Inverzní matice

Lukáš Pospíšil

15. dubna 2020

1 Motivace

Příklad 1.0.1
Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$ax = b$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, $a \neq 0$.

Řešením je (samozřejmě)

$$x = \frac{b}{a}$$

nebo-li

$$x = ba^{-1} = a^{-1}b$$

■

Příklad 1.0.2
Nalezněte $x \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = b \tag{1}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n,n}, b \in \mathbb{R}^n$ jsou konstanty.

Řešení lze nalézt pomocí Gaussovy eliminační metody, nicméně našim cílem nechť je něco podobného jako v předchozím případě.

$$x = \frac{b}{A} \tag{2}$$

což samozřejmě je nesmysl, dělení maticí není definováno (ani dělení vektorů či dělení matic). Definujme však pojem *inverzí matice* - inverzní prvek prostoru $\mathbb{R}^{n,n}$ vzhledem k operaci násobení, tj. A^{-1}, pro který platí

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{3}$$

Tedy matematicky korektnější zápis rovnice (2) získáme, pokud obě strany rovnice (1) přenásobíme inverzní maticí A^{-1} zleva (není jedno, z které strany rovnici přenásobíme - násobní matic NENÍ komutativní)

$$\begin{array}{rcll} Ax & = & b & /A^{-1}. \\ A^{-1}Ax & = & A^{-1}b & \\ Ix & = & A^{-1}b & \\ x & = & A^{-1}b & \end{array}$$

Jak ale získat inverzní matici? A existuje inverzní matice ke všem maticím? ■

2 Gaussova-Jordanova eliminační metoda

Gaussova-Jordanova eliminační metoda je metoda, při které pomocí elementárních řádkových úprav upravíme původní rozšířenou matici na matici, ve které místo původní matice bude jednotková (nikoliv pouze na schodový tvar jako u Gaussovy eliminační metody).

$$[A|b] \ \ldots \ [I|x]$$

Vraťme se k "pěknému"příkladu z minulého cvičení

Příklad 2.0.1

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Gaussova eliminační metoda

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ 2r_1 - r_2 \\ r_1 + r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ (-1)r_2 \\ r_2 - 3r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

A nyní pokračujme - pokusme se upravit matici ve schodovém tvaru na "schodový tvar i zhora":

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_3 - r_1 \\ 5r_3 + 2r_2 \\ r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2 - 6r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{6}r_1 \\ \frac{1}{6}r_2 \\ \frac{1}{2}r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Řešení

$$[x_1, x_2, x_3] = [1, -1, 0]$$

■

Poznámka: Pokud u Gaussovy eliminační metody vznikl nulový řádek, pak se jednalo o parametrické řešení. Pokud vznikl nulový řádek s nenulovou stranou, soustava neměla řešení.
Narozdíl od toho Gauss-Jordanova metoda s tímto problémem nepočítá - pomocí elementárních řádkových úprav nedocílíme toho, aby jsme z obdélníkové matice udělali jednotkovou, nebo při vzniku nulového řádku dostali do tohto řádku zase zpět na právě jednu pozici 1 (tj. při vzniku nulového řádku se již k jednotkové matici nedopracujeme). ≈

3 Výpočet inverzní matice

Schéma Gauss-Jordanovy eliminační metody se dá zapsat

$$[A|b] \sim \cdots \sim [I|x] \tag{4}$$

Jelikož řešení

$$x = A^{-1}b$$

můžeme dosadit do rovnice (4) a získáme

$$[A|b] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}b] \tag{5}$$

Pokud v původní rozšířené matici použijeme místo pravé strany b jednotkovou matici I, přechází rovnice (5) na tvar

$$[A|I] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}I] = [I|A^{-1}]$$

Předchozí schéma udává návod, jak nalézt inverzní matici.

Příklad 3.0.1

Nalezněte inverzní matici k matici soustavy z předešlého příkladu

$$[A|b] := \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Sestavíme rozšířenou matici soustavy a řešíme stejně jako v případě Gauss-Jordanovy metody

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ 2r_1 - r_2 \\ r_1 + r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ (-1)r_2 \\ r_2 - 3r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_3 - r_1 \\ 5r_3 + 2r_2 \\ r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & -9 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2 - 6r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & -9 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{6}r_1 \\ \frac{1}{6}r_2 \\ \frac{1}{2}r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Tedy vypočtená inverze (pro jednoduchost a "hezčí"zápis vytkněme zlomek)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

A skutečně - provedeme zkoušku

$$AA^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = I$$

A k čemu nám slouží inverzní matice?

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■

Poznámka: O tom, zda existuje inverzní matice nebo ne, rozhoduje použití Gauss-Jordanovy matice (viz poznámka výše). Maticím, ke kterým existuje inverzní matice říkáme *regulární*, ostatním *singulární*. (o dalších podmínách regularity matic bude pojednáno na pozdějších přednáškách a cvičeních). ≈

4 Pitva elementárních řádkových úprav

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- *Výměna řádku*
  Jedná se o permutační matice (viz 2. cvičení) - aplikujeme výměnu řádků na jednotkovou matici, např.
  $$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad TA = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}, \; AT = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$
- *Násobení řádků*
  Jedná se o pozměněnou jednotkovou matici - aplikujeme násobení skalárem na řádek, který chceme změnit, např.
  $$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad TA = \begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}, \; AT = \begin{bmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{bmatrix}$$
- *Sčítání řádků*
  Jedná se o pozměněnou jednotkovou matici - aplikujeme sčítání řádků a následný požadovaný zápis na jednotkovou matici, např.
  $$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{(tj. } r_1 + r_2 \to r_2) \quad TA = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix}, \; AT = \begin{bmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{bmatrix}$$

Kombinací těchto tří operací lze získat libovolnou řádkovou úpravu Gaussovy (Gauss-Jordanovy) elimiminační metody.

Příklad 4.0.1
Pamatujete si na Jeníčka a Mařenku?

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, b := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nyní si ukážeme, jak nalézt inverzní matici

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ 2r_1 - r_2 \end{array} \overset{1.}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 3r_1 - r_2 \\ r_2 \end{array} \overset{2.}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{3}r_1 \\ \frac{1}{3}r_2 \end{array} \overset{3.}{\sim}$$

$$\overset{3.}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Tedy inverzní matice

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Odvoďme nyní postupně jednotlivé transformační matice pro elementární řádkové úpravy

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_1 \\ 2r_1 - r_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =: T_1$$

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3r_1 - r_2 \\ r_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =: T_2$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}r_1 \\ \frac{1}{3}r_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} =: T_2$$

Pak dění na levé straně při výpočtu inverze uvedeném výše se dá popsat pomocí rovnice

$$T_3(T_2(T_1 A)) = I \tag{6}$$

Jelikož o maticích platí

$$(AB)C = A(BC)$$

lze zapsat rovnici (6) zjednodušeně

$$TA = I, \quad T := T_3 T_2 T_1 \tag{7}$$

Inverzní matice je definována

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \tag{8}$$

Pak porovnáním rovnic (7) a (8) lze tvrdit

$$A^{-1} = T \tag{9}$$

Tedy elementární řádkové úpravy aplikované na matici A za účelem úpravy na jednotkovou matici I jsou po vynásobení rovny inverzní matici A^{-1}.
Vylepšeme rovnici (9)

$$A^{-1} = TI$$

Jinak řečeno elementární řádkové úpravy nutné pro získání jednotkové matice I z původní matice A aplikované na jednotkovou matici vedou k získání inverzní matice A^{-1}. To je také důvod způsobu výpočtu inverzní matice, který jsme si uvedli výše. ■

5 Výpočetní náročnost

Výpočet inverze je příliš drahá operace - už při matici typu 2,2 potřebujeme minimálně 3 elementární řádkové operace. Mnohdy je výhodnější použít raději Gaussovu eliminační metodu. Naproti tomu při soustavě lineárních rovnic s větším počtem různých pravých stran má smysl použít raději inverzní matici. Pak řešení pro jednotlivé pravé strany získáme pouhým vynásobením inverzní matice s danou pravou stranou (kdežto u gaussovy metody by jsme museli přepočítat elementární řádkové úpravy na vektor pravých stran a posléze provést zpětnou substituci).

Příklad 5.0.1
Bez výpočtu inverze vypočtěte

$$A^{-1}Bw = ?$$

pokud je zadáno

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \; B := \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; w := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pro jednoduchost označme

$$x := A^{-1}Bw$$

a upravme

$$\begin{aligned} A^{-1}Bw &= x \\ Bw &= Ax \\ y &= Ax \end{aligned}$$

kde jsme označili levou stranu jako

$$y := Bw$$

a můžeme vypočíst

$$y = Bw = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A zůstává rovnice

$$\begin{aligned} y &= Ax \\ Ax &= y \end{aligned}$$

což je soustava lineárních rovnic a lze ji řešit pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_1 + r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

a pomocí zpětné substituce dopočtu řešení

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

■

6 Malý důkaz na závěr

Platí

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} && /(AB).\text{ zleva} \\ (AB)(AB)^{-1} &= (AB)B^{-1}A^{-1} \\ I &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ I &= AIA^{-1} \\ I &= (AI)A^{-1} \\ I &= AA^{-1} \\ I &= I \end{aligned}$$

□