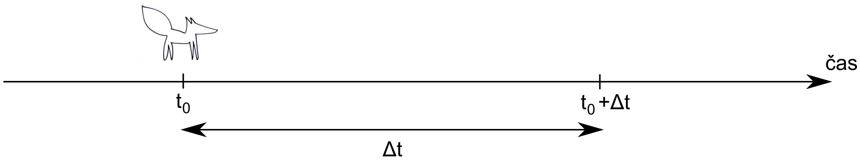
MA 8. cvičení

derivace

Lukáš Pospíšil,2012

1 Motivace

Běží liška k Táboru. A protože je liška mazaná, běží po přímce. Její okamžitou polohu lze popsat funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tato funkce je funkcí času, tedy pro zadaný čas t je poloha lišky jednoznačně určena funkční hodnotou $f(t)$.
Nechť t_0 je nějaký čas. Uvažujme od tohto konkrétního času časový úsek Δt, tedy na konci tohto úseku bude čas $t_0 + \Delta t$.



Poloha lišky v čase t_0 je $f(t_0)$, v čase $t_0 + \Delta t$ je $f(t_0 + \Delta t)$. Tedy dráha, kterou liška urazí během časového úseku Δt je

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

Průměrná rychlost lišky během časového úseku Δt (jelikož dráha je rovná rychlost krát čas) je

$$\tilde{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Očividně - čím menší bude časový úsek Δt, tím přesnější bude i průměrná rychlost lišky v tomto časovém úseku. Pokud chceme určit okamžitou rychlost lišky v čase t_0, budeme postupně zmenšovat časový úsek Δt. Tedy limita, konkrétně

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Derivace dráhy podle času je rychlost? Jo, to je ono

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2 Vzorce

Věta 2.0.1
Platí

- $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$ cons. (derivace konstanty je nula)
- $(x^n)' = n.x^{n-1}, n \in \mathbb{N}$ cons.
- $(x^r)' = r.x^{r-1}, x \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$ cons.
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \;\; x \in (-1, 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \;\; x \in (-1, 1)$
- $(\mathrm{arctg}\; x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\mathrm{arccotg}\; x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Věta 2.0.2
Nechť jsou dány funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f.g)' = f'g + fg'$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $[g(f(x))]' = g'(f(x)).f'(x)$

Poznámka: Čtenář jistě odpustí - nechce se mi psát u funkcí argument, tj. $f(x), g(x)$. Takto se mi to zdá přehlednější. $\approx$

3 Příklady alá kombinace složených funkcí

Příklad 3.0.1
Derivujte

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\cos 2x)' &= -(\sin 2x).2 \\
(2\cos x)' &= -2(\sin x) \\
(2\cos 2x)' &= -2.(\sin x).2 \\
(\cos^2 x)' &= (\cos x.\cos x)' = (-\sin x)\cos x + \cos x(-\sin x) \\
(\cos^2 x)' &= -2(\cos x).\sin x \\
(\cos^2 2x)' &= -2(\cos 2x).\sin 2x.2 \\
(\cos(x^2+3x))' &= (-\sin(x^2+3x)).(2x+3) \\
(\cos(\sin(x^2+3x)))' &= (-\sin(\sin(x^2+3x))).(\cos(x^2+3x)).(2x+3)
\end{aligned}$$

Jo.. a pak ještě upravit do nějaké pěkné podoby. Ale mi se nechce. ∎

4 Další vzorečky

Tentokráte si odvodíme, co budeme dále potřebovat. Tedy tyto vzorce není nutno si pamatovat, ale hodí se.

Příklad 4.0.2
Konstanta krát funkce
Očividně

$$(2x)' = 0.x + 2.1 = 2$$

Zkusme obecněji. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}$ je konstanta.

$$(af(x))' = 0.f(x) + a.f'(x) = a.f'(x)$$

A to nám hodně ulehčí práci. ∎

Příklad 4.0.3

$$(\mathrm{tg}\ x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{cotg}\ x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

∎

Příklad 4.0.4

$$(2^x) = (e^{\ln 2^x})' = (e^{x \ln 2})' = e^{x \ln 2}.(\ln 2) = 2^x \ln 2$$

Můžeme i obecněji. Nechť $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ je konstanta (bacha na ten argument logaritmu). Pak

$$(a^x) = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}.(\ln a) = a^x \ln a$$

■

Příklad 4.0.5
Logaritmus se základem 10

$$(\log x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \frac{1}{\ln 10}\,(\ln x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

Opět obecněji - nechť $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ je konstanta - základ logaritmu. Pak

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\,(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

■

Příklad 4.0.6
Dokonce ani vzorec pro podíl funkcí si nemusíme pamatovat. Očividně

$$\frac{f}{g} = fg^{-1}$$

a to je součin (tentokráte g^{-1} NENÍ myšleno jako inverzní funkce, ale jako $g^{-1} = \frac{1}{g}$). Skutečně

$$(\frac{f}{g})' = (fg^{-1})' = f'g^{-1} + f.(-1).g^{-2}.g' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Ale máte pravdu, možná pamatovat si vzorec je snazší. ■

Příklad 4.0.7
Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $\forall x \in D_f : f(x) > 0$. Pak

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{\ln f(x)^{g(x)}})' = (e^{g(x) \ln f(x)})'$$

a to už je složená funkce, s tím se dá pěkně vyblbnout

$$(e^{g(x) \ln f(x)})' = (e^{g(x) \ln f(x)}).\left(g'(x) \ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)} f'(x)\right) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x).f'(x)}{f(x)}\right)$$

Ale tento vzorec si pamatovat nebudeme. To ne. Vždy *stačí* úprava přes tu exponenciálu a pak jedem na složenou funkci. ■

5 Derivujte

Uvádím několik příkladů bez postupu (ale s výsledkem v *hrubé formě* pro kontrolu)

Příklad 5.0.8

$$\left(3x^4 - 5\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2\right)' = 12x^3 - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

$$\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x - (1+\ln x).1}{x^2}$$

$$\left(\ln \frac{x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\frac{x^2}{1-x^2}}.\frac{2x(1-x^2) - x^2.(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$\left(x^2 \sin(3x-2)\right)' = 2x\sin(3x-2) + x^2\cos(3x-2).3$$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1.(x-1)-(x+1).1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$\left(2^{\sin x^2}\right)' = \left(e^{(\sin x^2)(\ln 2)}\right)' = 2^{\sin x^2}(\ln 2)(\cos x^2)2x$$

$$\left(\ln(\ln^2(\ln^3 x))\right)' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)}2.(\ln(\ln^3 x))\frac{1}{\ln^3 x}3.(\ln^2 x)\frac{1}{x}$$

■

6 Tečna

Definice 6.0.1
Přímku tvaru

$$y = f(c) + f'(c)(x-c)$$

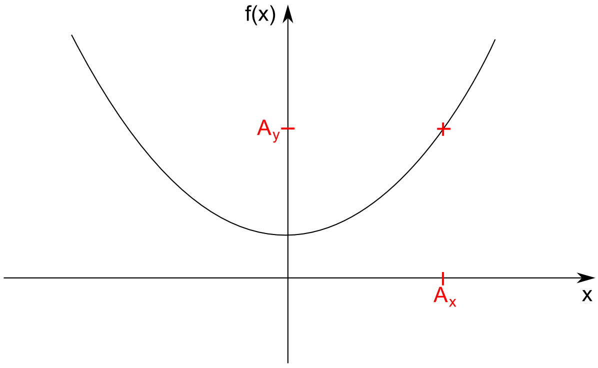
kde $c \in D_f$, nazýváme tečnou grafu funkce f sestrojenou v bodě $[c, f(c)]$.

Příklad 6.0.9
Sestrojte tečnu k funkci

$$f(x) = x^2 + 1$$

v bodě $A = [3, 10]$.

Všimněte si, že $A_x = 3 \overset{\text{ozn}}{=} c$, $A_y = f(c) = 10$. Graf funkce f jistě dokážeme sestrojit, to není problém

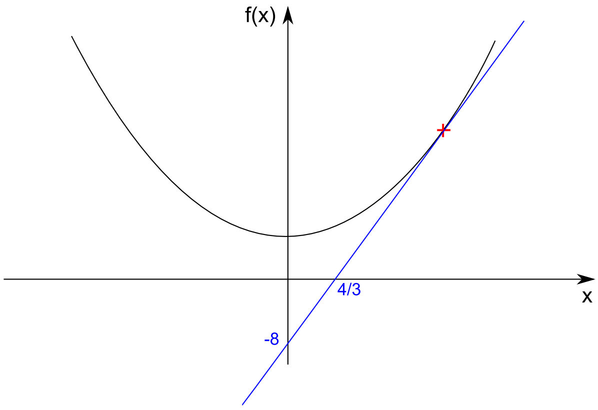


a jistě nebude ani problém s derivací funkce

$$f'(x) = 2x$$

a pak ohledně té tečny - prostě dosadíme do vzorce

$$\begin{aligned} y &= f(c) + f'(c)(x - c) \\ y &= 10 + 6(x - 3) \\ y &= 6x - 8 \end{aligned}$$



■

Poznámka: Nakonec jedna dobrá rada na závěr: Derivujte! Protože jestli jste nederivovali doteď, tak teď je ten pravý čas s tím začít. ≈

7 Reference

[1] *Matematická analýza ve Vesmíru - soubor přednáškových slidů* Bouchala J., 2000 a něco

[2] *Diferenciální počet jedné proměnné* Kuben J., Šarmanová P., ESF, 2007