Asymptoty funkce

Lukáš Pospíšil

26. března 2020

1 Svislé asymptoty

Definice 1
Přímka $x = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá *svislá asymptota grafu funkce* f, jestliže je alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty$$

Pozorování: Funkce nemůže mít svislou asymptotu v bodě, ve kterém je spojitá (limita by se přímo rovnala funkční hodnotě - a ta nemůže být $\pm\infty$). Tedy až budeme pátrat po šikmých asymptotách, rozhodně sáhneme po bodech nespojisti funkce.

Příklad Například funkce

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

je nespojitá v bodě 0 a limity

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} \tfrac{1}{x} &= \infty \\ \lim_{x \to 0-} \tfrac{1}{x} &= -\infty \end{aligned}$$

tedy funkce f má v bodě 0 svislou asymptotu.

2 Šikmé asymptoty

Ono se občas může stát, že jak se blížíme k nekonečnu, tak se funkce blíží k nějaké přímce. Nevěříte?

Definice 2
Přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá *asymptota grafu funkce* f *v plus nekonečnu*, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Pro konstanty a, b platí

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax$$

Obdobně pro asymptotu grafu f v minus nekonečnu (nahraďte $-\infty$ v limitách).

Poznámka: Všimněte si, že $a, b \in \mathbb{R}$. Tedy žádné nekonečno. Pokud je to nekonečno, žádná šikmá asymptota není.

Příklad Nalezněte šikmé asymptoty funkce

$$f(x) := \frac{3x^2}{x-1}$$

Takže nalezneme konstanty a, b ať to můžeme do předpisu $y = ax + b$ dosadit. Nejdříve plus nekonečno

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2-x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{2x-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{2} = 3$$

Supr, takže je to reálné číslo, tedy $a = 3$. Pokračujeme

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x-1} - 3x = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$$

Tedy funkce má šikmou asymptotu v plus nekonečnu s předpisem $y = 3x + 3$.
Teď tedy mínus nekonečno:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2-x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{2x-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{2} = 3$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x-1} - 3x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$$

Tedy funkce f má šimkou asymptotu v minus nekonečnu s předpisem $y = 3x + 3$.

Příklad Určete asymptoty funkce

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x}{x+1}$$

- Svislé
  Definičním oborem funkce je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, takže jediná svislá asymptota může být akorát v bodě -1.

$$\lim_{x\to-1+} \frac{e^x}{x+1} = e^{-1} \lim_{x\to-1+} \frac{1}{x+1} = e^{-1} \lim_{y\to0+} \frac{1}{y} = \infty$$

$$\lim_{x\to-1-} \frac{e^x}{x+1} = e^{-1} \lim_{x\to-1-} \frac{1}{x+1} = e^{-1} \lim_{y\to0-} \frac{1}{y} = -\infty$$

- Šikmá asymptota v plus nekonečnu

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2+x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x+1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

  Tedy šikmá asymptota v plus nekonečnu není.

- Šikmá asymptota v minus nekonečnu

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} e^x \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$$

  Pokračujme ve výpočtu b

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+1} - 0.x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0$$

  Tedy přímka $y = 0x + 0 = 0$ je šikmou asymptotou v minus nekonečnu.