Vektory a matice - definice a operace

Lukáš Pospíšil

8. dubna 2020

1 Motivace

Příklad 1.0.1
Vypočtěte úhel mezi vektory (odchylku vektorů) u, v pokud

$$u := (3,1), \quad v := (1,2).$$

K řešení použijeme *Kosinovu větu* pro určení uhlů v obecném trojuhelníku z tabulek pro střední školy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c. \cos\varphi$$

nebo prozřetelněji její zobecněnou podobu

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{\|u\|.\|v\|},$$

kde $\|u\| \in \mathbb{R}$ značí *Eukleidovskou normu* vektoru $u \in \mathbb{R}^n$ (jeho velikost), tedy

$$\|u\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

a (u,v) značí *skalární součin*, který je definován

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : (u,v) := \sum_{i=0}^{n} u_i v_i$$

$u_i, i = 1, \dots, n$ značí jednotlivé složky vektoru $u \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Pak jednoduše dosazením

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{\|u\|.\|v\|} = \frac{3.1 + 1.2}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

■

Příklad 1.0.2
Mějme opačnou úlohu - určete souřadnice bodu $b \in \mathbb{R}^2$, který vznikne rotací bodu $a \in \mathbb{R}^2$ kolem středu souřadnicového systému ve směru hodinových ručiček o uhel $\varphi \in \mathbb{R}$, pokud

$$a := (1,2)^T, \varphi := \frac{\pi}{4}$$

K výpočtu použijeme *matici rotace* () ve tvaru

$$R_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

a výsledný bod vypočteme tak, že násobíme vektor a maticí $R_{\frac{\pi}{4}}$ zleva:

$$b = R_{\frac{\pi}{4}} a = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}.1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}.1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3.\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

■

2 Pojem aritmetický vektor

Definice 1
n-rozměrný *aritmetický vektor* $v \in \mathbb{R}^n$ je uspořádaná n-tice reálných čísel, jejíž prvky se nazývají *složky.*

Příklad 2.0.1
Vektor

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

je dvourozměrný sloupcový vektor. ■

Příklad 2.0.2
Vektor

$$u = (3, -2, 0, 1, 0)$$

je pětirozměrný řádkový vektor. Pokud budeme chtít přistupovat k jednotlivým prvkům tohoto vektoru, použijeme dolní index, tedy například

$$u_1 = 3,\ u_4 = 1,\ u_3 = u_5 = 0\ .$$

■

Věta 2.0.1
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nad prostorem $\mathbb{R}^n$ definujme:

- *rovnost* - dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ jsou si *rovny* právě když

  $$u = v \quad \Leftrightarrow \quad u_i = v_i, \forall i = 1, \ldots, n$$

  (tedy pokud jsou si rovny všechny odpovídající složky)

- *součet*

  $$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : u + v =: w, \qquad w_i = u_i + v_i, w \in \mathbb{R}^n$$

  (tedy sečteme postupně odpovídající složky)

- *násobení skalárem*

  $$\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall u \in \mathbb{R}^n : \alpha.u =: w, \qquad w_i = \alpha.u_i, w \in \mathbb{R}^n$$

  (tedy násobíme postupně jednotlivé složky)

- *skalární součin*
$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : (u, v) := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R}^n$$
(tedy sečteme součiny odpovídajících složek)

- *nulový vektor*
$$o \in \mathbb{R}^n : o := [0, \ldots, 0], \quad \forall i = 1, \ldots, n : o_i = 0$$
(jedná se o nulový prvek daného vektorového prostoru, tedy neutrální prvek vzhledem k operaci sčítání vektorů $\forall v \in \mathbb{R}^n : v + o = o + v = v$; občas se používá zmatečné značení 0 i pro nulový vektor, nicméně z kontextu je obvykle jasné, zda se jedná o skalár či vektor vhodného rozměru)

- *opačný vektor* k vektoru $a \in \mathbb{R}^n$
$$-a \in \mathbb{R}^n : (-a) := (-1).a \quad \forall i = 1, \ldots, n : (-a)_i = (-1).a_i$$
(součtem vektoru a jemu opačného vektoru získáme nulový prvek, tj. $\forall v \in \mathbb{R}^n : v + (-v) = (-v) + v = o$)

Příklad 2.0.3
Nechť
$$u := (3, 4, -1), \quad v := (-1, 0, 2), \quad \alpha := 2$$
Pak
$$\begin{aligned}
u + v &= (3, 4, -1) + (-1, 0, 2) = (3 - 1, 4 + 0, -1 + 2) = (2, 4, 1) \\
u - v &= u + (-v) = (3, 4, -1) + (1, 0, -2) = (3 + 1, 4 + 0, -1 - 2) = (4, 4, -3) \\
\alpha v &= 2.(-1, 0, 2) = (2.(-1), 2.0, 2.2) = (-2, 0, 4) \\
(u, v) &= ((3, 4, -1), (-1, 0, 2)) = 3.(-1) + 4.0 + (-1).2 = -5 \\
(u, o) &= ((3, 4, -1), (0, 0, 0)) = 0 \\
u + (-u) &= o
\end{aligned}$$

■

Věta 2.0.2
Vlastnosti operací s vektory

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n :$
$$\begin{aligned}
u + (v + w) &= (u + v) + w \\
u + v &= v + u \\
\alpha(u + v) &= \alpha u + \alpha v \\
(\alpha + \beta)u &= \alpha u + \beta u \\
\alpha(\beta u) &= (\alpha\beta)u \\
1u &= u
\end{aligned}$$

Důkaz: po složkách využijeme vlastnosti reálných čísel. Například dokázat, že sčítání vektorů je komutativní (tj. že $u + v = v + u$) je snadné, podíváme-li se na jednotlivé složky levé strany (ano, levá strana je vektor - výsledkem sčítání dvou vektorů je vektor)
$$L_i := (u + v)_i = u_i + v_i \tag{1}$$
a pravé strany (vektor stejné dimenze jako levá strana)
$$P_i := (v + u)_i = v_i + u_i \tag{2}$$

a využijeme komutativní vlastnosti sčítání reálných čísel (tj. víme, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha + \beta = \beta + \alpha$) - nyní lze tedy sčítance v (1) nebo (2) zaměnit

$$L_i = (u + v)_i = u_i + v_i = v_i + u_i = P_i.$$

Očividně tato rovnost platí pro všechny složky levé a pravé strany (pro libovolné $i = 1, \ldots, n$) a tedy dle definice rovnosti vektorů (dva vektory jsou si rovny právě když se rovnají všechny odpovídající složky) platí, že levá strana se rovná pravé. Tedy že skutečně $u + v = v + u$ pro libovolné $u, v \in \mathbb{R}^n$. □

3 Matice

Definice 2
Matice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ je obdélníková *tabulka*[1]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde

- $m \in \mathbb{N}$ je počet řádků
- $n \in \mathbb{N}$ je počet sloupců
- a_{ij} je prvek na i-tém řádku a j-tém sloupci

Příklad 3.0.1
Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je obdélníková matice typu 3 krát 4. A například lze přistopit k prvkům

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = -1,\ a_{32} = -1,\ a_{34} = 3.$$

■

Příklad 3.0.2
Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice řádu 3. ■

Věta 3.0.1
Nechť $n, m \in \mathbb{N}$. Nad prostorem $\mathbb{R}^{m,n}$ (prostor matic s reálnými prvky, m řádky a n sloupci) definujme:

[1] matici lze chápat také jako vektor vektorů (řádkový vektor sloucových vektorů nebo sloucový vektor řádkových vektorů)

- *rovnost* - dvě matice $A, B \in \mathbb{R}^{n,m}$ jsou si rovny, pokud

  $$A = B \;\Leftrightarrow\; A_{ij} = B_{ij}, \forall i = 1, \ldots, n \forall j = 1, \ldots, m$$

  (tedy pokud jsou si rovny všechny odpovídající složky; mimochodem matice musí být stejného rozměru, jinak si nemůžou být rovny)

- *součet*

  $$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,m} : A + B \overset{\text{ozn}}{=} C, C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}, C \in \mathbb{R}^{n,m}$$

  (tedy sečteme odpovídající složky; opět - sčítat lze pouze matice stejných rozměrů)

- *násobení skalárem*

  $$\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall A \in \mathbb{R}^{n,m} : \alpha.A \overset{\text{ozn}}{=} C, C_{ij} = \alpha.A_{ij}, C \in \mathbb{R}^{n,m}$$

  (tedy násobíme skalárem jednotlivé složky; výsledná matice má stejný rozměr jako ta původní)

- *nulová matice*

  $$O \in \mathbb{R}^{n,m} : \forall i = 1, \ldots, n \forall j = 1, \ldots, m : O_{ij} = 0$$

  (prostě matice plná nul)

- *jednotková matice* - matice $I \in \mathbb{R}^{n,n}$

  $$\forall i = 1, \ldots, n : I_{ij} = \begin{cases} 0, \text{pro} & i \neq j \\ 1, \text{pro} & i = j \end{cases}$$

  (prostě matice plná nul s jedničkami na diagonále; tato matice je vždy čtvercová, občas se značí jako E; pozn. I = identity matrix (angličtina), E = Einheitsmatrix (němčina))

Příklad 3.0.3
Nechť

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha := 2$$

Pak

$$A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+3 \\ 0-2 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = 2. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

■

Věta 3.0.2
Vlastnosti operací s maticemi

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n,m}$:

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A + B &= B + A \\ \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B \\ (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A \\ \alpha(\beta A) &= (\alpha\beta)A \\ 1A &= A \end{aligned}$$

Důkaz: po složkách využijeme vlastnosti reálných čísel □

Definice 3
K dané matici $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ definujme transponovanou matici $A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ předpisem

$$A_{ij} = A^T_{ji}.$$

Příklad 3.0.4
Pro matici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je transponovaná matice

$$A^T := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

■

Věta 3.0.3
Platí

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$\alpha(A)^T = (\alpha A)^T$$

4 Násobení matic a vektorů

Definice 4
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ a $v \in \mathbb{R}^n$ a označme jednotlivé řádky matice A

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix},$$

kde $r_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, m$ je i-tý řádek matice A. Pak součin Av definujeme předpisem

$$Av := \begin{pmatrix} (r_1, v) \\ \vdots \\ (r_n, v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

kde (r_i, v) je skalární součin i-tého řádku matice A a daného vektoru v.

Příklad 4.0.1
Nechť

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pak

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.2 + (-1).3 \\ (-2).1 + 3.2 + 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

■

Prosím, povšimněte si zejména nutnosti sedících rozměrů - vektor v má (musí mít) rozměr stejný jako počet sloupců matice A. Výsledný vektor operace má rozměr roven počtů řádků matice A.

Věta 4.0.1
Pro $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}, u, v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{array}{rcl} A(\alpha u) & = & \alpha(Au) = (\alpha A)u \\ A(u+v) & = & Au + Av \\ (A+B)u & = & Au + Bu \end{array}$$

Důkaz: je velice pěkným cvičením. Opět je nutno porovnávat jednotlivé složky, akorát nyní se do hry zapojí i distributivní zákon sčítání a násobení reálných čísel. Také je nutno do hry zapojit již dokázené vlastnosti sčítání matic a vektorů. Například poslední tvrzení (tj. $(A+B)u = Au + Bu$) lze dokázat takto (pro libovolné $i = 1, \ldots, m$):

$$\begin{array}{rcl} L_i & = & (\ (A+B)u\ )_i = \sum_{j=1}^{n} (A+B)_{i,j} u_j = \sum_{j=1}^{n} (A_{i,j} + B_{i,j}) u_j = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} u_j + \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} u_j \\ P_i & = & (\ Au + Bu\ )_i = (Au)_i + (Bu)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} u_j + \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} u_j \end{array}$$

Je vidět, že maticový a vektorový kalkul nespadl z nebe a je zcela korekně vybudován. □

5 Násobení matic

Definice 5
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m,p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p,n}$. Pak označme jednotlivé řádky matice A

$$A = \begin{pmatrix} r_1^A \\ \vdots \\ r_m^A \end{pmatrix}$$

a jednotlivé sloupce matice B

$$B = \begin{pmatrix} s_1^B, \ldots, s_n^B \end{pmatrix}$$

Pak součin $AB \in \mathbb{R}^{m,n}$ lze definovat předpisem

$$[AB]_{ij} := (r_i^A, s_j^B), i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

(tj. jednotlivé složky jsou definovány jako skalární součiny řádků levé matice a sloupců pravé matice).

Příklad 5.0.1
Nechť

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 1.2 + 0.(-1) + (-1).0 & 1.3 + 0.1 + (-1).(-2) & 1.0 + 0.5 + (-1).1 \\ (-2).2 + 3.(-1) + 0.0 & (-2).3 + 3.1 + 0.(-2) & (-2).0 + 3.5 + 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -7 & -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že násobit BA nelze. ■

Věta 5.0.1
Pro $A, B, C \in \mathbb{R}^{n,m}, \alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{array}{rcc} A(\alpha B) & = & \alpha(AB) = (\alpha A)B \\ A(B+C) & = & AB + AC \\ (A+B)C & = & AC + BC \end{array}$$

Věta 5.0.2
Násobení matic není komutativní, tj. obecně NEPLATÍ

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^n : AB = BA$$

Důkaz: Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Věta 5.0.3
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m,p}, B \in \mathbb{R}^{p,n}$. Platí

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} [(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = r_j^A s_i^B = ([a_{j1}, \dots, a_{jp}], [b_{1i}, \dots, b_{pi}]) = \\ = a_{j1}b_{1i} + \dots + a_{jp}b_{pi} = b_{1i}a_{j1} + \dots + b_{pi}a_{jp} = \\ = (s_i^B)^T (r_j^A)^T = [B^T A^T]_{ij} \end{aligned}$$

$\square$

6 Permutační matice

Příklad 6.0.1
Nechť

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Určete permutační matici P tak aby platilo

$$PA = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Řešení - jedná se o výměnu prvního a druhého řadku. Pokud tuto výměnu provedeme na jednotkové matici

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

získáme požadovanou permutační matici, protože

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

■

7 Vlastnosti k zamyšlení

Násobení matice krát vektor Av lze ekvivalentně definovat jako *lineární kombinaci* sloupců matice A s koeficienty složek vektoru v, tj. (nechť $A \in \mathbb{R}^{m,n}, v \in \mathbb{R}^n$)

$$Av = v_1 s_1^A + v_2 s_2^A + \cdots + v_n s_n^A = \sum_{j=1}^{n} v_j s_j^A.$$

Násobení matice krát matice AB lze definovat tak, že sloupec výsledné matice je roven násobení levé matice A a odpovídajícího sloupce pravé matice B, tj. (nechť $A \in \mathbb{R}^{m,p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p,n}$)

$$AB = (As_1^B, \ldots, As_n^B), \quad \text{čili} \quad s_j^{AB} = As_j^B, j = 1, \ldots, n.$$