Determinant

Lukáš Pospíšil

22. dubna 2020

1 Trocha teorie a nějaká ta praxe

Poznámka: Nejdříve malinko teoretických bludů a posléze několik praktických poznámek, které Vám jistě usnadní život. $\approx$

Definice 1
Nechť je dána matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.
Čtvercovou matici M_{ij}, která vznikne vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce nazýváme *minorem* matice A příslušnému k prvku a_{ij}.

Příklad 1.0.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$\blacksquare$

Definice 2
Determinantem reálné čtvercové matice $A = [a_{ij}]$ řádu n, nazýváme reálné číslo, které značíme $\det A$ nebo $|A|$, pro které platí

- je-li $n = 1$, pak $|A| = a_{11}$
- je-li $n > 1$, pak $|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + \cdots + (-1)^{n-1}a_{1n}|M_{1n}| = \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{1j}|M_{1j}|$

Poznámka: Tedy výpočet determinantu pomocí rekurentního rozkladu až do minorů matic řádu 1 podle rozvoje dle prvního řádku. Zajímavé. $\approx$

Příklad 1.0.2
Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Poznámka: Ano, tato matice je schválně takto zvolena - pro větší názornost. $\approx$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2. \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3. \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$1.(5.|9| - 6.|8|) - 2.(4.|9| - 6.|7|) + 3.(4.|8| - 5.|7|) = 0$$

Poznámka: Není náhoda. Matice A je singulární, determinant singulární matice je vždy roven nule. $\approx$

Poznámka: Rád bych ještě čtenáře upozornil, že např $|7|$ v předešlém výpočtu není myšleno jako absolutní hodnota ale jako determinant matice 1×1. Ano - je to matoucí, proto autoři se velice často přiklánějí k použití značení det. $\approx$

$\blacksquare$

1.1 Determinant matice 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Důkaz: Užitím rekurentního vzorce pro výpočet determinantu:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.\,|d| - b.\,|c| = ad - bc$$

$\square$

1.2 Determinant matice 3×3 (Sarusovo pravidlo)

Vynikající pomůcka pro výpočet determinantu matice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ je *Sarusovo pravidlo.*
Doporučuji čtenáři sledovat diagonály:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Důkaz? Jistě, tímto výpočtem získáme stejné číslo jako u použití minorů, nicméně si myslím, že tento způsob je rychlejší. Doporučuji jako cvičení dokázat čtenáři jeho správnost - nechť vypočte determinant této obecné matice 3×3 pomocí minorů a porovná výsledek s výsledkem Sarusova pravidla.
Poznámka: Pozor! Sarusovo pravidlo jako hrátky s diagonálami platí pouze pro matice 3×3. $\approx$

1.3 Vlastnosti determinantů

Několik zajímavých vlastností determinantů (lze dokázat z definice determinantu)

- determinant regulární matice je různý od nuly,
- determinant sigulární matice je roven nule,
- pokud matice obsahuje nulový řádék nebo nulový sloupec, pak je determinant roven nule (ona je to totiž singulární matice),
- determinant horní a dolní trojuhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále,
- determinant jednotkové matice je 1,
- $\det A = \det A^T$,
- pokud vyměníme dva řádky matice, determinant je nutno násobit -1,
- $\forall A \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \det (\alpha A) = \alpha^n \det A$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $\det (AB) = \det (A).\det (B)$

1.4 Algebraický doplněk

Definice 3
Algebraickým doplňkem prvku (i, j) čtvercové matice A nazýváme číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

pak se dá druhý bod definice deteminantu přepsat na rozvoj dle libovolného řádku

$$|A| = a_{i1}A_{ij} - a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

2 Determinant a elementární řádkové úpravy

Z výše uvedených vlastností tedy vyplývá, že je možné pomocí elementárních řádkových úprav podobně jako v případě Gaussovy eliminace upravit libovolnou matici na horní trojúhelníkovou. Přitom musíme ovšem mít na paměti následující pravidla:

1. Vynásobíme-li libovolný řádek matice nenulovým číslem, vynásobí se tímto číslem i determinant této matice a proto musíme determinant takto upravené matice vydělit tímto číslem.
2. Vyměníme-li dva libovolné řádky matice, změní se znaménko determinantu matice
3. Přičteme-li násobek jednoho řádku matice k jinému, determinant se nemění.

Navíc všechny tyto úpravy můžeme použít pokud je to výhodné i pro úpravu sloupců. Pokud takto upravíme matici na horní případně i dolní trojúhelníkový tvar, je výsledný determinant roven součinu prvků na diagonále.

Příklad 2.0.1
Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Řešení: Tak hurá na úpravu na schodový tvar, tj. na horní trojuhelníkovou matici

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ 2r_1 + r_3 \end{array} = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_2 + r_3 \end{array} = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} r_1 \\ (-1).r_2 \\ \frac{1}{2}r_3 \end{array} =$$

$$= (-2). \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = (-2).(1.2.1) = -4$$

Čtenář může prubnut Saruse na původní matici.

■

3 Rozvoj podle libovolného řádku nebo sloupce

V předchozí kapitole jsme usoudili, že rozvoj vzorce pro výpočet determinantu lze provést na libovolném řádku. Ale - jelikož det $A = \det A^T$, lze tento rozvoj provádět i pomocí libovolného sloupce.

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Pak

- pro rozvoj dle i-tého řádku platí

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

- pro rozvoj dle j-tého sloupce platí

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

Proč by to ale někdo dělal? Protože občas je to výhodné - zejména pokud existuje řádek nebo sloupec, který obsahuje nuly. Vynásobením odpovídajících minorů touto nulou nemá za následek žádný pokrok s výpočtem celkového determinantu, proto determinanty minorů ani nepočítáme. Viz následující příklad.

Příklad 3.0.1
Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení: existuje spousta způsobů jak daný determinant spočítat, resp. podle kterého řádku nebo sloupce provedeme rozvoj. Konkrétně je těchto způsobů osm.

Pokud bychom provedli rozvoj podle prvního řádku, lze psát

$$\begin{aligned} \det A &= 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1).(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &+0.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

což je pěkný fujtajbl, protože pořád musíme spočítat 3 determinanty matic tři krát tři (člen s nulou na začátku můžeme ihned ignorovat, na konci to bude stejně nula).

Nebo můžeme počítat rozvoj dle prvního sloupce

$$\begin{aligned} \det A &= 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &+1.(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

což je fajnovejší, protože teď máme nulové dva sčítance a zbývá počítat už jen dva determinanty.

Ale bystrý čtenář si jistě všiml, že ten třetí sloupec je to pravé ořechové. V tomto případě nám zůstane pouze jeden nenulový sčítanec a tak lze rovnou (zkušeně) psát

$$\det A = (-3).(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3.\,(1.1.(-1) + (-1).(-1).0 + 3.1.2 - 3.1.0 - (-1).1.(-1) - 1.(-1).2) = 18.$$

A nakonec to zas tak nebolelo. ■

4 Adjungovaná a inverzní matice

Definice 4
Pojmem *adjungovaná matice* nazýváme transponovanou matici příslušných algebraických doplňků, tedy

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

Věta 4.0.1
Nechť A je regulární čtvercová matice. Pak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$$

Poznámka: Kouzlo. $\approx$

Příklad 4.0.1
V minulém cvičení jsme počítali inverzní matici pomocí Gauss-Jordanovy eliminační metody. Čtenáři teď doporučuji porovnat výpočetní náročnost inverzní matice pomocí determinantů. Vypočtěte inverzní matici k matici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nejdříve determinant celé matice, pomůže nám Sarusovo pravidlo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.1.(-1)+(-1).(-1).(-1)+2.2.0-2.1.(-1)-(-1).2.(-1)-1.(-1).0 = -2$$

A pak sestavíme adjungovanou matici - nejdříve vypočteme algebraické doplňky

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

a dosadíme

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Podělíme a je hotovo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Poznámka: Porovnejte s řešením příkladu v minulém cvičení. Při výpočtu adjungované matice bych rád čtenáře upozornil na to, že adjungovaná matice je TRANSPONOVANÁ matice příslušných algebraických doplňků. Mně na to nikdo neupozornil, zabil jsem hledáním chyby která neexistovala hodinu života. ≈

■

5 Cramerovo pravidlo

Definice 5
Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých $Ax = b$.
Je-li matice A regulární, pak soustava má jediné řešení a pro jeho složky platí

$$x_i = \frac{\det A_i^b}{\det A}$$

kde A_i^b vznikla z matice A záměnou i-tého sloupce za vektor pravých stran b.

Příklad 5.0.1
Řešte soustavu $Ax = b$ pokud

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Řešení: Je nutno spočítat spoustu determinantů (konkrétně tolik, kolik je řádků = sloupců matice[1]):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det A_1^b = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det A_2^b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\det A_3^b = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Pak výsledné řešení

$$x_1 = \frac{\det A_1^b}{\det A} = 1,\ x_2 = \frac{\det A_2^b}{\det A} = -1,\ x_3 = \frac{\det A_3^b}{\det A} = 0,$$

Poznámka: Porovnejte pracnost řešení s Gaussovou eliminační metodou. ≈

■

[1] U Cramerova pravidla je vyžadována regulární matice (s nenulovým determinantem). Pokud je matice obdélníková, pak nemůže být regulární.

Příklad 5.0.2
Řešte soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pokud

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Definujte podmínky, za kterých má soustava právě jedno řešení.

Řešení: Je tam nějak hodně písmenek. Ale já bych se toho nebál. Začneme od podmínky, že soustava má mít právě jedno řešení. Soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení, pokud matice soustavy je regulární (existuje inverze, pak toto řešení je dáno $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$). Matice je regulární právě když její determinant je nenulový. Pro definici podmínky je tedy nutno spočítat determinant a říci, že pokud je tento determinant nenulový, pak soustava má právě jedno řešení.

Spočítejme tedy determinant dané matice tři krát tři pomocí Sarrusova pravidla:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a.a.a + 0.b.b + 0.b.b - 0.a.0 - b.b.a - b.b.a = a^3 - 2ab^2$$

Odpověd na druhý úkol je tedy jasná: pokud pro parametry $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a^3 - 2ab^2 \neq 0$, pak soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení.

Ale jaké? Můžeme použít Gaussovu eliminační metodu, ale jelikož jsme se už pustili do těch determinantů (a také téma cvičení jsou determinanty), použijme Cramerovo pravidlo a spočítáme determinanty soustav s vyměněným sloupcem za vektor pravé strany:

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = 1.a.a + 1.b.b + 0.1.b - 0.a.1 - b.1.a - b.b.1 = a^2 - ab$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 1 & b \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a.1.a + 1.b.0 + 0.b.1 - 0.1.0 - 1.b.a - 1.a.b = a^2 - 2ab$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = a.a.1 + b.1.0 + b.b.1 - 0.a.1 - b.b.1 - 1.a.b = a^2 - ab$$

Tedy jednotlivé složky řešení jsou dány podíly těchto determinantů a determinantu původní matice:

$$x_1 = \frac{a^2 - ab}{a^3 - 2ab^2}, \quad x_2 = \frac{a^2 - 2ab}{a^3 - 2ab^2}, \quad x_3 = \frac{a^2 - ab}{a^3 - 2ab^2}.$$

Nebudeme machrovat (zatím) a raději uděláme zkoušku - dosadíme do výrazu $\mathbf{Ax}$ naše nalezené řešení a schválně jestli dostaneme vektor pravých stran $\mathbf{b}$. Pro jednoduchost *vytáhnu* ten zlomek před výraz, ať nemusíme pracovat se zlomky při násobení:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \tfrac{1}{a^3-2ab^2}\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^2-ab \\ a^2-2ab \\ a^2-ab \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{a^3-2ab^2}\begin{bmatrix} a(a^2-ab)+b(a^2-2ab) \\ b(a^2-ab)+a(a^2-2ab)+b(a^2-ab) \\ b(a^2-2ab)+a(a^2-ab) \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{a^3-2ab^2}\begin{bmatrix} a^3-a^2b+ba^2-2ab^2 \\ ba^2-ab^2+a^3-2a^2b+ba^2-ab^2 \\ ba^2-2ab^2+a^3-a^2b \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{a^3-2ab^2}\begin{bmatrix} a^3-2ab^2 \\ -2ab^2+a^3 \\ -2ab^2+a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A teď už můžeme. Vyřešili jsme parametrickou soustavu lineárních rovnic a definovali podmínku jednoznačné řešitelnosti. ■