Taylorův polynom

Lukáš Pospíšil

25. března 2020

V inženýrských disciplínách jsou často různé vztahy vyjadřovány velmi složitými funkcemi. A tak přirozeně vzniká otázka, zda by bylo možné danou složitou funkci nahradit (aproximovat) funkcí jednodušší, jejíž hodnoty lze snadno vyčíslit, případně má *pěkné* vlastnosti.

Těmito *pěknými* funkcemi budou pro nás polynomy (jistě všichni už tušíte proč).

Budeme hovořit o aproximace funkce f nějlepším polynomem n-tého stupně na okolí bodu x_0. Pokud uvažujeme o polynomu nejvýše prvního stupně, pak je jistě nejlepší aproximací tečna grafu funkce f sestrojená v bodě x_0.

A pokud to bude polynom vyššího stupňě? Pak volme *Taylorův polynom* n-tého řádu funkce f v bodě x_0

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Při aproximaci se dopouštíme aproximační chyby

$$R(x) = f(x) - T_n(x)$$

a pro tuto chybu platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

(čím vyšší stupeň polynomu užijeme, tím je aproximace přesnější)

Příklad Funkci

$$f(x) = x \ln x$$

aproximujte Taylerovým polynomem 4-tého stupně v okolí bodu $x_0 = 1$.
Pro větší názornost (abychom viděli, co bude potřeba spočítat) rozepišme hledaný Taylorův polynom

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

Tedy potřebujeme první, druhou, třetí a čtvrtou derivaci dané funkce v bodě 1:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = x \ln x & f(1) = 1.\ln 1 = 0 \\
f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 & f'(1) = 1 \\
f''(x) = \frac{1}{x} & f''(1) = 1 \\
f'''(x) = -\frac{1}{x^2} & f'''(1) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3} & f'(x) = 2
\end{array}$$

No a pak jen dosadíme

$$T_4(x) = \frac{0}{1} + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{-1}{6}(x-1)^3 + \frac{2}{24}(x-1)^4$$

a případně upravíme do hezčího tvaru

$$T_4(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4$$