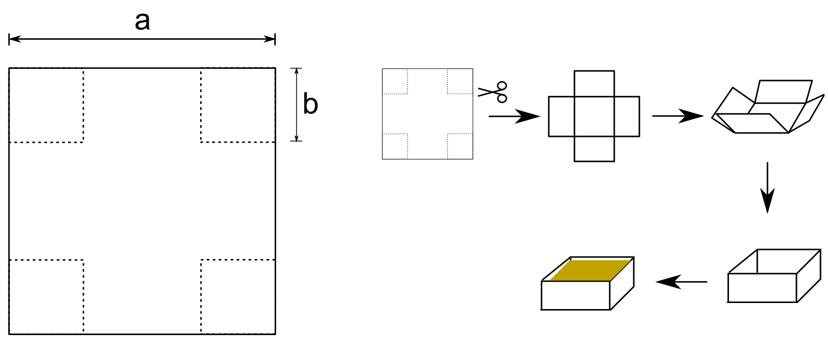
Globální extrémy - slovní úlohy

Lukáš Pospíšil

25. března 2020

0.1 Krabice písku

Mějme k dispozici čtverec kartonu o délce strany a. Vyřízneme z rohů tohto čtverce menší čtverce se stranou b tak, aby bylo možno poskládat krabici se čtvercovou základnou (a bez horní stěny).



Jak volit délku b, pokud chceme, aby krabice měla co největší objem?
(motivací může být například - krabici chceme naplnit co největším množstvím písku)

Nejdřív je důležité si uvědomit, co vůbec je dáno a co máme počítat.
Daná je šířka původního čtverce, tedy $a \in \mathbb{R}, a > 0$ budeme považovat za konstantu. Naopak hledáme $b \in \mathbb{R}$ tak, aby výsledný objem byl maximální. Očividně

$$b \in (0, \frac{a}{2})$$

(tedy něco jako nulový objem nepřipadá v úvahu).
Sestavme funkci popisující objem krabice na základě šířky b

$$V(b) = (a - 2b)^2 b$$

a nalezneme globální extrémy této funkce na množině $M = (0, \frac{a}{2})$.
Tedy nejdříve první derivace a stacionární body:

$$V' = 2(a - 2b).(-2)b + (a - 2b)^2 = (a - 2b)(-4b + a - 2b) = (a - 2b)(a - 6b)$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \quad (a - 2b) = 0 \quad \vee \quad (a - 6b) = 0$$

Jediným stacionárním bodem z požadovaného intervalu je $b = \frac{a}{6}$.
Tento bod je součastně lokálním maximem, protože druhá derivace

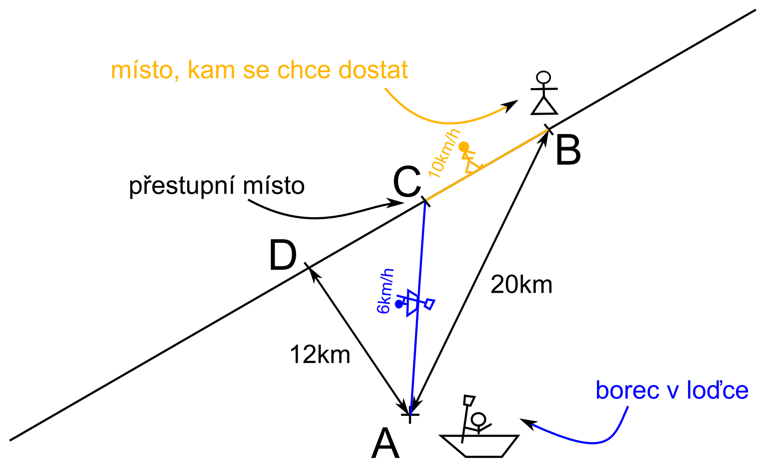
$$V'' = (a^2 - 8ab + b^2)' = -8a + 2b$$

je v tomto bodě

$$V''(\frac{a}{6}) = -8a + 2\frac{a}{6} = -\frac{23}{3}a < 0$$

0.2 Borec v loďce

Muž v loďce je vzdálen 12 km od pobřeží (majícího tvar přímky). Chce se co nejrychleji dostat do místa na pobřeží, které je od něj vzdáleno 20 km. Rozhodněte, kde se má vylodit, víte-li, že dokáže veslovat rychlostí 6 km/h a po břehu se pohybovat rychlostí 10 km/h.



Tedy co budeme počítat? Kde se borec vylodí - tedy vzdálenost $|CD| \overset{\text{ozn}}{=} x$.
Důležité je tedy určit, co budeme minimalizovat - chce se tam dostat co nejrychleji, takže funkci času. Tato funkce bude záviset na místě vylodění, tj. na x. Připomeňme

$$s = v.t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v}$$

Celkový čas bude roven součtu času, který borec stráví pohybem po moři a pohybem po pobřeží

$$t(x) = t_m(x) + t_p(x)$$

Z trojuhelníku ABD lze snadno spočítat vzdálenost $|DB| = \sqrt{|AB|^2 + |BD|^2} = 16$ (dle Pytagovy věty). Vzdálenost, kterou urazí po moři je $|AC| = \sqrt{12^2 + x^2}$ (opět Pytagorova věta z trojuhelníku ACD) a vzdálenost, kterou urazí po pobřeží je $|CB| = 16 - x$. Pak dosazením

$$t(x) = t_m(x) + t_p(x) = \frac{s_m}{v_m} + \frac{s_p}{v_p} = \frac{\sqrt{12^2 + x^2}}{6} + \frac{16 - x}{10}$$

Abychom nalezli extrémy, tak určíme stacionární body

$$t'(x) = \frac{x}{6\sqrt{144 + x^2}} - \frac{1}{10}$$

$$t'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{6\sqrt{144 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9$$

Očividně množina, na které jsme minimalizovali funkci času je definována $x \in \langle 0, 16 \rangle$. Dle Weierstrassovy věty existuje globální extrém, tedy stačí určit funkční hodnoty ve stacionárních bodech a v krajních bodech intervalu $\langle 0, 16 \rangle$:

$$t(0) = \frac{108}{30}, \quad t(9) = \frac{96}{30}, \quad t(16) = \frac{100}{30}$$

Tedy v bodě $x = 9$ je globální minimum.