ds_x = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \psi_i(x) \left(\int_{\partial\Omega} \psi_j(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x.$$

Hypersingulární operátor je symetrický, pro každé $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ tedy platí

$$\langle Du, v \rangle_2 = \langle u, Dv \rangle_2,$$

proto také matice D_h bude symetrická. Testovací funkce ψ_i , $i = 1, \dots, n$, jsou navrženy tak, aby byly nenulové pouze na Γ_i a Γ_{i-1} , takže pro $i, j = 1, \dots, n$ dostáváme

$$D_h(i, j) = \sum_{k=i-1}^i \sum_{l=j-1}^j \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_l} \psi_j(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x, \quad \Gamma_0 = \Gamma_n. \quad (49)$$

Ukažme si nyní důležitý vztah platící pro diagonální prvky matice D_h . Nechť $u(x) = c$ pro každé $x \in \mathbf{R}^2$, kde c je libovolná reálná konstanta. Potom podle (10) platí

$$Du(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Položíme-li $u|_{\partial\Omega} = c \cdot \sum_{j=1}^n \psi_j$, platí také

$$\left\langle D\left(c \cdot \sum_{j=1}^n \psi_j\right), \psi_i \right\rangle_2 = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tedy

$$c \cdot \sum_{j=1}^n \langle D\psi_j, \psi_i \rangle_2 = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (50)$$

Proto musí být součet prvků na každém řádku matice D_h nulový a pro diagonální prvek platí

$$D_h(i, i) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n D_h(i, j), \quad i = 1, \dots, n. \quad (51)$$

Matici D_h budeme vyčíslovat postupně po řádcích. Pro i -tý řádek je tedy třeba vypočítat

- $D_h(i, i + 1)$, tj. první prvek vpravo od diagonály, $i = 1, \dots, n - 1$,
- $D_h(i, i + 2)$, tj. druhý prvek vpravo od diagonály, $i = 1, \dots, n - 2$,
- $D_h(i, j)$, $j = \begin{cases} i + 3, \dots, n - 2 & \text{pro } i = 1, \\ i + 3, \dots, n - 1 & \text{pro } i = 2, \\ i + 3, \dots, n & \text{pro } 3 \leq i \leq n - 3, \end{cases}$
- pro $i = 1$ předposlední a poslední prvek na řádce, tj. $D_h(1, n - 1)$ a $D_h(1, n)$,
- pro $i = 2$ poslední prvek na řádce, tj. $D_h(2, n)$.

Díky symetrii D_h platí pro prvky na i -tém řádce, $i = 2, \dots, n$, vlevo od diagonály:

$$D_h(i, j) = D_h(j, i), \quad j = 1, \dots, i - 1.$$

Diagonální prvky spočítáme pomocí rovnosti (51), vyhneme se tak nejkomplikovanějšímu výpočtu. Vyjádříme si dále:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| &= {}^{19} \frac{d}{dn_x} \frac{\sum_{i=1}^2 (y_i - x_i) n_{y_i}}{\|y - x\|^2} = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\sum_{i=1}^2 (y_i - x_i) n_{y_i}}{\|y - x\|^2} \right) n_{x_j} = \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{-n_{y_j} \|y - x\|^2 - \left(\sum_{i=1}^2 (y_i - x_i) n_{y_i} \right) 2(y_j - x_j)(-1)}{\|y - x\|^4} n_{x_j} = -\frac{\langle n_x, n_y \rangle}{\|y - x\|^2} + 2 \frac{\langle y - x, n_x \rangle \langle y - x, n_y \rangle}{\|y - x\|^4}. \end{aligned}$$

Označujme opět

$$r(\circ, \bullet) \stackrel{\text{ozn}}{=} \|y(\circ) - x(\bullet)\|.$$

Jednotkový vnější normálový vektor k dílku Γ_i budeme značit jako n_i , tj.

$$\langle z_{i+1} - z_i, n_i \rangle = 0,$$

a označme také souřadnice každého uzlu:

$$z_i \stackrel{\text{ozn}}{=} (x_i, y_i).$$

13.1 První prvek vpravo od diagonály.

Dle vztahu (49) pro $i = 1, \dots, n - 1$ platí

$$D_h(i, i + 1) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

kde

$$\bullet I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_i} \psi_{i+1}(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$$

¹⁹Použijeme předpis pro $\frac{d}{dn_y} \ln \|y - x\|$ z minulé kapitoly.

- $I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+1}} \psi_{i+1}(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_i} \psi_{i+1}(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_4 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+1}} \psi_{i+1}(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x.$

Integrál I_1

V singulárním bodě z_i je testovací funkce ψ_{i+1} nulová, což nám zajistí oslabení singularity a možnost vyčíslení integrálu pomocí přechodu k polárním souřadnicím.

Parametrizace Γ_{i-1} :

$$x(t) = (1-t)z_i + tz_{i-1}, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_i :

$$y(w) = (1-w)z_i + wz_{i+1}, \quad w \in [0, 1].$$

Pak

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|z_i - z_{i-1}\|, & \psi_i(x(t)) &= 1-t, \\ \|y'(w)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, & \psi_{i+1}(y(w)) &= w \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} r^2(w, t) &= \|(1-w)z_i + wz_{i+1} - (1-t)z_i - tz_{i-1}\|^2 = \|w(z_{i+1} - z_i) + t(z_i - z_{i-1})\|^2 = \\ &= w^2 \|z_{i+1} - z_i\|^2 + 2wt \langle z_{i+1} - z_i, z_i - z_{i-1} \rangle + t^2 \|z_i - z_{i-1}\|^2. \end{aligned}$$

Postupem uvedeným na konci minulé kapitoly odvodíme, že

$$n_{i-1} = \frac{(y_i - y_{i-1}, x_{i-1} - x_i)}{\|z_i - z_{i-1}\|} \quad \text{a} \quad n_i = \frac{(y_{i+1} - y_i, x_i - x_{i+1})}{\|z_{i+1} - z_i\|}.$$

Označíme si ještě

$$\tilde{n}_{i-1} \stackrel{\text{ozn}}{=} (y_i - y_{i-1}, x_{i-1} - x_i) \quad \text{a} \quad \tilde{n}_i \stackrel{\text{ozn}}{=} (y_{i+1} - y_i, x_i - x_{i+1}).$$

Dále

$$\langle y(w) - x(t), n_{i-1} \rangle = w \langle z_{i+1} - z_i, n_{i-1} \rangle = \frac{w \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i-1} \rangle}{\|z_i - z_{i-1}\|},$$

$$\langle y(w) - x(t), n_i \rangle = t \langle z_i - z_{i-1}, n_i \rangle = \frac{t \langle z_i - z_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{\|z_{i+1} - z_i\|}.$$

Potom

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 w \|z_i - z_{i-1}\| \|z_{i+1} - z_i\| \cdot \right. \\ &\cdot \left[-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{\|z_i - z_{i-1}\| \|z_{i+1} - z_i\| r^2(w, t)} + 2 \frac{wt \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle z_i - z_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{\|z_i - z_{i-1}\| \|z_{i+1} - z_i\| r^4(w, t)} \right] dw \right) dt \end{aligned}$$

a vykrácením norem získáme

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 w \left[-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{r^2(w,t)} + 2 \frac{wt \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle z_i - z_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{r^4(w,t)} \right] dw \right) dt.$$

Nyní použijeme transformaci do polárních souřadnic (38), (39), (40) z kapitoly (11) a funkce, kterou budeme integrovat (nezapomeneme na Jacobián), přechází do tvaru

$$(1 - \rho \sin \theta) (\rho \cos \theta) \rho \left[-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{\rho^2 a^2(\theta)} + \frac{\rho^2 \sin(2\theta) \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle z_i - z_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{\rho^4 a^4(\theta)} \right],$$

přičemž

$$a^2(\theta) = \cos^2 \theta \|z_{i+1} - z_i\|^2 + \sin(2\theta) \langle z_{i+1} - z_i, z_i - z_{i-1} \rangle + \sin^2 \theta \|z_i - z_{i-1}\|^2.$$

Krácením získáme

$$(1 - \rho \sin \theta) \cos \theta \left[-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{a^2(\theta)} + \frac{\sin(2\theta) \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle z_i - z_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{a^4(\theta)} \right],$$

a proto se integrace dle ρ redukuje na integraci jedné testovací funkce, tedy

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \left(-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{a^2(\theta)} + \frac{\sin(2\theta) \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle z_i - z_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{a^4(\theta)} \right) \left(\int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} (1 - \rho \sin \theta) d\rho \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \left(-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{a^2(\theta)} + \frac{\sin(2\theta) \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle z_i - z_{i-1}, \tilde{n}_i \rangle}{a^4(\theta)} \right) \left(\int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} (1 - \rho \sin \theta) d\rho \right) d\theta \right].$$

Integrace dle ρ je jednoduchá, vnější integrál je ponechán numerickému výpočtu.

Integrál I_2

Budeme integrovat přes disjunktní dílky.

Parametrizace Γ_{i-1} :

$$x(t) = (1-t)z_i + tz_{i-1}, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_{i+1} :

$$y(s) = (1-s)z_{i+2} + sz_{i+1}, \quad s \in [0, 1].$$

Pak

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|z_i - z_{i-1}\|, & \psi_i(x(t)) &= 1-t, \\ \|y'(s)\| &= \|z_{i+2} - z_{i+1}\|, & \psi_{i+1}(y(s)) &= s \end{aligned}$$

a

$$r^2(s, t) = \|(1-s)z_{i+2} + sz_{i+1} - (1-t)z_i - tz_{i-1}\|^2 = \|s(z_{i+1} - z_{i+2}) + t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+2} - z_i)\|^2. \quad (52)$$

Vnější jednotkové normálové vektory jsou dány

$$n_{i-1} = \frac{\overbrace{(y_i - y_{i-1}, x_{i-1} - x_i)}^{\text{ozn } \tilde{n}_{i-1}}}{\|z_i - z_{i-1}\|} \quad \text{a} \quad n_{i+1} = \frac{\overbrace{(y_{i+2} - y_{i+1}, x_{i+1} - x_{i+2})}^{\text{ozn } \tilde{n}_{i+1}}}{\|z_{i+2} - z_{i+1}\|}. \quad (53)$$

Dále

$$\langle y(s) - x(t), n_{i-1} \rangle = \langle s(z_{i+1} - z_{i+2}) + (z_{i+2} - z_i), n_{i-1} \rangle = \frac{\langle s(z_{i+1} - z_{i+2}) + (z_{i+2} - z_i), \tilde{n}_{i-1} \rangle}{\|z_i - z_{i-1}\|}$$

a

$$\langle y(s) - x(t), n_{i+1} \rangle = \langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+2} - z_i), n_{i+1} \rangle = \frac{\langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+2} - z_i), \tilde{n}_{i+1} \rangle}{\|z_{i+2} - z_{i+1}\|}.$$

Tedy po vykrácení norem máme

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 s \left[-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{r^2(s,t)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\langle s(z_{i+1} - z_{i+2}) + (z_{i+2} - z_i), \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+2} - z_i), \tilde{n}_{i+1} \rangle}{r^4(s,t)} \right] ds \right) dt.$$

Integrál dále vypočteme numericky.

Integrál I_3

Parametrizace Γ_i :

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)z_{i+1} + tz_i, & t &\in [0, 1], \\ y(s) &= (1-s)z_{i+1} + sz_i, & s &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, & \psi_i(x(t)) &= t, \\ \|y'(s)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, & \psi_{i+1}(y(s)) &= 1-s. \end{aligned}$$

Integrujeme přes shodné dílky, tedy platí

$$\langle n_i, n_i \rangle = \|n_i\|^2 = 1.$$

Nyní nahradíme bod $x(t)$ vnitřním bodem $x(t) - \varepsilon n_i$, $\varepsilon > 0$, provedeme vnitřní integraci a následně limitu $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Takže

$$\begin{aligned} y(s) - (x(t) - \varepsilon n_i) &= (1-s)z_{i+1} + sz_i - (1-t)z_{i+1} - tz_i + \varepsilon n_i = \\ &= z_{i+1}(t-s) - z_i(t-s) + \varepsilon n_i = (t-s)(z_{i+1} - z_i) + \varepsilon n_i. \end{aligned}$$

Z kolmosti vektorů n_i a $(z_{i+1} - z_i)$ pak dostáváme

$$\langle y(s) - (x(t) - \varepsilon n_i), n_i \rangle = \varepsilon \quad \text{a} \quad \|y(s) - (x(t) - \varepsilon n_i)\|^2 = (t-s)^2 \|z_{i+1} - z_i\|^2 + \varepsilon^2.$$

Tedy

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 (1-s) \cdot \|z_{i+1} - z_i\|^2 \left[-\frac{1}{(t-s)^2 \|z_{i+1} - z_i\|^2 + \varepsilon^2} + 2 \frac{\varepsilon^2}{\left((t-s)^2 \|z_{i+1} - z_i\|^2 + \varepsilon^2 \right)^2} \right] ds \right) dt.$$

Člen $\|z_{i+1} - z_i\|^2$ připojujeme k jádru. Uvedme nyní kód v Matlabu. Proměnná `esq` hraje úlohu ε^2 a proměnná `nsq` má význam druhé mocniny normy $\|z_{i+1} - z_i\|$. Nejdříve si připravíme jádro:

```
syms nsq esq t s
ker = nsq * ( -1 / ( (t-s)^2*nsq + esq ) + 2*esq / ( (t-s)^2*nsq + esq )^2 );
```

Dále provedeme vnitřní integraci:

```
i = int( (1-s) * ker, s, 0, 1 );
```

Limita $\varepsilon \rightarrow 0_+$:

```
i = limit( i, esq, 0, 'right' );
i = expand(i);
```

Výsledkem je:

```
1/2*log(nsq*(t-1)^2)+1/t-1/2*log(nsq*t^2)
```

Dostáváme tedy

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 t \left[\ln \left(\frac{1-t}{t} \right) + \frac{1}{t} \right] dt.$$

Tento integrál nediverguje, protože člen $\frac{1}{t}$ vynásobený testovací funkcí dává jedničku. Provedeme tak jednoduše integraci dle t :

```
i = int( t*i, t, 0, 1 );
```

Po vynásobení konstantou $\frac{1}{2\pi}$ máme výsledek

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}.$$

Integrál I_4

Budeme integrovat přes dílky s jedním společným krajním bodem. Integrál vyčíslíme pomocí transformace do polárních souřadnic, umožní nám to nulová testovací funkce ψ_i v singulárním bodě z_{i+1} .

Parametrizace Γ_i :

$$x(t) = (1-t)z_{i+1} + tz_i, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_{i+1} :

$$y(w) = (1-w)z_{i+1} + wz_{i+2}, \quad w \in [0, 1].$$

Pak

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, & \psi_i(x(t)) &= t, \\ \|y'(w)\| &= \|z_{i+2} - z_{i+1}\|, & \psi_{i+1}(y(w)) &= 1-w \end{aligned}$$

a také

$$\begin{aligned} r^2(w, t) &= \|(1-w)z_{i+1} + wz_{i+2} - (1-t)z_{i+1} - tz_i\|^2 = \|w(z_{i+2} - z_{i+1}) + t(z_{i+1} - z_i)\|^2 = \\ &= w^2 \|z_{i+2} - z_{i+1}\|^2 + 2wt \langle z_{i+2} - z_{i+1}, z_{i+1} - z_i \rangle + t^2 \|z_{i+1} - z_i\|^2. \end{aligned}$$

Vnější jednotkové normálové vektory jsou pak dány

$$n_i = \frac{\overbrace{(y_{i+1} - y_i, x_i - x_{i+1})}^{\text{ozn } \tilde{n}_i}}{\|z_{i+1} - z_i\|} \quad \text{a} \quad n_{i+1} = \frac{\overbrace{(y_{i+2} - y_{i+1}, x_{i+1} - x_{i+2})}^{\text{ozn } \tilde{n}_{i+1}}}{\|z_{i+2} - z_{i+1}\|}. \quad (54)$$

Dále

$$\langle y(w) - x(t), n_i \rangle = w \langle z_{i+2} - z_{i+1}, n_i \rangle = \frac{w \langle z_{i+2} - z_{i+1}, \tilde{n}_i \rangle}{\|z_{i+1} - z_i\|}$$

a

$$\langle y(w) - x(t), n_{i+1} \rangle = t \langle z_{i+1} - z_i, n_{i+1} \rangle = \frac{t \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{\|z_{i+2} - z_{i+1}\|}.$$

Pak po vykrácení norem máme

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 (1-w) \left[-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{r^2(w, t)} + 2 \frac{tw \langle z_{i+2} - z_{i+1}, \tilde{n}_i \rangle \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{r^4(w, t)} \right] dw \right) dt.$$

Nyní přejdeme k polárním souřadnicím užitím (38), (39) a (40). Funkci, kterou budeme integrovat, máme ve tvaru

$$\rho \sin \theta (1 - \rho \cos \theta) \rho \left[-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{\rho^2 a^2(\theta)} + \frac{\rho^2 \sin(2\theta) \langle z_{i+2} - z_{i+1}, \tilde{n}_i \rangle \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{\rho^4 a^4(\theta)} \right],$$

příčemž

$$a^2(\theta) = \cos^2 \theta \|z_{i+2} - z_{i+1}\|^2 + \sin(2\theta) \langle z_{i+2} - z_{i+1}, z_{i+1} - z_i \rangle + \sin^2 \theta \|z_{i+1} - z_i\|^2. \quad (55)$$

Po vykrácení ρ získáváme

$$\sin \theta (1 - \rho \cos \theta) \left[-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^2(\theta)} + \frac{\sin(2\theta) \langle z_{i+2} - z_{i+1}, \tilde{n}_i \rangle \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^4(\theta)} \right],$$

a proto

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \left(-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^2(\theta)} + \frac{\sin(2\theta) \langle z_{i+2} - z_{i+1}, \tilde{n}_i \rangle \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^4(\theta)} \right) \left(\int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} (1 - \rho \cos \theta) d\rho \right) d\theta + \right.$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta \left(-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^2(\theta)} + \frac{\sin(2\theta) \langle z_{i+2} - z_{i+1}, \tilde{n}_i \rangle \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^4(\theta)} \right) \left(\int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} (1 - \rho \cos \theta) d\rho \right) d\theta \Big].$$

Integrace podle ρ je snadná, vnější integrál vypočteme numericky.

13.2 Druhý prvek vpravo od diagonály.

Podle (49) platí pro $i = 1, \dots, n-2$

$$D_h(i, i+2) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

kde

- $I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+1}} \psi_{i+2}(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i-1}} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+2}} \psi_{i+2}(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+1}} \psi_{i+2}(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x,$
- $I_4 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_{i+2}} \psi_{i+2}(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y - x\| ds_y \right) ds_x.$

Integrál I_1

Integrál se liší od I_2 z výpočtu prvního prvku vpravo od diagonály jen v testovací funkci. Použijeme proto stejnou parametrizaci a pro odlišnou testovací funkci bude platit

$$\psi_{i+2}(y(s)) = 1 - s, \quad s \in [0, 1].$$

Získáme tak vztah

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 (1-s) \left[-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{r^2(s,t)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\langle s(z_{i+1} - z_{i+2}) + (z_{i+2} - z_i), \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+2} - z_i), \tilde{n}_{i+1} \rangle}{r^4(s,t)} \right] ds \right) dt.$$

přičemž $r(s, t)$ je určeno vztahem (52) a \tilde{n}_{i-1} a \tilde{n}_{i+1} jsou určeny přepisem (53). Tento dvojnásobný integrál spočteme numericky.

Integrál I_2

Budeme integrovat opět přes disjunktní dílky.

Parametrizace Γ_{i-1} :

$$x(t) = (1-t)z_i + tz_{i-1}, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_{i+2} :

$$y(s) = (1-s)z_{i+3} + sz_{i+2}, \quad s \in [0, 1].$$

Pak

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|z_i - z_{i-1}\|, & \psi_i(x(t)) &= 1-t, \\ \|y'(s)\| &= \|z_{i+3} - z_{i+2}\|, & \psi_{i+2}(y(s)) &= s \end{aligned}$$

a

$$r^2(s, t) = \|(1-s)z_{i+3} + sz_{i+2} - (1-t)z_i - tz_{i-1}\|^2 = \|s(z_{i+2} - z_{i+3}) + t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+3} - z_i)\|^2.$$

Vnější jednotkové normálové vektory jsou dány

$$n_{i-1} = \frac{\overbrace{(y_i - y_{i-1}, x_{i-1} - x_i)}^{\text{ozn } \tilde{n}_{i-1}}}{\|z_i - z_{i-1}\|} \quad \text{a} \quad n_{i+2} = \frac{\overbrace{(y_{i+3} - y_{i+2}, x_{i+2} - x_{i+3})}^{\text{ozn } \tilde{n}_{i+2}}}{\|z_{i+3} - z_{i+2}\|}.$$

Dále

$$\langle y(s) - x(t), n_{i-1} \rangle = \langle s(z_{i+2} - z_{i+3}) + (z_{i+3} - z_i), n_{i-1} \rangle = \frac{\langle s(z_{i+2} - z_{i+3}) + (z_{i+3} - z_i), \tilde{n}_{i-1} \rangle}{\|z_i - z_{i-1}\|}$$

a

$$\langle y(s) - x(t), n_{i+2} \rangle = \langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+3} - z_i), n_{i+2} \rangle = \frac{\langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+3} - z_i), \tilde{n}_{i+2} \rangle}{\|z_{i+3} - z_{i+2}\|}.$$

Pak po vykrácení norem dostáváme

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 s \left[-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_{i+2} \rangle}{r^2(s, t)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\langle s(z_{i+2} - z_{i+3}) + (z_{i+3} - z_i), \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_{i+3} - z_i), \tilde{n}_{i+2} \rangle}{r^4(s, t)} \right] ds \right) dt. \end{aligned}$$

Integrál dále vypočteme numericky.

Integrál I_3

Integrál je až na jednu testovací funkci shodný s integrálem I_4 z výpočtu prvního prvku vpravo od diagonály. Vyčíslení je možné pomocí přechodu k polárním souřadnicím. V tomto případě jsou obě testovací funkce ψ_i a ψ_{i+2} nulové v singulárním bodě z_{i+1} . Použijeme stejnou parametrizaci jako u I_4 a platí

$$\psi_{i+2}(y(w)) = w, \quad w \in [0, 1].$$

Transformací do polárních souřadnic získáme

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos \theta \left(-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^2(\theta)} + \frac{\sin(2\theta) \langle z_{i+2} - z_{i+1}, \tilde{n}_i \rangle \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^4(\theta)} \right) \left(\int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \rho d\rho \right) d\theta + \right.$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \left(-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^2(\theta)} + \frac{\sin(2\theta) \langle z_{i+2} - z_{i+1}, \tilde{n}_i \rangle \langle z_{i+1} - z_i, \tilde{n}_{i+1} \rangle}{a^4(\theta)} \right) \left(\int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} \rho d\rho \right) d\theta \Bigg],$$

kde $a(\theta)$ je dáno vztahem (55) a vektory \tilde{n}_i a \tilde{n}_{i+1} jsou určeny vztahem (54). Vnější integrál pak vypočteme numerickou cestou.

Integrál I_4

Integrujeme znovu přes disjunktní dílky.

Parametrizace Γ_i :

$$x(t) = (1-t)z_{i+1} + tz_i, \quad t \in [0, 1],$$

parametrizace Γ_{i+2} :

$$y(s) = (1-s)z_{i+3} + sz_{i+2}, \quad s \in [0, 1].$$

Platí

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|z_{i+1} - z_i\|, & \psi_i(x(t)) &= t, \\ \|y'(s)\| &= \|z_{i+3} - z_{i+2}\|, & \psi_{i+2}(y(s)) &= s \end{aligned}$$

a

$$r^2(s, t) = \|(1-s)z_{i+3} + sz_{i+2} - (1-t)z_{i+1} - tz_i\|^2 = \|s(z_{i+2} - z_{i+3}) + t(z_{i+1} - z_i) + (z_{i+3} - z_{i+1})\|^2.$$

Vnější jednotkové normálové vektory jsou pak dány

$$n_i = \frac{\overbrace{(y_{i+1} - y_i, x_i - x_{i+1})}^{\text{ozn } \tilde{n}_i}}{\|z_{i+1} - z_i\|} \quad \text{a} \quad n_{i+2} = \frac{\overbrace{(y_{i+3} - y_{i+2}, x_{i+2} - x_{i+3})}^{\text{ozn } \tilde{n}_{i+2}}}{\|z_{i+3} - z_{i+2}\|}.$$

Tedy

$$\langle y(s) - x(t), n_i \rangle = \langle s(z_{i+2} - z_{i+3}) + (z_{i+3} - z_{i+1}), n_i \rangle = \frac{\langle s(z_{i+2} - z_{i+3}) + (z_{i+3} - z_{i+1}), \tilde{n}_i \rangle}{\|z_{i+1} - z_i\|}$$

a

$$\langle y(s) - x(t), n_{i+2} \rangle = \langle t(z_{i+1} - z_i) + (z_{i+3} - z_{i+1}), n_{i+2} \rangle = \frac{\langle t(z_{i+1} - z_i) + (z_{i+3} - z_{i+1}), \tilde{n}_{i+2} \rangle}{\|z_{i+3} - z_{i+2}\|}.$$

Krácením norem dostáváme

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 s \left[-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_{i+2} \rangle}{r^2(s, t)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\langle s(z_{i+2} - z_{i+3}) + (z_{i+3} - z_{i+1}), \tilde{n}_i \rangle \langle t(z_{i+1} - z_i) + (z_{i+3} - z_{i+1}), \tilde{n}_{i+2} \rangle}{r^4(s, t)} \right] ds \right) dt. \end{aligned}$$

Integrál dále vypočteme numericky.

13.3 Další prvky vpravo od diagonály.

Vyjdeme-li znova ze vztahu (49), pak pro $i = 1, \dots, n-3$, $j = \begin{cases} i+3, \dots, n-2 & i=1, \\ i+3, \dots, n-1 & i=2, \\ i+3, \dots, n & 3 \leq i \leq n-3, \end{cases}$ platí

$$D_h(i, j) = \sum_{k=i-1}^i \sum_{l=j-1}^j I_{kl},$$

kde

$$I_{kl} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \psi_i(x) \left(\int_{\Gamma_l} \psi_j(y) \frac{d^2}{dn_y dn_x} \ln \|y-x\| ds_y \right) ds_x.$$

Dílky Γ_k a Γ_l jsou vždy disjunktní. Použijeme parametrizace (45) a (46) z kapitoly (11). Pro $r_{kl}(s, t)$ platí vztah (47). Pro vnější jednotkové normálové vektory platí:

$$n_k = \frac{\overbrace{(y_{k+1} - y_k, x_k - x_{k+1})}^{\text{ozn } \tilde{n}_k}}{\|z_{k+1} - z_k\|} \quad \text{a} \quad n_l = \frac{\overbrace{(y_{l+1} - y_l, x_l - x_{l+1})}^{\text{ozn } \tilde{n}_l}}{\|z_{l+1} - z_l\|}.$$

Tedy

$$\langle y(s) - x(t), n_k \rangle = \langle s(z_l - z_{l+1}) + (z_{l+1} - z_{k+1}), n_k \rangle = \frac{\langle s(z_l - z_{l+1}) + (z_{l+1} - z_{k+1}), \tilde{n}_k \rangle}{\|z_{k+1} - z_k\|}$$

a

$$\langle y(s) - x(t), n_l \rangle = \langle t(z_{k+1} - z_k) + (z_{l+1} - z_{k+1}), n_l \rangle = \frac{\langle t(z_{k+1} - z_k) + (z_{l+1} - z_{k+1}), \tilde{n}_l \rangle}{\|z_{l+1} - z_l\|}.$$

Krácením norem hned dostáváme

$$I_{kl} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 [(1-t)\psi_i(z_{k+1}) + t\psi_i(z_k)] \left(\int_0^1 [(1-s)\psi_j(z_{l+1}) + s\psi_j(z_l)] \left[-\frac{\langle \tilde{n}_k, \tilde{n}_l \rangle}{r_{kl}^2(s, t)} + 2 \frac{\langle s(z_l - z_{l+1}) + (z_{l+1} - z_{k+1}), \tilde{n}_k \rangle \langle t(z_{k+1} - z_k) + (z_{l+1} - z_{k+1}), \tilde{n}_l \rangle}{r_{kl}^4(s, t)} \right] ds \right) dt.$$

Tedy

- $I_{i-1, j-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 (1-s) \left[-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_{j-1} \rangle}{r_{i-1, j-1}^2(s, t)} + 2 \frac{\langle s(z_{j-1} - z_j) + (z_j - z_i), \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_j - z_i), \tilde{n}_{j-1} \rangle}{r_{i-1, j-1}^4(s, t)} \right] ds \right) dt,$
- $I_{i-1, j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) \left(\int_0^1 s \left[-\frac{\langle \tilde{n}_{i-1}, \tilde{n}_j \rangle}{r_{i-1, j}^2(s, t)} + 2 \frac{\langle s(z_j - z_{j+1}) + (z_{j+1} - z_i), \tilde{n}_{i-1} \rangle \langle t(z_i - z_{i-1}) + (z_{j+1} - z_i), \tilde{n}_j \rangle}{r_{i-1, j}^4(s, t)} \right] ds \right) dt,$

- $$I_{i,j-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 (1-s) \left[-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_{j-1} \rangle}{r_{i,j-1}^2(s,t)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\langle s(z_{j-1} - z_j) + (z_j - z_{i+1}), \tilde{n}_i \rangle \langle t(z_{i+1} - z_i) + (z_j - z_{i+1}), \tilde{n}_{j-1} \rangle}{r_{i,j-1}^4(s,t)} \right] ds \right) dt,$$
- $$I_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 t \left(\int_0^1 s \left[-\frac{\langle \tilde{n}_i, \tilde{n}_j \rangle}{r_{i,j}^2(s,t)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\langle s(z_j - z_{j+1}) + (z_{j+1} - z_{i+1}), \tilde{n}_i \rangle \langle t(z_{i+1} - z_i) + (z_{j+1} - z_{i+1}), \tilde{n}_j \rangle}{r_{i,j}^4(s,t)} \right] ds \right) dt.$$

Integrály vypočteme numericky.

13.4 Zbývající prvky na prvním a druhém řádku.

Je třeba ještě vyčíslit prvky $D_h(1, n-1)$, $D_h(1, n)$ a $D_h(2, n)$. Protože matice D_h je symetrická, platí

$$\begin{aligned} D_h(1, n-1) &= D_h(n-1, 1), \\ D_h(1, n) &= D_h(n, 1), \\ D_h(2, n) &= D_h(n, 2). \end{aligned}$$

Opět prvky $D_h(n-1, 1)$ a $D_h(n, 2)$ jsou tvořeny součtem čtyř integrálů „stejného typu“ jako druhý prvek vpravo od diagonály. K vyčíslení tedy použijeme úplně stejného postupu, kde

$$\begin{aligned} \text{pro } D_h(n-1, 1) : & \quad i-1 = n-2, \quad i = n-1, \quad i+1 = n, \quad i+2 = 1, \quad i+3 = 2, \\ \text{pro } D_h(n, 2) : & \quad i-1 = n-1, \quad i = n, \quad i+1 = 1, \quad i+2 = 2, \quad i+3 = 3. \end{aligned}$$

Prvek $D_h(n, 1)$ je tvořen součtem integrálů „stejného typu“ jako první prvek vpravo od diagonály, takže k výpočtu uijeme taktéž stejného postupu a platí

$$i-1 = n-1, \quad i = n, \quad i+1 = 1, \quad i+2 = 2.$$

14 Vyčíslení diskretizovaného operátoru identity.

Pro (i, j) -tý prvek matice M_h , $i, j = 1 \dots, n$, máme odvozeno (viz. stranu 27):

$$M_h(i, j) = \langle \psi_j, \psi_i \rangle_2 = \int_{\partial\Omega} \psi_j(x) \cdot \psi_i(x) ds.$$

Protože pro nosiče testovacích funkcí platí

$$\text{supp } \psi_i \cap \text{supp } \psi_j \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (j = i \text{ nebo } j = i \pm 1),$$

dostáváme

$$M_h(i, j) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (j = i \text{ nebo } j = i \pm 1),$$

přičemž $n + 1 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ a $1 - 1 \stackrel{\text{def}}{=} n$. Díky rovnosti

$$M_h(i, j) = M_h(j, i), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

bude matice M_h symetrická. Stačí nám tedy spočítat pouze diagonální prvky, první prvky vpravo od diagonály a poslední prvek na prvním řádku.

14.1 Diagonální prvek.

Pro $i = 1, \dots, n$ máme

$$M_h(i, i) = I_1 + I_2,$$

kde

- $I_1 = \int_{\Gamma_i} (\psi_i(x))^2 ds,$
- $I_2 = \int_{\Gamma_{i-1}} (\psi_i(x))^2 ds.$

Integrál I_1

Parametrizace Γ_i :

$$x(t) = (1 - t)z_{i+1} + tz_i, \quad t \in [0, 1]$$

a dále platí

$$\|x'(t)\| = \|z_{i+1} - z_i\|, \quad \psi_i(x(t)) = t.$$

Takže

$$I_1 = \int_0^1 t^2 \|z_{i+1} - z_i\| dt = \frac{\|z_{i+1} - z_i\|}{3}.$$

Integrál I_2

Parametrizace Γ_{i-1} :

$$x(t) = (1 - t)z_i + tz_{i-1}, \quad t \in [0, 1]$$

a platí

$$\|x'(t)\| = \|z_i - z_{i-1}\|, \quad \psi_i(x(t)) = 1 - t.$$

Proto

$$I_2 = \int_0^1 (1 - t)^2 \|z_i - z_{i-1}\| dt = \frac{\|z_i - z_{i-1}\|}{3}.$$

Dostaneme tedy

$$M_h(i, i) = \frac{\|z_{i+1} - z_i\| + \|z_i - z_{i-1}\|}{3}, \quad i = 1, \dots, n.$$

14.2 První prvek vpravo od diagonály.

Pro $i = 1, \dots, n-1$ máme

$$M_h(i, i+1) = \int_{\Gamma_i} \psi_i(x) \cdot \psi_{i+1}(x) ds.$$

Parametrizace Γ_i :

$$x(t) = (1-t)z_{i+1} + tz_i, \quad t \in [0, 1]$$

a platí

$$\|x'(t)\| = \|z_{i+1} - z_i\|, \quad \psi_i(x(t)) = t \quad \text{a} \quad \psi_{i+1}(x(t)) = 1-t.$$

Takže

$$M_h(i, i+1) = \int_0^1 t(1-t) \|z_{i+1} - z_i\| dt = \frac{\|z_{i+1} - z_i\|}{6}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (56)$$

14.3 Poslední prvek na prvním řádku.

Díky symetrii máme $M_h(1, n) = M_h(n, 1)$, kde

$$M_h(n, 1) = \int_{\Gamma_n} \psi_n(x) \cdot \psi_1(x) ds.$$

Tento prvek je tvořen integrálem „stejného typu“ jako první prvky vpravo od diagonály. Protože definujeme $n+1 = 1$, můžeme hned dosadit do (56) za i číslo n a dostaneme

$$M_h(1, n) = \frac{\|z_1 - z_n\|}{6}.$$

15 Vyčíslení diskretizovaného Newtonova potenciálu.

K výpočtu diskretizované pravé strany \tilde{R}_h^{20} je nutné vyčíslení Newtonova potenciálu

$$N_0(f)(x) = - \int_{\Omega} f(y) \frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\| dy \quad (57)$$

pro $x \in \partial\Omega$. Uvažujme nejprve rovnici

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega. \quad (58)$$

Bud' $u \in C^2(\bar{\Omega})$ řešení této rovnice a necht' $\partial\Omega$ je dost hladká. Pak u splňuje rovnost (9), a proto také

$$\forall x \in \partial\Omega : \quad N_0(f)(x) = \left(\frac{1}{2}I + K \right) (u)(x) - V \left(\frac{du}{dn} \right) (x). \quad (59)$$

Vidíme tak, že najdeme-li jedno dostatečně hladké partikulární řešení rovnice (58), vypočteme jeho

²⁰Viz. vztahy (28), (29).

dosazením do rovnice (59) Newtonův potenciál v jakémkoli bodě hranice $\partial\Omega$. Uvažujme proto nyní okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{u} &= \tilde{f} \quad \text{v } \Omega_0, \\ \tilde{u} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega_0, \end{aligned} \tag{60}$$

kde $\Omega_0 \supset \Omega$ je nějaká fiktivní oblast a $\tilde{f} \in L^2(\Omega_0)$ je nějaké rozšíření funkce $f \in L^2(\Omega)$. Kupříkladu Ω_0 může být obdélníková oblast obsahující Ω a

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{v } \Omega, \\ 0 & \text{v } \Omega_0 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Bude-li pak $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ ²¹ jednoznačné řešení úlohy (60), pak $\tilde{u}|_\Omega \in W^{1,2}(\Omega)$ bude partikulární řešení rovnice (58). Okrajovou úlohu (60) s obdélníkovou oblastí Ω_0 lze efektivně vyřešit například pomocí FEM a užitím rychlých algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic jako je cyklická redukce nebo FFT. Získáme tak diskrétní řešení \tilde{u}_h . Toto řešení a dále jeho vypočtenou normálovou derivaci dosadíme do rovnosti (59) a dostaneme tak aproximaci Newtonova potenciálu (57) pro libovolné $x \in \partial\Omega$.

Při dobrém tvaru oblasti Ω a funkce f můžeme nalézt analytické řešení u rovnice (58). Položíme potom

$$u_h = \sum_{j=1}^n u(z_j)\psi_j \quad \text{a} \quad \left(\frac{du}{dn}\right)_h = \sum_{j=1}^n \frac{du}{dn}(z_j)\psi_j$$

a Newtonův potenciál (57) budeme aproximovat takto:

$$N_0(f)(x) = \left(\frac{1}{2}I + K\right)(u_h)(x) - V\left(\frac{du}{dn}\right)_h(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{61}$$

Pro výpočet \tilde{R}_h pak musíme určit $N_{0h} = (\langle N_0f, \psi_i \rangle_2)_{i=1}^n$. Dosazením z (61) dostáváme aproximaci

$$\begin{aligned} \langle N_0f, \psi_i \rangle_2 &= \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K\right)(u_h), \psi_i \right\rangle_2 - \left\langle V\left(\frac{du}{dn}\right)_h, \psi_i \right\rangle_2 = \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K\right) \left(\sum_{j=1}^n u(z_j)\psi_j\right), \psi_i \right\rangle_2 - \left\langle V\left(\sum_{j=1}^n \frac{du}{dn}(z_j)\psi_j\right), \psi_i \right\rangle_2, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Z linearity skalárního součinu a jednotlivých operátorů pak získáme

$$\langle N_0f, \psi_i \rangle_2 = \sum_{j=1}^n u(z_j) \left(\frac{1}{2} \langle \psi_j, \psi_i \rangle_2 + \langle K\psi_j, \psi_i \rangle_2\right) - \sum_{j=1}^n \frac{du}{dn}(z_j) \langle V\psi_j, \psi_i \rangle_2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tedy

$$N_{0h} = \left(\frac{1}{2}M_h + K_h\right) \cdot \begin{pmatrix} u(z_1) \\ \vdots \\ u(z_n) \end{pmatrix} - V_h \cdot \begin{pmatrix} \frac{du}{dn}(z_1) \\ \vdots \\ \frac{du}{dn}(z_n) \end{pmatrix}. \tag{62}$$

²¹ $W_0^{1,2}(\Omega_0) = \{u \in W^{1,2}(\Omega_0) : Tu = 0\}$

16 Užitečné vlastnosti matic operátorů.

V této kapitole si uvedeme ještě další vlastnosti jednotlivých matic, které nám vedle definitnosti mohou posloužit ke kontrole správnosti jejich výpočtu. Budeme postupovat podobně jako při odvozování vztahu pro diagonální prvek matice D_h . Buď tedy $u(x) = c$ pro každé $x \in \mathbf{R}^2$, kde c je libovolná reálná konstanta. Je-li $\partial\Omega$ dost hladká, pak podle (9) platí rovnost

$$\frac{1}{2}u(x) = -K(u)(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Položíme-li $u|_{\partial\Omega} = c \cdot \sum_{j=1}^n \psi_j$, platí taktéž

$$\frac{1}{2} \left\langle c \cdot \sum_{j=1}^n \psi_j, \psi_i \right\rangle_2 = - \left\langle K \left(c \cdot \sum_{j=1}^n \psi_j \right), \psi_i \right\rangle_2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tedy

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \langle \psi_j, \psi_i \rangle_2 = - \sum_{j=1}^n \langle K \psi_j, \psi_i \rangle_2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Získali jsme tak vztah

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_h(i, j) = - \sum_{j=1}^n K_h(i, j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (63)$$

který nám říká, že polovina součtu prvků na každém řádku matice M_h je rovna záporně vzatému součtu prvků na daném řádku matice K_h . Nechť A je nyní nějaká matice řádu $p \times n$, kde p je přirozené číslo, a označme $A(\frac{1}{2}M_h + K_h) \stackrel{\text{ozn}}{=} B$. Potom

$$B(i, j) = \sum_{r=1}^n A(i, r) \cdot \left(\frac{1}{2}M_h(r, j) + K_h(r, j) \right), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n.$$

Součet prvků na i -tém řádku matice B , $i = 1, \dots, p$, je dán jako

$$\sum_{j=1}^n B(i, j) = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n A(i, r) \cdot \left(\frac{1}{2}M_h(r, j) + K_h(r, j) \right) = \sum_{r=1}^n A(i, r) \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}M_h(r, j) + K_h(r, j) \right).$$

Součet dle j je podle (63) pro $r = 1, \dots, n$ nulový, takže i součet prvků na každém řádku matice B je nulový. Položíme-li nyní

$$A = \left(\frac{1}{2}M_h^T + K_h^T \right) V_h^{-1}$$

a uvědomíme-li si, že i součet na každém řádku matice D_h je nulový²², zjistíme, že tuto vlastnost má také matice \tilde{S}_h . Tedy

$$\sum_{j=1}^n \tilde{S}_h(i, j) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Shrneme-li si pak získané vztahy, máme pro $i = 1, \dots, n$:

²²Viz. vztah (50).

- $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_h(i, j) = - \sum_{j=1}^n K_h(i, j),$
- $\sum_{j=1}^n D_h(i, j) = 0,$
- $\sum_{j=1}^n \tilde{S}_h(i, j) = 0.$

17 Dopočetní řešení ve vnitřním bodě.

Buď $u_h = \sum_{j=1}^n u_{h,j} \psi_j$ přibližné řešení okrajové úlohy (7) na hranici, kde $u_{h,1}, \dots, u_{h,n}$ jsou numericky vypočtené uzlové hodnoty. Nyní nás bude zajímat také aproximace normálové derivace řešení na hranici, tedy funkce $(\frac{du}{dn})_h = \sum_{j=1}^n (\frac{du}{dn})_{h,j} \psi_j$. Je-li $\partial\Omega$ dost hladká a $u \in C^2(\bar{\Omega})$ řešením úlohy (7), platí podle (12) na $\partial\Omega$

$$\frac{du}{dn} = Su - Nf.$$

Proto také platí

$$\left\langle \left(\frac{du}{dn} \right)_h, \psi_i \right\rangle_2 = \langle Su, \psi_i \rangle_2 - \langle Nf, \psi_i \rangle_2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Aproximaci $(\frac{du}{dn})_h$ normálové derivace řešení na hranici budeme hledat tak, aby platilo:

$$\left\langle \left(\frac{du}{dn} \right)_h, \psi_i \right\rangle_2 = \langle \tilde{S}u_h, \psi_i \rangle_2 - \langle \tilde{N}f, \psi_i \rangle_2, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde \tilde{S} a \tilde{N} jsou aproximace operátorů S a N ²³, tedy

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{du}{dn} \right)_{h,j} \cdot \langle \psi_j, \psi_i \rangle_2 = \sum_{j=1}^n u_{h,j} \cdot \langle \tilde{S}\psi_j, \psi_i \rangle_2 - \langle \tilde{N}f, \psi_i \rangle_2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Získáváme tak

$$M_h \cdot \begin{pmatrix} (\frac{du}{dn})_{h,1} \\ \vdots \\ (\frac{du}{dn})_{h,n} \end{pmatrix} = \tilde{S}_h \cdot \begin{pmatrix} u_{h,1} \\ \vdots \\ u_{h,n} \end{pmatrix} - \tilde{R}_h,$$

takže hodnoty $(\frac{du}{dn})_h$ v jednotlivých uzlech vypočítáme na základě vztahu

$$\begin{pmatrix} (\frac{du}{dn})_{h,1} \\ \vdots \\ (\frac{du}{dn})_{h,n} \end{pmatrix} = M_h^{-1} \cdot \left[\tilde{S}_h \cdot \begin{pmatrix} u_{h,1} \\ \vdots \\ u_{h,n} \end{pmatrix} - \tilde{R}_h \right].$$

Nyní již máme vyjádřeno vše potřebné, tj. hodnoty $u_{h,j}$ a $(\frac{du}{dn})_{h,j}$ pro každé $j = 1, \dots, n$, k tomu, abychom mohli dosadit do (8) a pomocí některé numerické kvadratury vypočítat přibližné řešení v libovolném vnitřním bodě oblasti Ω .

²³Viz. kapitolu (8).

18 Duální formulace.

Máme-li funkce $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ a $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ a platí-li navíc, že f a g_i jsou konvexní, $i = 1, \dots, m$, potom je minimalizační úloha

$$\text{nalezněte } \bar{x} \in \mathbf{R}^n \text{ takové, že } g(\bar{x}) \leq 0 \text{ a } f(\bar{x}) = \min_{x \in \mathbf{R}^n: g(x) \leq 0} f(x)$$

ekvivalentní úloze o sedlovém bodu

$$\begin{aligned} &\text{nalezněte } \bar{x} \in \mathbf{R}^n \text{ a } 0 \leq \bar{\lambda} \in \mathbf{R}^m \text{ takové, že} \\ &f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = \max_{\lambda \in \mathbf{R}^m: \lambda \geq 0} \min_{x \in \mathbf{R}^n} (f(x) + \lambda^T g(x)). \end{aligned}$$

Uvažujme znovu Signoriniho úlohu (13). V kapitole (9) jsme si ukázali, jak najít slabé řešení problému (13) pomocí minimalizace energetického funkcionálu. Označme si nyní

$$N \stackrel{\text{ozn}}{=} \{1, \dots, n\}, \quad I \stackrel{\text{ozn}}{=} \{i \in N : z_i \in \Gamma_c\} \quad \text{a} \quad |I| \stackrel{\text{ozn}}{=} m.$$

Podle (34) (viz. také [8]) bude naším úkolem nalezení vektoru $u \in \mathbf{R}^n$, který splňuje

$$Bu \leq C \quad \text{a} \quad J(u) = \min_{v \in \mathbf{R}^n: Bv \leq C} J(v), \quad \text{kde } J(v) = \left(\frac{1}{2} v^T \tilde{S}_h v - \tilde{R}_h^T v \right). \quad (64)$$

Vytvoření matice $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ a vektoru $C \in \mathbf{R}^m$ je popsáno v kapitole (9), viz. vztahy (32) a (33). Definujme dále

$$L(v, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} v^T \tilde{S}_h v - \tilde{R}_h^T v + \lambda^T (Bv - C). \quad (65)$$

Funkce $L(v, \lambda)$ se nazývá Lagrangeova funkce a λ je Lagrangeův multiplikátor. Úloha (64) je tedy ekvivalentní problému o sedlovém bodu:

$$\text{nalezněte } u \in \mathbf{R}^n \text{ a } 0 \leq \bar{\lambda} \in \mathbf{R}^m \text{ takové, aby } L(u, \bar{\lambda}) = \max_{\lambda \in \mathbf{R}^m: \lambda \geq 0} \min_{v \in \mathbf{R}^n} L(v, \lambda).$$

Nejprve tedy budeme minimalizovat Lagrangeovu funkci vůči v . Platí

$$u = \arg \min_{v \in \mathbf{R}^n} L(v, \lambda) \iff \nabla_v L(u, \lambda) = \tilde{S}_h u - \tilde{R}_h + B^T \lambda = 0,$$

tedy

$$u = \tilde{S}_h^{-1} (\tilde{R}_h - B^T \lambda). \quad (66)$$

Dosazením (66) za v do předpisu (65) vypočteme, že

$$L(\tilde{S}_h^{-1} (\tilde{R}_h - B^T \lambda), \lambda) = \underbrace{-\frac{1}{2} \lambda^T B \tilde{S}_h^{-1} B^T \lambda + \lambda^T (B \tilde{S}_h^{-1} \tilde{R}_h - C)}_{\stackrel{\text{ozn}}{=} -\Theta(\lambda)} - \frac{1}{2} \tilde{R}_h^T \tilde{S}_h^{-1} \tilde{R}_h.$$

Poslední člen na pravé straně představuje konstantu, proto jej v maximalizaci vůči λ nemusíme uvažovat. Protože dále maximalizovat funkci znamená minimalizovat tuto funkci násobenou mínus

jedničkou, má naše úloha nyní tvar:

$$\underline{\text{naleznete } 0 \leq \bar{\lambda} \in \mathbf{R}^m \text{ takové, že } \Theta(\bar{\lambda}) = \min_{\lambda \in \mathbf{R}^m: \lambda \geq 0} \Theta(\lambda).} \quad (67)$$

Tuto úlohu nazveme duální úlohou k (64). Řešení $\bar{\lambda}$ této úlohy pak dosadíme do vztahu (66) a získáme tak řešení původního problému (64). Protože vždy $m \leq n$, lze pomocí přechodu k duální úloze obvykle velmi významně snížit dimenzi daného problému. Algoritmu, kterým můžeme řešit úlohu (67), věnujeme další kapitolu.

19 Algoritmus pro řešení duální úlohy.

Uvažujme duální úlohu k problému (64) danou formulací (67). Označme

$$K \stackrel{\text{ozn}}{=} B\tilde{S}_h^{-1}B^T \quad \text{a} \quad f \stackrel{\text{ozn}}{=} B\tilde{S}_h^{-1}\tilde{R}_h - C.$$

Gradient minimalizované funkce Θ v bodě λ bude mít tvar:

$$g(\lambda) = K\lambda - f.$$

Označíme si

- $M \stackrel{\text{ozn}}{=} \{1, \dots, m\}$,
- $A(\lambda) \stackrel{\text{ozn}}{=} \{i \in M : \lambda_i = 0\}$, $A(\lambda)$ nazveme aktivní množinou v λ ,
- $F(\lambda) \stackrel{\text{ozn}}{=} \{i \in M : \lambda_i > 0\}$, $F(\lambda)$ nazveme volnou množinou v λ .

Vektor $\bar{\lambda} \geq 0$ je jednoznačným řešením úlohy (67) právě tehdy, když splňuje tzv. podmínky optimality:

$$\forall i \in M : \quad \bar{\lambda}_i > 0 \Rightarrow g_i(\bar{\lambda}) = 0 \quad \text{a} \quad \bar{\lambda}_i = 0 \Rightarrow g_i(\bar{\lambda}) \geq 0. \quad (68)$$

Definujme také $\varphi(\lambda)$, $\beta(\lambda) \in \mathbf{R}^m$ předpisy

$$\varphi_i(\lambda) = \begin{cases} g_i(\lambda) & i \in F(\lambda), \\ 0 & i \in A(\lambda) \end{cases} \quad \text{a} \quad \beta_i(\lambda) = \begin{cases} 0 & i \in F(\lambda), \\ g_i^-(\lambda) & i \in A(\lambda), \end{cases}$$

kde $g_i^-(\lambda) = \min\{g_i(\lambda), 0\}$. Projektovaným gradientem v λ pak nazveme vektor

$$\nu(\lambda) = \varphi(\lambda) + \beta(\lambda),$$

vektoru $\varphi(\lambda)$ říkáme volný gradient v λ a $\beta(\lambda)$ nazýváme oříznutým gradientem v λ . Podmínky optimality (68) jsou v $\bar{\lambda}$ splněny právě tehdy, když pro projektovaný gradient v $\bar{\lambda}$ platí

$$\nu(\bar{\lambda}) = 0.$$

Vektor $\lambda \in \mathbf{R}^m$ nazveme přípustným, pokud $\lambda_i \geq 0$ pro každé $i \in M$. Projekci P do množiny přípustných vektorů definujeme pro libovolný vektor $\lambda \in \mathbf{R}^m$ předpisem

$$P_i(\lambda) = \max\{\lambda_i, 0\}, \quad i \in M.$$

Popíšeme si teď algoritmus pro řešení úlohy (67), který využívá proporcionalizaci a projekce. Expanzní krok je definován rovností

$$\lambda^{k+1} = P(\lambda^k - \bar{\alpha}\varphi(\lambda^k))$$

s konstantní délkou $\bar{\alpha} \in (0, \|K\|^{-1}]$. Tento předpis mění iteraci λ^k pouze v indexech aktuální volné množiny, aktivní množina se po provedení kroku může zvětšit. Projekci P si dále můžeme vyjádřit pomocí tzv. redukovaného volného gradientu $\tilde{\varphi}$, který je definován na množině přípustných vektorů λ jako

$$\tilde{\varphi}_i(\lambda) = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\bar{\alpha}}, \varphi_i(\lambda) \right\}, \quad i \in M.$$

Pak za předpokladu, že λ^k je přípustný, platí

$$P(\lambda^k - \bar{\alpha}\varphi(\lambda^k)) = \lambda^k - \bar{\alpha}\tilde{\varphi}(\lambda^k).$$

Definujme si nyní konstantu proporcionalizace $\Gamma > 0$, kterou budeme používat v testovací nerovnosti

$$\|\beta(\lambda^k)\|^2 \leq \Gamma^2 \tilde{\varphi}(\lambda^k)^T \varphi(\lambda^k).$$

Bude-li nerovnost splněna, řekneme, že iterace λ^k je ryze proporcionalní, a provedeme krok sdružených gradientů (viz. dále) s případnou projekcí. V opačném případě provedeme proporcionalizační krok.

Proporcionalizační krok je definován rovností

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \alpha_{cg}\beta(\lambda^k),$$

kde

$$\alpha_{cg} = \frac{\beta(\lambda^k)^T g(\lambda^k)}{\beta(\lambda^k)^T K \beta(\lambda^k)}.$$

Aktuální aktivní množina indexů se po provedení proporcionalizačního kroku zmenší. Krok sdružených gradientů definujeme předpisem

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \alpha_{cg}p^k, \tag{69}$$

kde α_{cg} je nyní dáno jako

$$\alpha_{cg} = \frac{(p^k)^T g(\lambda^k)}{(p^k)^T K p^k}$$

a směr p^k je počítán následujícím způsobem: pokud byla iterace λ^k vypočtena pomocí expanzního nebo proporcionalizačního kroku nebo pokud $k = 0$, potom $p^k = \varphi(\lambda^k)$, jinak je p^k dáno vztahy

$$p^k = \varphi(\lambda^k) - \gamma p^{k-1}, \quad \gamma = \frac{\varphi(\lambda^k)^T K p^{k-1}}{(p^{k-1})^T K p^{k-1}}.$$

Předpis (69) mění iteraci λ^k opět pouze v indexech aktuální volné množiny.

Základní schéma algoritmu tedy vypadá takto:

1. vstup: λ^0 je počáteční přípustný vektor, $\bar{\alpha} \in \left(0, \|K\|^{-1}\right]$, $\Gamma > 0$, $\varepsilon > 0$
 $k = 0$

2. cyklus: dokud $\|\nu(\lambda^k)\| \geq \varepsilon$, prováděj

je-li λ^k ryze proporcionální, potom

- λ^{k+1} vypočti pomocí kroku sdružených gradientů,
- test na přípustnost: pokud existuje $i \in M$ takové, že $\lambda_i^{k+1} < 0$, pak přepočti λ^{k+1} pomocí expanzního kroku,

jinak

- λ^{k+1} vypočti pomocí proporcionalizačního kroku,

$k = k + 1$

3. výstup: λ^k je přípustný vektor řešení.

Příslušné konvergenční vlastnosti algoritmu jsou pak uvedeny v [3].

20 Modelová úloha a numerické experimenty.

Uvažujme nyní modelovou Signoriniho úlohu

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = -1 & \text{na } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_u, \\ \frac{du}{dn} = 0 & \text{na } \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 & \text{na } \Gamma_c, \\ \frac{du}{dn} \geq 0 & \text{na } \Gamma_c, \\ \frac{du}{dn}(u - g) = 0 & \text{na } \Gamma_c, \end{array} \right. \quad (70)$$

kde

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,
- $\Gamma_u = \{(x, y) \in \partial\Omega : |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ a } y > 0\}$,
- $\Gamma_c = \{(x, y) \in \partial\Omega : |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ a } y < 0\}$,
- $\Gamma_f = \partial\Omega \setminus \{\Gamma_u \cup \Gamma_c\}$,
- $g : \Gamma_c \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,6$.

Množinu uzlů $\{z_1, \dots, z_n\}$ na hranici a testovací funkce $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ zvolíme dle popisu z kapitoly (10). Dále vypočteme matice V_h, K_h, D_h a M_h příslušné jednotlivým operátorům postupem popsaným v kapitolách (11), (12), (13) a (14) a dle vztahu (22) tak získáme matici \tilde{S}_h . Více se teď věnujme sestavení pravé strany \tilde{R}_h tak, jak je popsáno v kapitole (15). Partikulárním řešením

rovnice $\Delta u = 1$ na Ω je například funkce

$$u(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}, \quad u \in C^\infty(\mathbf{R}^2).$$

Spočítáme si hodnoty tohoto partikulárního řešení v jednotlivých uzlech $z_i = (x_i, y_i)$:

$$u(z_i) = \frac{x_i^2}{4} + \frac{y_i^2}{4} = \frac{\|z_i\|^2}{4} = \frac{1}{4}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (71)$$

Jednotkový vnější normálový vektor k $\partial\Omega$ v uzlu z_i má tvar

$$n_i = (x_i, y_i) = z_i$$

a jednoduše tak spočítáme normálovou derivaci partikulárního řešení v uzlu z_i :

$$\frac{du}{dn}(z_i) = \frac{x_i}{2} \cdot x_i + \frac{y_i}{2} \cdot y_i = \frac{\|z_i\|^2}{2} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (72)$$

Dosažením ze vztahů (71) a (72) do (62) vypočteme vektor N_{0_n} a pak podle (28) i vektor \tilde{R}_h . Jak již bylo poznamenáno v kapitole (10), musíme ještě matici \tilde{S}_h a vektor \tilde{R}_h upravit tak, abychom zadali homogenní Dirichletovu podmínku na části hranice Γ_u . Tuto úpravu provedeme následujícím způsobem: pro každé i takové, že $z_i \in \Gamma_u$, provedeme

- $\tilde{S}_h(i, j) = 0$ pro všechna $j = 1, \dots, n, j \neq i$,
- $\tilde{S}_h(j, i) = 0$ pro všechna $j = 1, \dots, n, j \neq i$,
- $\tilde{S}_h(i, i) = 1$,
- $\tilde{R}_h(i) = 0$.

Matici B a vektor C zadávající omezení na Γ_c sestavíme dle postupu uvedeného v kapitole (9).

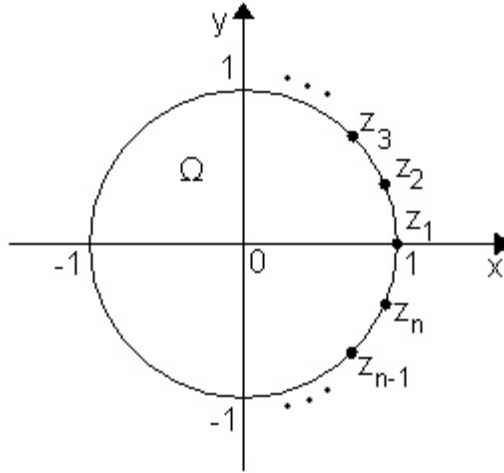
Ukážeme si nyní výsledek implementace BEM se spojitými po částech lineárními prvky pro uvedenou modelovou Signoriniho úlohu. Hranici jsme rozdělili pravidelnou sítí uzlů tak, jak ukazuje obrázek (5). Jednoduché i dvojnásobné integrály při výpočtu jednotlivých matic byly numericky vyčísleny s přesností 10^{-6} . Pro zvolený počet uzlů $n = 8$ jsme získali tuto matici \tilde{S}_h a vektor \tilde{R}_h :

$$\tilde{S}_h = \begin{pmatrix} 0,7905, & -0,1605, & -0,1453, & -0,0636, & -0,0517, & -0,0636, & -0,1453, & -0,1605 \\ -0,1605, & 0,7905, & -0,1605, & -0,1453, & -0,0636, & -0,0517, & -0,0636, & -0,1453 \\ -0,1453, & -0,1605, & 0,7905, & -0,1605, & -0,1453, & -0,0636, & -0,0517, & -0,0636 \\ -0,0636, & -0,1453, & -0,1605, & 0,7905, & -0,1605, & -0,1453, & -0,0636, & -0,0517 \\ -0,0517, & -0,0636, & -0,1453, & -0,1605, & 0,7905, & -0,1605, & -0,1453, & -0,0636 \\ -0,0636, & -0,0517, & -0,0636, & -0,1453, & -0,1605, & 0,7905, & -0,1605, & -0,1453 \\ -0,1453, & -0,0636, & -0,0517, & -0,0636, & -0,1453, & -0,1605, & 0,7905, & -0,1605 \\ -0,1605, & -0,1453, & -0,0636, & -0,0517, & -0,0636, & -0,1453, & -0,1605, & 0,7905 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_h = (-0,3827, -0,3827, -0,3827, -0,3827, -0,3827, -0,3827, -0,3827, -0,3827)^T.$$

Při celkovém počtu osmi uzlů nám na Γ_u padnou uzly z_2, z_3 a z_4 . Upravili jsme proto příslušné

Obrázek 5: Zvolená diskretizace hranice.



řádky a sloupce matice \tilde{S}_h a příslušné prvky vektoru \tilde{R}_h dle postupu uvedeného výše. Na Γ_c padnou uzly z_6 , z_7 a z_8 a matice B a vektor C (viz. předpisy (32), (33)) tak mají tvar:

$$B = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = (1, 3071, 0, 6000, 1, 3071)^T.$$

Pomocí algoritmu popsaného v kapitole (19) jsme pak vypočetli řešení $\bar{\lambda}$ duální úlohy (viz. kapitolu (18)). Implementaci jsme provedli v programovacím jazyce Matlab. Ukončující podmínka výpočtu byla zadána jako

$$\|\nu(\lambda^k)\| < 10^{-5},$$

dále jsme položili $\Gamma = 1$ a $\bar{\alpha} = 0,5 \cdot \|B\tilde{S}_h^{-1}B^T\|^{-1}$. Řešení příslušné duální úlohy jsme získali ve tvaru

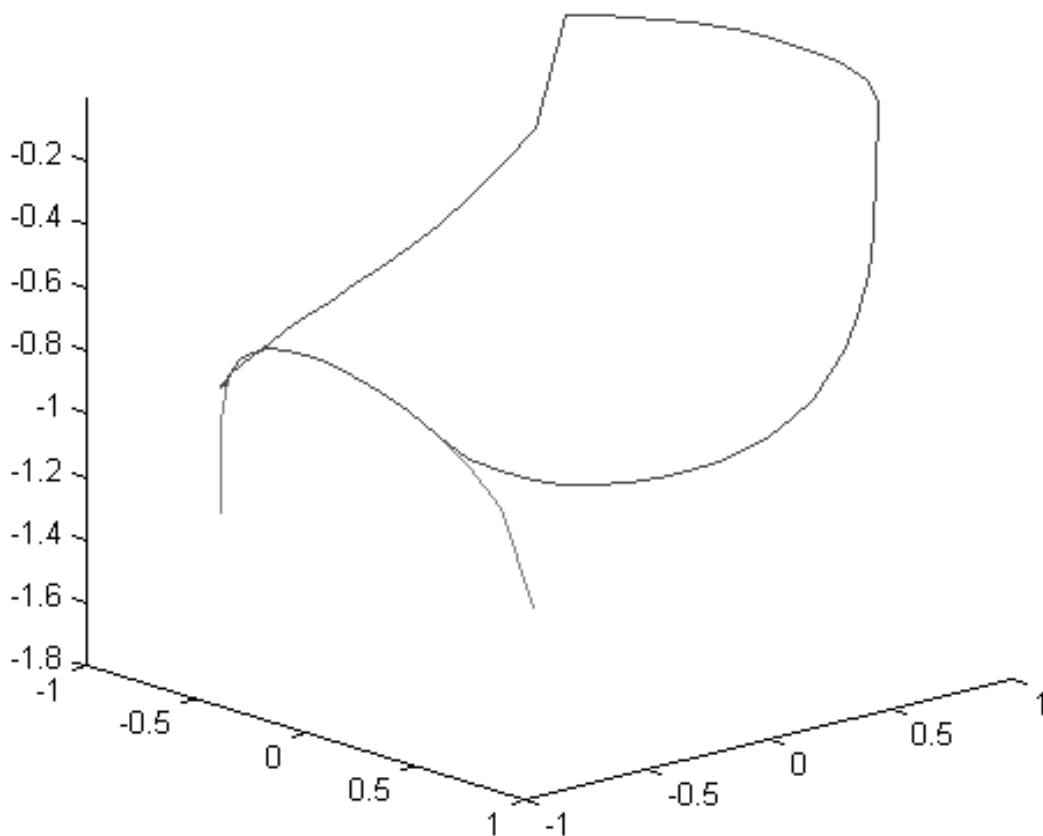
$$\bar{\lambda} = (0, 0, 5338, 0)^T,$$

přičemž algoritmus vyžadoval pouhé 2 iterace sdružených gradientů. Pomocí vztahu (66) jsme pak dopočítali řešení u původního problému v jednotlivých uzlech:

$$u = (-0,9625, 0, 0, 0, -0,9625, -1,0767, -0,6000, -1,0767)^T.$$

Pro volbu $n = 64$ jsme pak získali řešení vykreslené na obrázku (6). Při stejné ukončující podmínce i volbě koeficientů Γ a $\bar{\alpha}$ jsme nyní k výpočtu potřebovali 7 iterací sdružených gradientů.

Obrázek 6: Řešení modelové úlohy pro $n = 64$.



21 Závěr.

V této práci jsme si představili Symmetric Galerkin BEM a ukázali jsme si dobré použití této metody při řešení 2D modelové úlohy mechaniky. Hlavním úkolem bylo porozumění výpočtu jednotlivých singulárních integrálů a příslušná implementace. Jak se nakonec ukázalo, zatímco vyčíslení operátorů jednoduché vrstvy a dvojrstvy nepředstavuje větší problém, lze dále jednoduše obejít nejkomplicovanější výpočet diagonálního prvku matice hypersingulárního operátoru.

Jako témata dalších prací se nabízí samozřejmě řešení 3D kontaktních problémů (například úloh pružnosti [5]) pomocí této metody, přičemž výhodou je, že postup výpočtu matic jednotlivých integrálních operátorů ve 2D je podobný jako ve 3D. Dalším zajímavým přístupem by byla BETI (Boundary Element Tearing and Interconnecting) metoda [8], která spočívá v rozložení dané oblasti a řešení problému na sjednocení hranicí jednotlivých podoblastí pomocí Symmetric Galerkin BEM. Protože jsou vypočtené matice jednotlivých operátorů husté, nabízí se zde také možnost využití tzv. hierarchických matic, pomocí nichž lze mnohem efektivněji provádět operace s hustými maticemi. Za zmínku také jistě stojí semikoercitivní úlohy, které lze diskretizovat pomocí Symmetric Galerkin BEM a následně se stejnými výsledky o konvergenci řešit pomocí uvedeného algoritmu založeného na proporcionalizaci a projekcích [3].

Reference

- [1] J. Bouchala: *Úvod do BEM*, naskenované přednášky, VŠB-TU Ostrava, 2004.
- [2] J. Bouchala: přednášky k předmětu Úvod do funkcionální analýzy a variačních metod, VŠB-TU Ostrava, 2002.
- [3] Z. Dostál, J. Schöberl: *Minimizing Quadratic Functions Subject to Bound Constraints with the Rate of Convergence and Finite Termination*, Computational Optimization and Applications 30 (2005) 23-43.
- [4] Z. Dostál, J. Malík, A. Friedlander, S. A. Santos: *Analysis of semicoercive contact problems using symmetric BEM and augmented Lagrangians*, Engineering Analysis with Boundary Elements 18 (1996) 195-201.
- [5] C. Eck, O. Steinbach, W. L. Wendland: *A symmetric boundary element method for contact problems with friction*, Mathematics and Computers in Simulation 50 (1999) 43-61.
- [6] L. Gaul, M. Kögl, M. Wagner: *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [7] L. J. Gray: *Evaluation of singular and hypersingular Galerkin integrals: direct limits and symbolic computation*, <http://www.csm.ornl.gov/~gray/galerkin.html>, 1998.
- [8] U. Langer, O. Steinbach: *Boundary element tearing and interconnecting methods*, Computing 71 (2003) 205-228, <http://www.sfbo13.uni-linz.ac.at/sfb/reports/2002/ps-files/sfb02-41.ps.gz>, 2002.
- [9] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky II*, Prometheus, Praha, 1995.
- [10] M. Rokyta, O. John, J. Málek, M. Pokorný, J. Stará: *Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic*, <http://adela.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/skripta-pdr/app-2.ps>, MFF UK Praha, 2004.
- [11] O. Steinbach: *Fast evaluation of Newton potentials in boundary element methods*, East-West J. Numer. Math. 7 (1999) 211-222.
- [12] O. Steinbach: *Stability Estimates for Hybrid Coupled Domain Decomposition Methods*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1809, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2003.