Řešení soustav lineárních rovnic

Lukáš Pospíšil

15. dubna 2020

1 Motivace

Příklad 1.0.1
Jeníček a Mařenka mají spolu 2 jablíčka. Kdyby měl Jeníček dvakrát víc jablíček než má, měl by o jedno jablíčko víc než Mařenka. Kolik jablíček má Jeníček a kolik Mařenka?

Označme

j - počet jablíček, které má Jeníček

m - počet jablíček, které má Mařenka

Sestavme rovnice dle zadání:

$$\begin{array}{rcl} j+m &=& 2 \\ 2j &=& m+1 \\ \hline \end{array}$$

Možnosti řešení, které známe ze střední školy:

1. *Dosazovací metoda*
   Z druhé rovnice vyjádřeme
   $$m = 2j - 1 \tag{1}$$
   a dosaďme do první rovnice
   $$j + (2j-1) = 2 \quad \Rightarrow \quad j = 1$$
   a řešení zpět dosaďme do rovnice (1):
   $$m = 2j - 1 = 1$$
   Jeníček i Mařenka mají každý jedno jablíčko.

2. *Sčítací metoda*
   Přepišme soustavu do základního tvaru, ve kterém jsou odpovídající proměnné pod sebou:
   $$\begin{array}{rcl} j+m &=& 2 \\ 2j-m &=& 1 \\ \hline \end{array}$$
   Násobme první rovnici číslem (-2), tím nezměníme řešení, tj. rovnice budou ekvivalentní (pokud dvojice $[j,m]$ vyhovuje původní rovnici, bude vyhovovat i rovnici přenásobené)
   $$\begin{array}{rcl} -2j-2m &=& -4 \\ 2j-m &=& 1 \\ \hline \end{array}$$
   a rovnice sečteme. Získáme rovnici
   $$-3m \;=\; -3$$

z čehož plyne

$$m = 1$$

a dosadíme do původní první rovnice

$$j + m = 2 \quad \Rightarrow \quad j + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad j = 1$$

Pozorný čtenář si jistě všiml, že ve sčítací metodě jde pouze o manipulaci s koeficienty u jednotlivých proměnných.
Zjednodušme si zápis původní soustavy vhodným zapsáním koeficientů do tabulky:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Levou část tohto zápisu nazýváme *matice soustavy*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a pravou stranu zápisu nazýváme *vektor pravých stran*

$$b := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pak pokud označíme *vektor proměnných*

$$x := \begin{bmatrix} j \\ m \end{bmatrix}$$

tak rovnice

$$Ax = b \tag{2}$$

odpovídá původní soustavě.
Důkaz: Rozepišme levou stranu rovnice (2)

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j + m \\ 2j - m \end{bmatrix}$$

Jedná se o vektor levé strany, který je podle rovnice (2) roven vektoru pravé strany. Dva vektory jsou si rovny právě když jsou si rovny všechny odpovídající složky vektorů.

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} j + m & = & 2 \\ 2j - m & = & 1 \end{array}$$

□

Zapišme tedy zjednodušeným zápisem postup sčítací metody (vedle řádku je napsána operace s řádky, která bude v následujícím kroku zapsána do daného řádku):

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2)r_1 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ r_1 + r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{1}{2}r_1 \\ -\frac{1}{3}r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow j + m = 2 \Rightarrow j + 1 = 2 \Rightarrow j = 1 \\ \Rightarrow m = 1 \end{array}$$

Této metodě se říká *Gaussova eliminační metoda.* ■

Příklad 1.0.2
Určete průsečík přímek p, q pokud přímky jsou definovány ve směrnicovém tvaru

$$\begin{array}{rcl} p: \quad y & = & x+1 \\ q: \quad y & = & -2x+3 \end{array}$$

Hledáme tedy $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ které splňuje součastně předpisy obou přímek.
Tedy řešíme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{array}{rcl} x-y & = & -1 \\ 2x+y & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right] (-2)r_1 \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right] r_1 + r_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x - \frac{5}{3} = -1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow y = \frac{5}{3} \end{array}$$

Průsečíkem je tedy bod $[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}]$. ∎

2 Gaussova eliminační metoda

Budeme řešit soustavu

$$Ax = b$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Gaussovou eliminační metodou rozumíme postup, při kterém matici A postupně upravíme na schodový tvar použitím tzv. elementárních řádkových úprav. Součastně upravujeme i vektor pravých stran b. Následně provedeme zpětnou substituci.
Tedy

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \sim \ \ldots \ \sim \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{b} \end{array}\right]$$

kde $\tilde{A}$ je matice ve schodovém tvaru.
Řešení soustavy $Ax = b$ je ekvivalentní s řešením soustavy $\tilde{A}x = \tilde{b}$.

2.1 Elementární řádkové úpravy

1. výměna řádků
2. násobení řádku skalárem
3. sčítání dvou řádků

2.2 Schodový tvar

Zjednodušeně řečeno je matice ve schodovém tvaru

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \ldots & & & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & & \ldots & & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{mi} & a_{m,i+1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

kde prvky na diagonále jsou nenulové.

2.3 Zpětná substituce

Provádíme dosazovací metodu od poslední rovnice k první. Postupně dosazujeme hodnoty již známých proměnných do rovnic s jednou novou neznámou.

3 "Pěkné"příklady

Příklad 3.0.1

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Postup řešení:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2r_1 \\ (-1)r_2 \\ (-1)r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 \\ r_1 + r_2 \\ r_1 + r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ (-2)r_2 \\ r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ (-1)r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Poslední, tedy třetí rovnice nám jasně říká, že

$$x_3 = 3$$

což lze dosadit do druhé rovnice

$$x_2 + x_3 = 2 \;\Rightarrow\; x_2 + 3 = 2 \;\Rightarrow x_2 = -1$$

a nakonec vypočtená řešení dosadíme do rovnice první

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 - 1 + 3 = 1 \;\Rightarrow x_1 = -1$$

Řešení

$$x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 3$$

■

Příklad 3.0.2

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \end{array}$$

Postup řešení

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2 \\ r_3 \\ r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ 2r_1 - r_2 \\ r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ (-1)r_2 \\ r_2 + 3r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} x_3 = 1 & & \\ 3x_2 + 2 = 5 & \Rightarrow & x_2 = 1 \\ x_1 - 1 - 1 = -1 & \Rightarrow & x_1 = 1 \end{array}$$

Řešení

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$$

■

Příklad 3.0.3

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Postup řešení

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ 2r_1 - r_2 \\ r_1 + r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ (-1)r_2 \\ r_2 - 3r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} x_3 = 0 & & \\ 3x_2 - 5.0 = -3 & \Rightarrow & x_2 = -1 \\ x_1 - (-1) + 2.0 = 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 \end{array}$$

Řešení

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$$

■

4 Parametrické řešení

Příklad 4.0.1

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Pokud bychom však znali hodnotu jedné proměnné, druhou bychom z dané rovnice odvodili.
Označme řešení

$$x_1 = t, t \in \mathbb{R}$$

Tedy nechť x_1 je libovolné reálné číslo $t \in \mathbb{R}$.
Pak dle zadané rovnice po dosazení

$$t + x_2 = 2$$

tedy po úpravě

$$x_2 = 2 - t$$

Všechna řešení lze tedy popsat

$$x_1 = t, x_2 = 2 - t, t \in \mathbb{R}$$

■

Příklad 4.0.2

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & = & -2 \end{array}$$

Postup řešení

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_1 + r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} 0.x_2 = 0 & \Rightarrow & x_2 = t, t \in \mathbb{R} \\ x_1 + t = 2 & \Rightarrow & x_1 = 2 - t \end{array}$$

Řešení

$$x_1 = 2 - t, x_2 = t, t \in \mathbb{R}$$

■

Příklad 4.0.3

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ 2r_1 - r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} 0.x_2 + 0.x_3 = 0 & \Rightarrow & x_3 = t_1, x_2 = t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 + t_2 + t_1 = 3 & \Rightarrow & x_1 = 3 - t_1 - t_2 \end{array}$$

Řešení

$$x_1 = 3 - t_1 - t_2, x_2 = t_2, x_3 = t_1, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

■

Příklad 4.0.4

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Postup řešení

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ (-1)r_2 \\ r_2 + r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} 0.x_3 = 0 & \Rightarrow & x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ x_2 + 2t = 0 & \Rightarrow & x_2 = -2t \\ x_1 + (-2t) + t = 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 + t \end{array}$$

Řešení

$$x_1 = 1 + t, x_2 = -2t, x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

■

5 Soustavy nemající řešení

Příklad 5.0.1

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Postup řešení

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_1 - 2r_2 \\ 2r_1 - r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ (-1)r_2 \\ r_2 + r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$0.x_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{nemá řešení}$$

nemá řešení ■

6 Soustavy s nulovou pravou stranou

Soustavy s nulovou pravou stranou mají vždy alespoň jedno řešení - nulové.

Příklad 6.0.1

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Postup řešení (pro stručnost nepišme nulovou pravou stranu - elementární řádkové úpravy nemají vlyv)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_1 - r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ (-1)r_2 \\ r_2 - r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} 0.x_3 = 0 & \Rightarrow & x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ x_2 - 2t = 0 & \Rightarrow & x_2 = 2t \\ x_1 + 2t + 0 = 0 & \Rightarrow & x_1 = -2t \end{array}$$

Řešení

$$x_1 = -2t, x_2 = 2t, x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

■