

VŠB – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

**Adaptivní řešení úlohy průhybu nehomogenní  
struny**  
**Adaptive Solution of a Nonhomogeneous String  
Displacement**

2009

Radek Svoboda

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7. května 2009

.....  
Radek Svoboda

Rád bych na tomto místě poděkoval panu Ing. Daliboru Lukášovi, Ph.D. za jeho velkou pomoc, trpělivost a motivaci při řešení této práce.

## Abstrakt

Náplní bakalářské práce je porovnání analytického řešení s adaptivními numerickými metodami pro výpočet průhybu nehomogenní struny. Analytický výpočet je pro řešení některých zatížení obtížný až nemožný. Uvažované numerické metody jsou metoda konečných diferencí a konečných prvků. Důležitou součástí numerických výpočtů je zjemňování diskretizace, které může být stejnoměrné nebo adaptivní. Při adaptivní diskretizaci se snažíme zjemňovat místa s větší chybou řešení oproti přesnému výsledku. Na odhad chyby využívám metody reziduální, průměrování nebo stejnoměrného mezikroku.

**Klíčová slova:** úloha průhybu struny, metoda konečných diferencí, metoda konečných prvků, diskretizace, aposteriorní odhad chyby, adaptivní metody

## Abstract

The bachelor thesis compares analytic solution with adaptive numerical methods for calculation of a nonhomogeneous string displacement. Analytic calculation is difficult or impossible for some loads. We can perform calculation with numeric method like finite difference method or finite element method. Discretization is an important part of the method. It can be uniform or adaptive that it is looking for section with larger error and it refine this section. For Error estimation we use the residual, averging and the uniform inter-step method.

**Keywords:** problem string displacement, Finite Difference Method, Finite Element Method, discretization, aposterior estimation of error, adaptive methods

## Použité značení

*MKP* – metoda konečných prvků

*MKD* – metoda konečných diferencí

$f$  – hustota síly

$u$  – průhyb struny

$\tau$  – napětí ve struně

$h$  – úsek diskretizace

$u_h$  – přibližné řešení

$V, V_h$  – vektorové prostory testovaných MKP funkcí

$\eta$  – indikátor chyby

## Obsah

1 Úvod.....	3
2 Formulace úlohy průhybu struny.....	4
3 Analytické řešení.....	6
4 Numerické řešení.....	8
4.1 Diskretizace.....	8
4.2 Metoda konečných diferencí.....	8
4.3 Metoda konečných prvků.....	10
5 Zjemňování sítě.....	14
5.1 Stejněměrné zjemňování sítě.....	14
5.2 Adaptivní zjemňování sítě.....	14
5.2.1 Odhad chyby průměrováním.....	14
5.2.2 Reziduální odhad chyby.....	15
5.2.3 Odhad chyby s využitím stejnoměrného mezikroku.....	16
6 Porovnání metod.....	17
6.1 Metoda konečných diferencí.....	17
6.1.1 Odhad chyby průměrováním.....	17
6.1.2 Reziduální odhad chyby.....	18
6.1.3 Odhad chyby s využitím stejnoměrného mezikroku.....	18
6.2 Metoda konečných prvků.....	18
6.2.1 Odhad chyby průměrováním.....	18
6.2.2 Reziduální odhad chyby.....	18
6.2.3 Odhad chyby s využitím stejnoměrného mezikroku.....	18
7 Závěr.....	25
8 Literatura.....	26

## Seznam obrázků

1 Průhyb struny.....	4
2 Zatížení úseku struny.....	4
3 Značení úseků u analytického řešení.....	6
4 Diskretizace.....	8
5 Přibližné řešení.....	9
6 Po částech lineární funkce $v_h$ .....	11
7 Báze $V_h$ .....	11
8 Sousední funkce báze.....	13
9 Odhad chyby průměrováním.....	15
10 Využití stejnoměrného mezikroku.....	16
11 MKD průměrování $f_1$ .....	19
12 MKD průměrování $f_2$ .....	19
13 MKD průměrování $f_3$ .....	19
14 MKD reziduální $f_1$ .....	20
15 MKD reziduální $f_2$ .....	20
16 MKD reziduální $f_3$ .....	20
17 MKD mezikrok $f_1$ .....	21
18 MKD mezikrok $f_2$ .....	21
19 MKD mezikrok $f_3$ .....	21
20 MKP průměrování $f_1$ .....	22
21 MKP průměrování $f_2$ .....	22
22 MKP průměrování $f_3$ .....	22
23 MKP reziduální $f_1$ .....	23
24 MKP reziduální $f_2$ .....	23
25 MKP reziduální $f_3$ .....	23
26 MKP mezikrok $f_1$ .....	24
27 MKP mezikrok $f_2$ .....	24
28 MKP mezikrok $f_3$ .....	24

# 1 Úvod

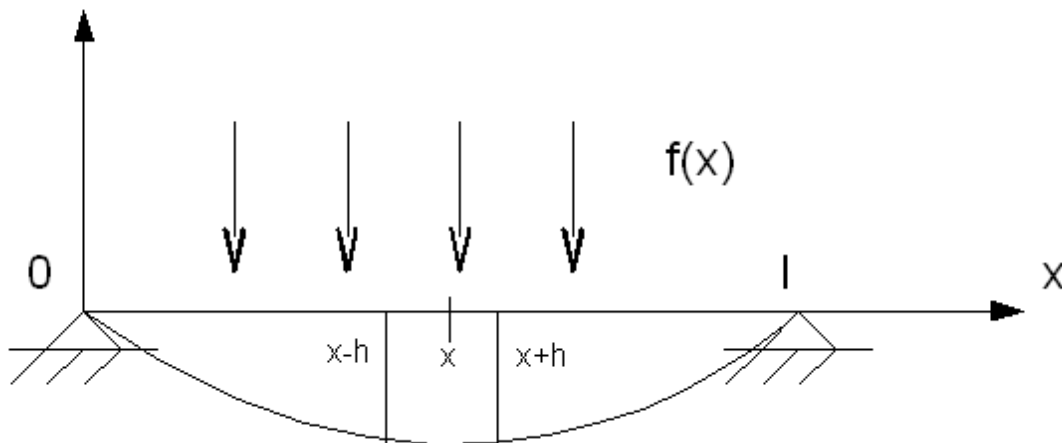
Tato bakalářská práce se věnuje metodám výpočtu průhybu struny při působení vnější síly. Podobné úlohy ve 2 nebo 3 dimenzích se využívají při modelování situací, při kterých dochází k deformaci objektu. Chceme řešit úlohu s velkou přesností. Jednou z možností je zjemňovat síť stejnoměrně, což vede na velkou soustavu rovnic. Proto zjemňujeme adaptivně v místech s nadprůměrnou chybou, čímž vznikne menší soustava.

Práce nejdřív ukazuje metody výpočtu průhybu a na konci je porovnává. V druhé kapitole si ukážeme formulaci úlohy průhybu struny. Třetí kapitola popisuje analytický výpočet, který nám dá přesné řešení. Čtvrtá kapitola se věnuje metodám numerického výpočtu, který se využívá kvůli obtížnostem výpočtu analytického řešení a jeho nemožnosti u některých zadání. Mezi metody numerického řešení patří metoda konečných diferencí a prvků. Pátá kapitola pojednává o metodách zjemňování využívaných v numerických řešeních. Mezi ně patří zjemňování stejnoměrné a adaptivní, která zvyšují přesnost výpočtu dělením jen v místech s nejvyšší odhadnutou chybou. Pro odhad chyby se využívají metody průměrování, reziduální a metoda využívající stejnoměrného mezikroku.



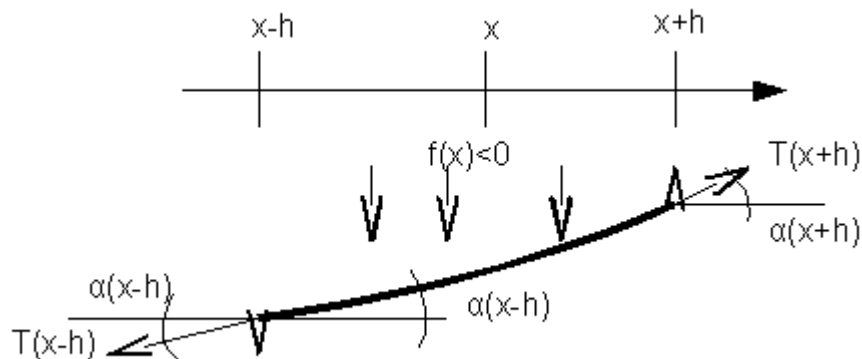
## 2 Formulace úlohy průhybu struny

Uvažujme strunu uchycenou na obou jejích koncích. Na strunu působí síla vyjádřená hustotou  $f(x)$ . Hledáme vertikální průhyb struny jako funkci  $u(x)$ .



Obr. 1: Průhyb struny

Označme napětí působící ve struně  $\tau$  a necht' je  $\alpha(x)$  úhel mezi horizontální osou  $x$  a strunou, nebudou nás zajímat posuvy ve směru osy  $x$ . Pro malý úsek struny od bodu  $x-h$  do bodu  $x+h$  je  $y$ -ová složka síly na levém konci úseku  $-\tau \sin \alpha(x-h)$  a na pravém konci  $\tau \sin \alpha(x+h)$ , viz Obr.2.



Obr. 2: Zatížení úseku struny

Součet  $y$ -ových složek napětí na krajích úseku a síly působící na tento úsek je nulový:

$$-\tau(x-h) \cdot \sin[\alpha(x-h)] + \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi + \tau(x+h) \cdot \sin[\alpha(x+h)] = 0$$

Pro dostatečně malé  $\alpha(\xi)$  se  $\sin \alpha(\xi)$  přibližně rovná  $\text{tg } \alpha(\xi)$  což se rovná derivaci funkce  $u(\xi)$ :

$$\sin \alpha(\zeta) \approx \operatorname{tg} \alpha(\zeta) = u'(\zeta)$$

Po dosazení:

$$-\tau(x-h) \cdot u'(x-h) + \int_{x-h}^{x+h} f(\zeta) d\zeta + \tau(x+h) \cdot u'(x+h) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{2h}$$

Po vydělení délkou úseku (2h):

$$\frac{\tau(x+h) \cdot u'(x+h) - \tau(x-h) \cdot u'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\zeta) d\zeta$$

Věta 1. O střední hodnotě integrálního počtu

Nechť máme na intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitou funkci  $f(x)$ , pak existuje takový bod  $c \in (a, b)$ , že platí

$$\int_a^b f(\zeta) d\zeta = (b-a) \cdot f(c) \quad ,$$

Vezmeme funkci  $f(x)$  spojitou a úseky  $h$  dostatečně malé, bude  $f(\tau)$  odpovídat  $f(x)$ :

$$\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2h} \cdot f(\tau) \cdot 2h \quad \xrightarrow{h \rightarrow 0} \quad f(x) \quad \tau \in \langle x-h, x+h \rangle$$

$$\frac{\tau(x+h) \cdot u'(x+h) - \tau(x-h) \cdot u'(x-h)}{2h} \quad \xrightarrow{h \rightarrow 0} \quad [\tau(x) \cdot u'(x)]'$$

Dosadíme:

$$-[\tau(x) \cdot u'(x)]' = f(x) \quad x \in \langle 0, l \rangle$$

Musíme si ještě uvědomit, že struna je na obou stranách napevno uchycená, takže můžeme dodat podmínky:

$$u(0) = u(l) = 0$$

### 3 Analytické řešení

Analytické řešení je nejpřesnější metodou, ve které počítáme přímo integrály ze zadané hustoty sil  $f(x)$ , abychom zjistili funkci  $u(x)$ .

Při analytickém řešení použijeme zjednodušenou rovnici, kde vezmeme napětí ve struně konstantní rovné 1:

$$-u''(x) = f(x)$$

Když chceme z vzorce zjistit funkci  $u(x)$ , vyjde nám:

$$-u''(x) = f(x)$$

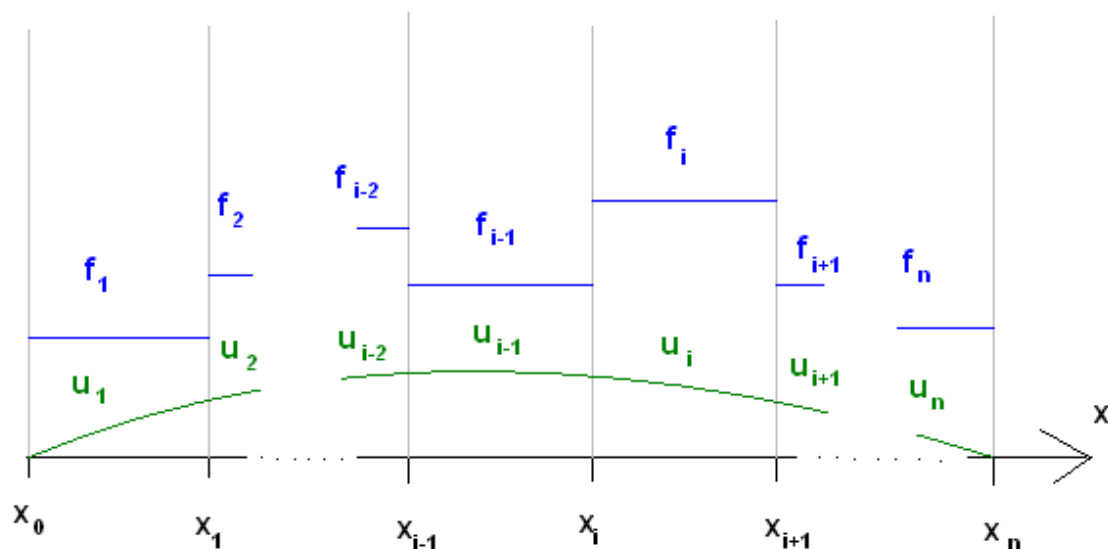
$$u'(x) = -\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$u(x) = -\int \int f(x) dx = G(x) + C \cdot x + D$$

kde  $F(x)$  a  $G(x)$  jsou primitivní funkce a  $C$  a  $D$  jsou reálná čísla.

Vezmeme si jako zadání funkci  $f(x)$ , která je po částech konstantní:

$$f(x) = f_i(x) = A_i \quad x \in \langle x_{(i)}, x_{(i+1)} \rangle \quad i = 0, \dots, n-1$$



Obr. 3: Značení úseků u analytického řešení

V případě, že  $f(x)$  je konstantní funkce ( $f(x)=A$ ):

$$-u''(x) = f(x)$$

$$u'(x) = -\int f(x) dx = -A \cdot x + C$$

$$u(x) = -\int \int f(x) dx = -\frac{A \cdot x^2}{2} + C \cdot x + D$$

Protože máme funkci  $f(x)$  zadanou jako po částech konstantní, budeme muset i funkci  $u(x)$  vypočítat po částech. V každé z  $n$  částí potřebujeme zjistit reálná čísla  $C$  a  $D$ , tudíž máme  $2n$  proměnných, na jejichž výpočet budeme potřebovat  $2n$  rovnic. Protože víme, že funkce  $u(x)$  je spojitá a má druhou derivaci, tudíž musí být spojitá i v první derivaci, máme  $n-1$  rovnic pro

zajištění spojitosti mezi n částmi u(x), n-1 rovnic pro zajištění spojitosti mezi n částmi u'(x) a 2 rovnice pro počáteční a koncovou podmínku. To nám dává potřebných 2n rovnic.

Rovnice pro počáteční podmínku:

$$u(x_0)=0 \Rightarrow -\frac{A_1 \cdot x_0^2}{2} + C_1 \cdot x_0 + D_1 = 0$$

Rovnice pro zajištění spojitosti v u(x) a v u'(x):

$$\forall i=1, \dots, n-1$$

$$u_i(x_i)=u_{i+1}(x_i) \Rightarrow -\frac{A_i \cdot x_i^2}{2} + C_i \cdot x_i + D_i = -\frac{A_{i+1} \cdot x_i^2}{2} + C_{i+1} \cdot x_i + D_{i+1}$$

$$u_i'(x_i)=u_{i+1}'(x_i) \Rightarrow -A_i \cdot x_i + C_i = -A_{i+1} \cdot x_i + C_{i+1}$$

Rovnice pro koncovou podmínku:

$$u_n(x_n)=0 \Rightarrow -\frac{A_n \cdot x_n^2}{2} + C_n \cdot x_n + D_n = 0$$

Převědeme neznámé na levou stranu rovnice a zbytek napravo:

$$C_1 \cdot x_0 + D_1 = \frac{A_1 \cdot x_0^2}{2}$$

$$\forall i=1, \dots, n-1$$

$$C_i \cdot x_i + D_i - C_{i+1} \cdot x_i - D_{i+1} = -\frac{A_{i+1} \cdot x_i^2}{2} + \frac{A_i \cdot x_i^2}{2}$$

$$C_i - C_{i+1} = -A_{i+1} \cdot x_i + A_i \cdot x_i$$

$$C_n \cdot x_n + D_n = \frac{A_n \cdot x_n^2}{2}$$

Vzniklá soustava rovnic by se dala zapsat pomocí matice:

$$\left[ \begin{array}{cccccc} x_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & 1 & x_1 & 1 & \dots & -\frac{A_2 \cdot x_1^2}{2} + \frac{A_1 \cdot x_1^2}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & -A_2 \cdot x_1 + A_1 \cdot x_1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & \dots & x_i & 1 & x_i & 1 & \dots & -\frac{A_{i+1} \cdot x_i^2}{2} + \frac{A_i \cdot x_i^2}{2} \\ & & & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & -A_{i+1} \cdot x_i + A_i \cdot x_i \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \dots & x_n & 1 & & 0 \end{array} \right]$$

kde sloupce jsou střídavě  $C_i$  a  $D_i$ , kde  $i$  jde od 1 do  $n$ , a poslední sloupec je pravá strana.

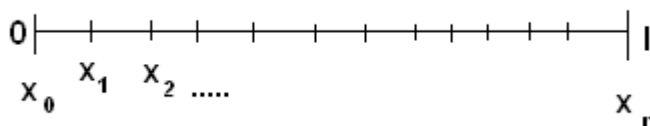
## 4 Numerické řešení

Numerické řešení není tak přesné jako řešení analytické, ale je potřeba ho využít, když by výpočet analytického řešení byl příliš obtížný nebo dokonce nemožný. To se může stát v případech, kdy se integrál z hustoty sil  $f(x)$  nedá vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Na rozdíl od analytického řešení numerické nepracuje s výpočtem integrálu, ale odvozuje řešení z hodnot funkce  $f(x)$  v určených bodech. V numerickém výpočtu se většinou vyskytuje chyba řešení, ale je naším úkolem ji zmenšit do zanedbatelných hodnot.

### 4.1 Diskretizace

Při numerickém výpočtu je nutné udělat diskretizaci, což je rozdělení struny na více úseků, ve kterých budeme hledat co nejpřesnější řešení.

Při diskretizaci vytvoříme body  $x_0$  až  $x_n$ , které rozdělí strunu na více oblastí a kde  $x_0$  je počátek a  $x_n$  je konec struny.



Obr. 4: Diskretizace

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = l$$

Diskretizaci můžeme rozdělit na dva druhy podle vzdálenosti mezi jednotlivými body. Je to diskretizace stejnoměrná, když vzdálenost mezi sousedními body  $h$  má vždy stejnou hodnotu, a nestejnoměrná. Při nestejnoměrné diskretizaci můžeme zhušťovat síť bodů v místech, kde nám vzniká největší chyba výpočtu, a tím se snažit ji zmenšit.

### 4.2 Metoda konečných diferencí

Při metodě konečných diferencí hledáme přibližné řešení  $u_h(x)$  na základě okolních bodů ve tvaru:

$$u_h(x) = u_i + (u_{i+1} - u_i) \cdot \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{pro } x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$$

Z toho získáme úsečku, v každém úseku:



Obr. 5: Přibližné řešení

Ale nejdřív potřebujeme získat hodnoty v daných bodech. Ty vypočítáme nahrazením druhé derivace  $u''(x)$  v diferenciální rovnici  $-u''(x)=f(x)$  druhou centrální diferencí, kterou získáme z Taylorovy věty.

Věta 2. Taylorova

Nechť

$f \in C^3((a, b)) \cap C(\langle a, b \rangle)$ , pak

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x}) \cdot (x - \tilde{x}) + \frac{1}{2} f''(\tilde{x}) \cdot (x - \tilde{x})^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi) \cdot (x - \tilde{x})^3,$$

kde  $\frac{1}{6} f'''(\xi) \cdot (x - \tilde{x})^3$  je zbytek v tzv. Lagrangeově tvaru a  $\xi$  leží mezi  $x$  a  $\tilde{x}$ ,

$x \neq \tilde{x}, x, \tilde{x} \in (a, b)$

Použitím Taylorovy věty na naši funkci v bodech  $x_i+h$  a  $x_i-h$ :

$$u(x_i+h) = u(x_i) + u'(x_i) \cdot h + \frac{1}{2} u''(x_i) \cdot h^2 + \frac{1}{6} u'''(\xi_1) \cdot h^3$$

$$u(x_i-h) = u(x_i) - u'(x_i) \cdot h + \frac{1}{2} u''(x_i) \cdot h^2 - \frac{1}{6} u'''(\xi_2) \cdot h^3$$

Když tyto dvě rovnice sečteme, získáme:

$$u(x_i+h) + u(x_i-h) = 2u(x_i) + u''(x_i) \cdot h^2 - \frac{1}{6} h^3 (u'''(\xi_2) - u'''(\xi_1))$$

Po převedení tak, abychom měli na jedné straně druhou derivaci a zbytek na druhé:

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} + \frac{1}{6} h (u'''(\xi_2) - u'''(\xi_1))$$

S limitní hodnotou  $h \rightarrow 0$  je  $\frac{1}{6} h (u'''(\xi_2) - u'''(\xi_1)) \rightarrow 0$  a  $u''(x_i)$  přibližně odpovídá:

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2}$$

Protože potřebujeme na výpočet hodnotu ve dvou sousedních bodech diskretizace, začínáme na rozdělení na dva úseky a poté postupně zpřesňujeme diskretizaci, až se dostaneme na dostatečnou přesnost.

### 4.3 Metoda konečných prvků

Při výpočtech metody konečných prvků jsme vycházeli z rovnováhy sil:

$$-(\tau(x)u'(x))' = f(x) \quad v(0, l)$$

$$u(0) = u(l) = 0$$

V metodě konečných prvků využijeme toho, že struna má v ustáleném stavu nejmenší potenciální energii, kterou vypočítáme:

$$W(v(x)) = \frac{1}{2} \int_0^l \tau(x) [v'(x)]^2 dx - \int_0^l f(x) v(x) dx,$$

$$v(0) = v(l) = 0$$

kde  $v(x)$  je průhyb struny.

Naše řešení  $u(x)$  musí splňovat podmínky:

1.  $W(u(x)) \leq W(v(x)) \quad \forall v: v(0)=v(l)=0$  pro něž má smysl počítat  $W(v(x))$
2.  $u(0)=u(l)=0$
3. pro  $u$  „má smysl“ počítat  $W(u(x))$

Z toho nám vzniká potřeba zjistit nejmenší  $W(v(x))$ , kde  $v(x) \in V$  a  $V$  je definováno jako:

$$V := \{v(x) \in C(\langle 0, l \rangle) : W(v) < +\infty \text{ a } v(0) = v(l) = 0\}$$

Což je ekvivalentní úloze najdi  $u(x) \in V$  :

$$a(u(x), v(x)) = b(v(x)) \quad \forall v(x) \in V,$$

kde

$$a(u(x), v(x)) = \int_0^l \tau(x) u'(x) v'(x) dx$$

$$b(v(x)) = \int_0^l f(x) v(x) dx.$$

Tato zobrazení jsou

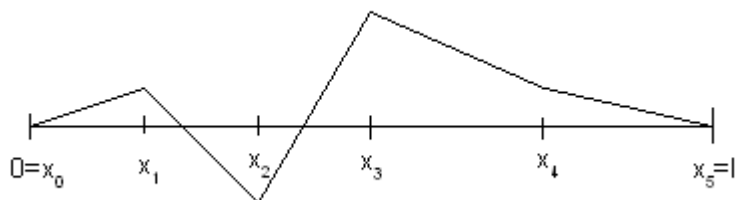
$a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ... bilineární forma

$b: V \rightarrow \mathbb{R}$  ... lineární forma

Takže hledáme  $u(x) \in V$  z rovnice:

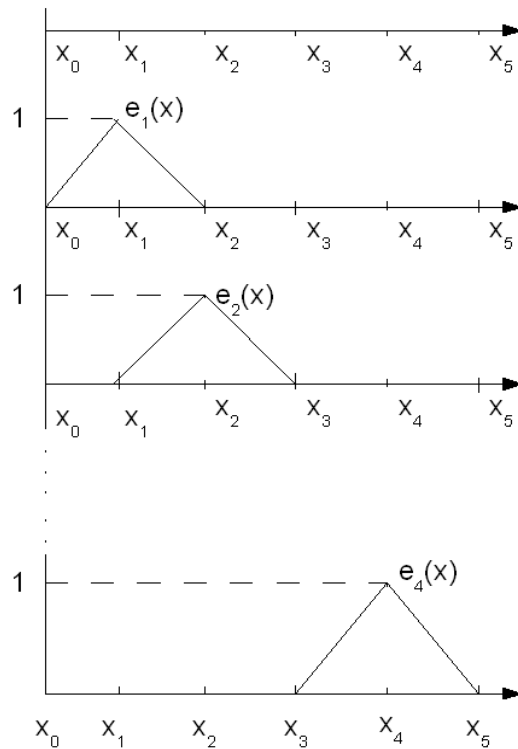
$$\int_0^l \tau(x) u'(x) v'(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx \quad \forall v(x) \in V$$

Protože počítat pro  $\forall v(x) \in V$  by bylo příliš náročné, využijeme Galerkinovu aproximaci a  $V$  nahradíme podprostorem konečné dimenze  $V_h$ . V rámci diskretizace bude podprostor  $V_h$  obsahovat po částech lineární funkce  $v_h(x) \in C(\langle 0, l \rangle)$  a  $v_h(0) = v_h(l) = 0$ .



Obr. 6: Po částech lineární funkce  $v_h$

To znamená, že jako bázi  $V_h$  můžeme využít např.:



Obr. 7: Báze  $V_h$

$$V_h = \langle e_1(x), e_2(x), e_3(x), e_4(x) \rangle \quad \dim V_h = 4$$

Nahradíme úlohu:

Najdi  $u(x) \in V$

$$a(u, v) = b(v) \quad \forall v(x) \in V$$

Přibližnou úlohou:

Najdi  $u_h \in V_h$

$$a(u_h, v_h) = b(v_h) \quad \forall v_h(x) \in V_h$$

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_j e_j(x) \quad n = \dim V_h$$

$v_h(x)$  nahradíme  $e_1(x), \dots, e_n(x)$

Vznikne rovnice

$$a\left(\sum_{j=1}^n u_j e_j(x), e_i(x)\right) = b(e_i(x)) \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ ve které můžeme díky bilinearitě } a$$

sumu přesunout před  $a$  a ze které potřebujeme zjistit vektor  $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

To je ekvivalentní k řešení soustavy lineárních rovnic o  $n$  neznámých

$$A \cdot \bar{u} = \bar{b},$$

kde:



$$[A]_{i,j} = a(e_j(x), e_i(x)) = \int_0^l \tau(x) e_j'(x) e_i'(x) dx$$

$$[\bar{b}]_i = b(e_i(x)) = \int_0^l f(x) e_i(x) dx$$

Když se podíváme na matici A, zjistíme, že je třídiagonální, protože:

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \\ -\frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} & x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \\ 0 & x \in \langle 0, x_{i-1} \rangle \cup \langle x_{i+1}, l \rangle \end{cases}$$

$$e_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \\ 0 & x \in \langle 0, x_{i-1} \rangle \cup \langle x_{i+1}, l \rangle \end{cases}$$

Když to dosadíme do rovnice pro člen matice a předpokládáme, že  $\tau(x)$  je po částech konstantní ( $\tau(x) = \tau_i$  na  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ ), zjistíme:

$$[A]_{i-1,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tau(x) e_{i-1}'(x) e_i'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tau(x) \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \left(-\frac{1}{x_i - x_{i-1}}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tau(x) dx = -\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \tau_{i-1}$$

$$[A]_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tau(x) (e_i'(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tau(x) (e_i'(x))^2 dx =$$

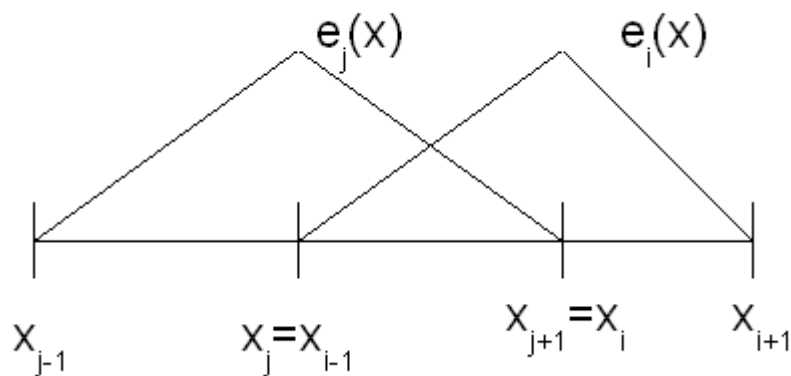
$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tau(x) \left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tau(x) \left(-\frac{1}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tau(x) dx + \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tau(x) dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \tau_{i-1} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \tau_i$$

$$[A]_{i+1,i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tau(x) e_i'(x) e_{i+1}'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tau(x) \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \left(-\frac{1}{x_i - x_{i-1}}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tau(x) dx = -\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \tau_i$$

$$[A]_{i,j} = 0 \quad \text{pro } i - j \neq -1, 0, 1$$



Obr. 8: Sousední funkce báze

Vektor  $\bar{b}$  vyjde:

$$\begin{aligned}
 [\bar{b}]_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) e_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) e_i(x) dx \approx \\
 &\approx f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) e_i\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) (x_i - x_{i-1}) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) e_i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) (x_{i+1} - x_i)
 \end{aligned}$$

Předpokládáme, že  $f(x) = f_i$  na  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ . Z tvaru  $e_i(x)$  vyplývá  $e_i\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) = \frac{1}{2}$  a proto vektor

$$\bar{b} \text{ přibližně odpovídá: } f_{i-1} \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1}) + f_i \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

## 5 Zjemňování sítě

Zjemňování sítě je důležitou částí diskretizace. Zvyšuje přesnost výpočtu dělením úseků diskretizace. Zjemňování můžeme provést buď stejnoměrně, nebo pouze na místech s velkou chybou.

### 5.1 Stejnoměrné zjemňování sítě

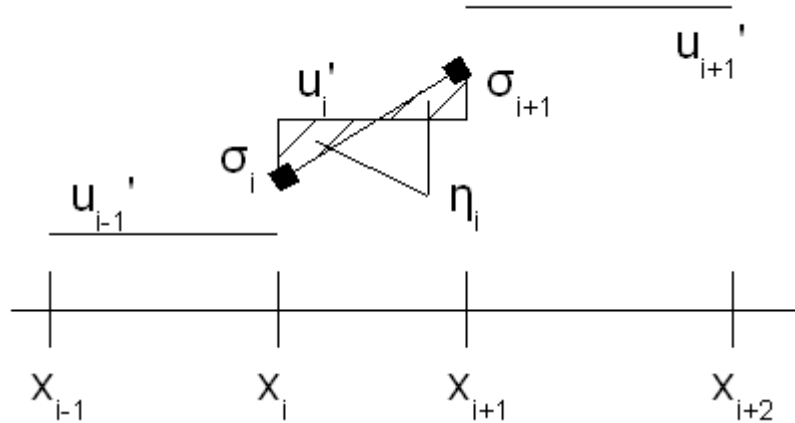
Při stejnoměrném zjemňování sítě všechny úseky diskretizace rozdělíme na polovinu. Při tomto se přibližné řešení nejrychleji blíží přesnému. Nevýhodou je velký nárůst nových bodů.

### 5.2 Adaptivní zjemňování sítě

U adaptivního zjemňování se vybírají úseky s největším odhadem chyby a ty rozdělíme na polovinu. Důležité je správně zjistit chybu oproti přesnému řešení, aby byly zjemňované správné úseky. Oproti stejnoměrnému zjemňování sice nedostaneme odpovídající přesnost na stejný počet kroků, ale při správném výpočtu chyby získáme vyšší přesnost na stejný počet úseků.

#### 5.2.1 Odhad chyby průměrováním

Při odhadu chyby průměrováním konstruujeme spojitou aproximaci  $\sigma_h$  z  $u'$  ve dvou krocích. V každém uzlu diskretizace nechť je  $\sigma_h$  vážený průměr gradientů  $u_h'$  na sousedních úsečkách, kde váha záleží na délce úsečky. Rozšíříme  $\sigma_h$  na celý úsek pomocí lineární interpolace. Pak podle Zienkiewicze a Zhu [1] použijeme rozdíl mezi  $\sigma_h$  a  $u_h'$  jako odhad chyby.



Obr. 9: Odhad chyby průměrováním

$$\eta_i = |u'_i - \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1})|,$$

$$\text{kde } \sigma_i = \frac{(x_i - x_{i-1})u'_{i-1} + (x_{i+1} - x_i)u'_i}{(x_i - x_{i-1}) + (x_{i+1} - x_i)}$$

## 5.2.2 Reziduální odhad chyby

Odhad chyby je dán vzorcem

$$\eta_{T_i} = \sqrt{(R_{T_i})^2 + \frac{1}{2}((R_{x_i})^2 + (R_{x_{i+1}})^2)}$$

kde

$$(R_{T_i})^2 = (h_i)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)^2 dx$$

$$(R_{x_i})^2 = (u'(x_{i+}) - u'(x_{i-}))^2$$

Ilustrujeme, jak tyto členy vzniknou následující aplikací integrace per-partes:

$$\int_0^l u' v' = \int_0^l f v \quad \forall v \in V \quad \int_0^l u_h' v_h' = \int_0^l f v_h \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\int (u - u_h)' v' = \int f v - \int u_h' v' = \int f v - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h' v' =$$

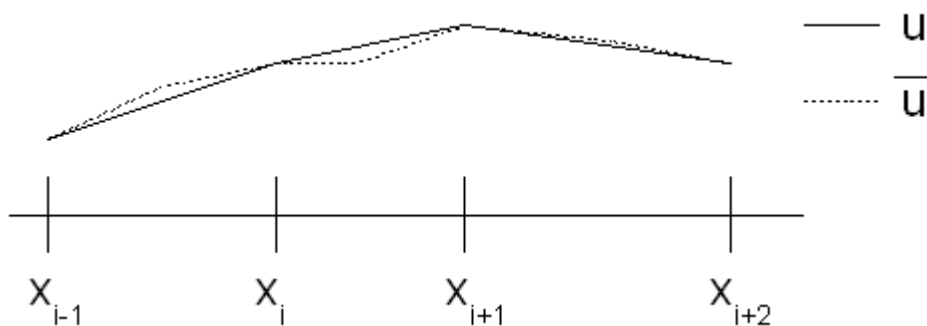
$$\stackrel{\text{per partes}}{=} \int f v + \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h'' v - [u_h' v]_{x_i}^{x_{i+1}} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f + u_h'') v + \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_h' \rangle_{x_i} v(x_i)$$

Pro volbu po částech lineární báze funkcí:  $u_h'' = 0$  takže  $R_{T_i}$  vznikne z  $\int f(x) v$  a

$$R_{x_i} \text{ vznikne z } \langle u_h' \rangle_{x_i} v(x_i) \text{ kde } \langle u_h' \rangle_{x_i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} u_h'(x_i + \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} u_h'(x_i - \varepsilon)$$

### 5.2.3 Odhad chyby s využitím stejnoměrného mezikroku

Při tomto odhadu chyby v každém kroku nejdřív uděláme stejnoměrné zjemnění, na tomto zjemnění znovu vyřešíme úlohu a poté odhadujeme chybu dle rozdílu mezi zjemněným a původním odhadem. Zjemníme pak znovu původní síť a to pouze tam, kde je indikátor chyby velký.



Obr. 10: Využití stejnoměrného mezikroku

$$A \cdot \bar{u} = \bar{b} \quad \text{na síti } \tau$$

$$A_s \cdot \bar{u}_s = \bar{b}_s \quad \text{na stejnoměrně zjemněné síti } \tau_s$$

$$\eta_i = \left| \bar{u} \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) - u \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right| (x_{i+1} - x_i)$$

## 6 Porovnání metod

Při porovnání použitých metod jsem srovnával řešení pomocí stejnoměrného zjemňování a pomocí zjemňování adaptivního na stejné metodě numerického řešení. U adaptivního zjemnění jsem vyzkoušel tři výše uvedené metody odhadu chyby. Srovnával jsem pomocí chyby určené jako:

$$E = \sqrt{\int_0^1 (u - u_h)^2 + (u' - u_h')^2}$$

Ke srovnání jsem používal tři funkce zatížení:

$$f_1(x) = \begin{cases} -64x^2 + 16x + 1 & x \in \langle 0, \frac{1}{4} \rangle \\ 1 & x \in \langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle \\ -64x^2 + 112x - 47 & x \in \langle \frac{3}{4}, 1 \rangle \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2\sin(2\pi(x - \frac{1}{4})) & x \in \langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

U každého srovnání jsou dva grafy. Na prvním je zeleně nakreslena funkce a modře jsou naznačena místa adaptivního zjemňování, aby bylo vidět, kde daná metoda zjišťuje největší chybu a snaží se ji zjemnit. Na druhém je načrtnuto, jak klesá chyba se zvyšováním počtu dělení, zeleným je stejnoměrné a modrým adaptivní zjemnění.

### 6.1 Metoda konečných diferencí

#### 6.1.1 Odhad chyby průměrováním

Na Obr. 11 vidíme, že dělení není prováděno rovnoměrně, ale soustředí se v určitých místech, které ale nejspíš nebyly nejvhodněji zvoleny, protože vidíme, že přesnost je mnohem horší než u stejnoměrného dělení. U Obr. 12 je přesnost už vyšší, ale při větším počtu úseků je opět lepší stejnoměrné zjemňování. Dělení je prováděno především v oblasti, kde je síla nenulová, stejně jako u Obr. 13. U něj dokonce přesnost při vyšších počtech úseků je lepší u

adaptivního řešení. Vidíme, že použití jedné metody není ve všech případech stejně výhodné.

### **6.1.2 Reziduální odhad chyby**

U Obr. 14 a Obr. 15 vidíme, že u reziduálního odhadu chyby má největší význam velikost hustoty síly v daném místě, takže na těchto místech máme největší soustředění dělení. U Obr. 16, kde hustota zátěže dosahuje dvou hodnot, se většina dělení soustředí přibližně rovnoměrně pod vyšší hodnotou. Lze též vidět, že u zátěže s více rozdílným uspořádáním je tato metoda přesnější, ale i v těchto případech je jen srovnatelná se stejnoměrnou.

### **6.1.3 Odhad chyby s využitím stejnoměrného mezikroku**

U této metody na Obr. 17, 18 a 19 vidíme, že výsledky jsou o trochu horší než u stejnoměrné metody, i když z ní vychází. Dělení se částečně soustřeďuje u maxim jako u reziduálního, ale není to úplně stejné.

## **6.2 Metoda konečných prvků**

### **6.2.1 Odhad chyby průměrováním**

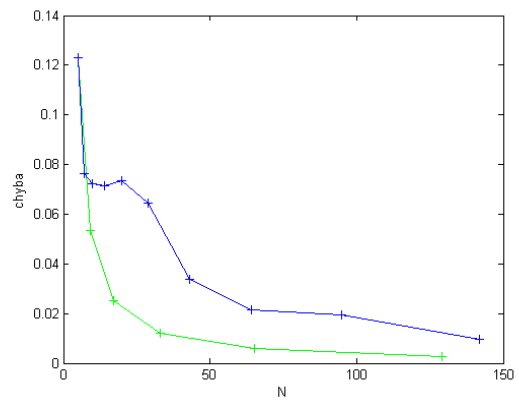
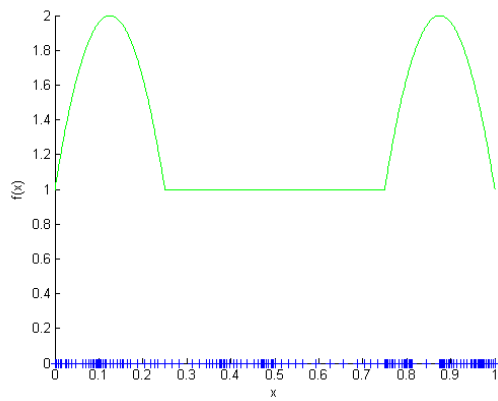
Tato metoda se na mnou vyzkoušených zátěžích jeví jako vysoce neefektivní, protože vychází daleko hůře než stejnoměrná a vypadá to, že chyba neklesá pod určitou úroveň.

### **6.2.2 Reziduální odhad chyby**

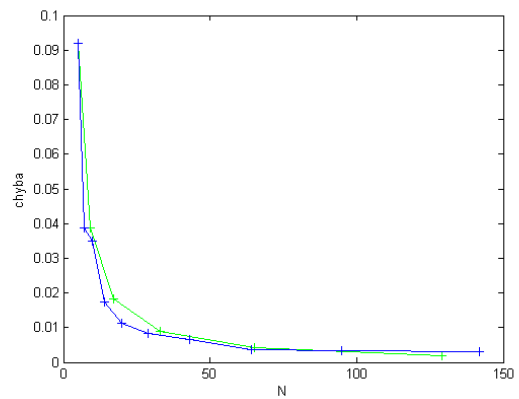
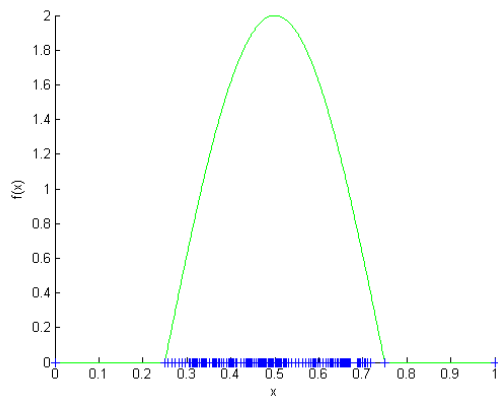
U Obr. 23-25 opět vidíme soustředění dělení v oblasti maxim zatížení, ale na rozdíl od použití metody konečných diferencí máme nejmenší přesnost hustoty sil, která nemá nulovou hodnotu. Tato metoda patří k přesnějším vyzkoušeným metodám a pro zátěž s nulovou hodnotou je viditelně lepší než stejnoměrná.

### **6.2.3 Odhad chyby s využitím stejnoměrného mezikroku**

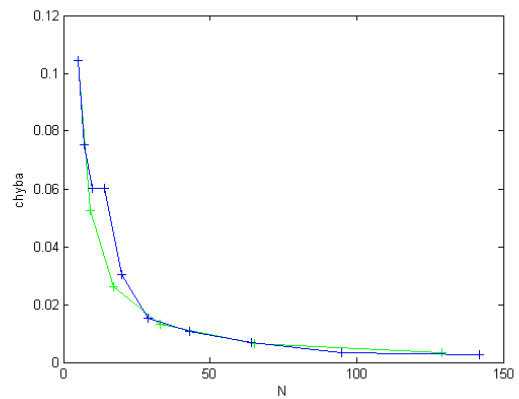
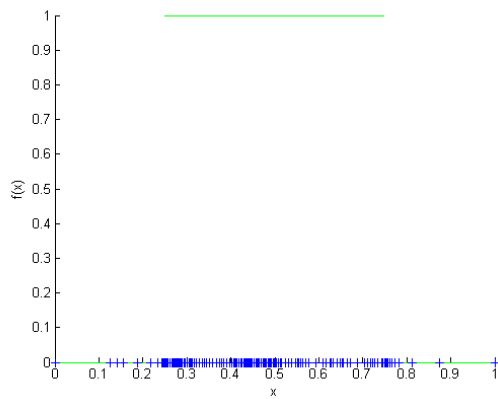
Výsledky této metody se velmi podobají předešlé pouze s mírným rozdílem v dělení.



Obr. 11: MKD průměrování  $f_1$

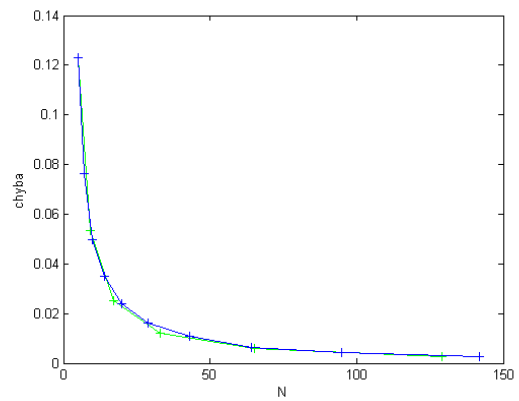
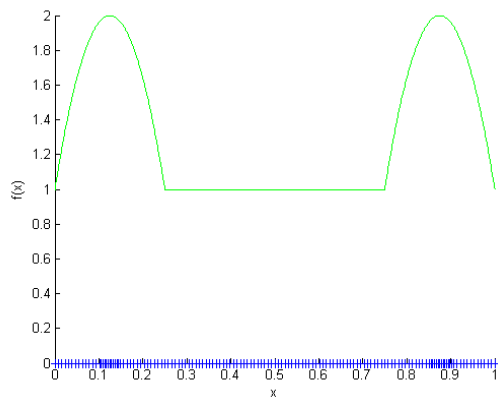


Obr. 12: MKD průměrování  $f_2$

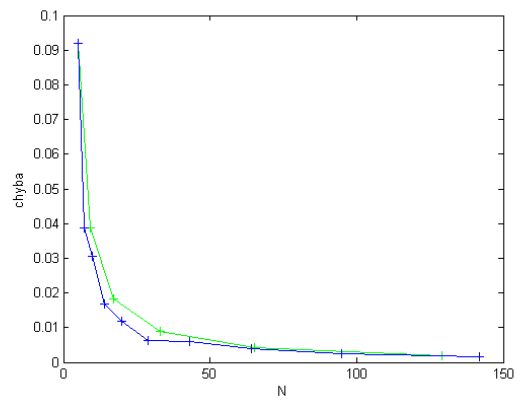
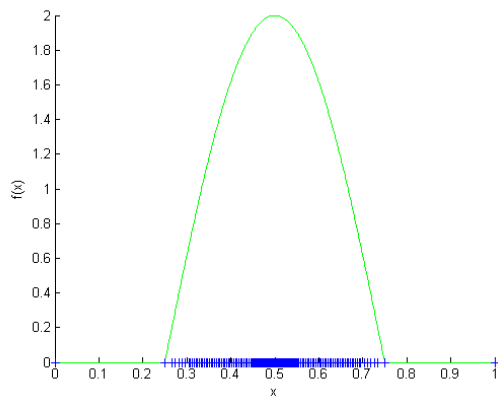


Obr. 13: MKD průměrování  $f_3$

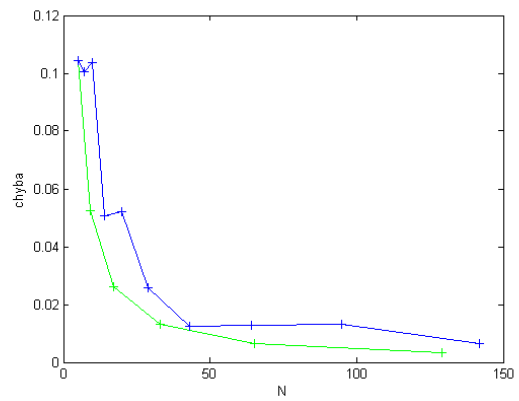
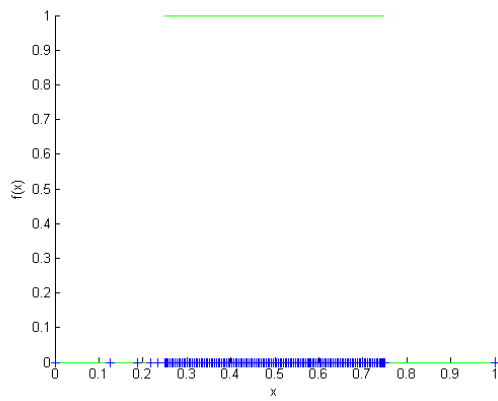




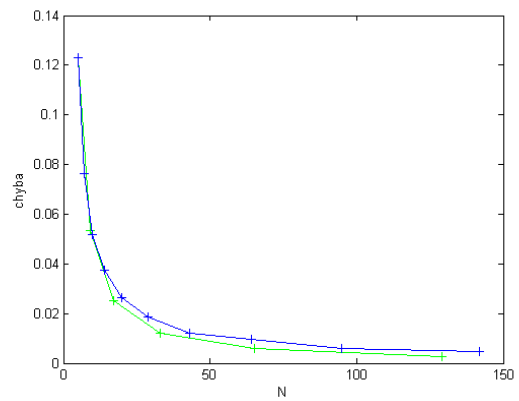
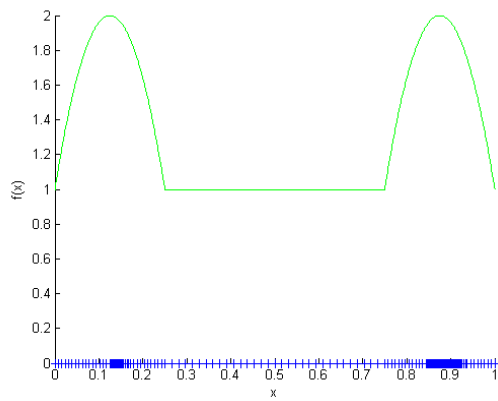
Obr. 14: MKD reziduální  $f_1$



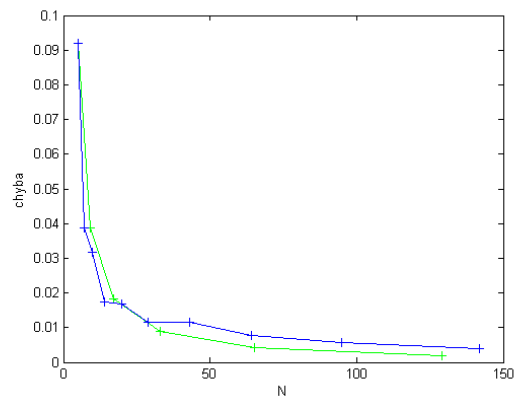
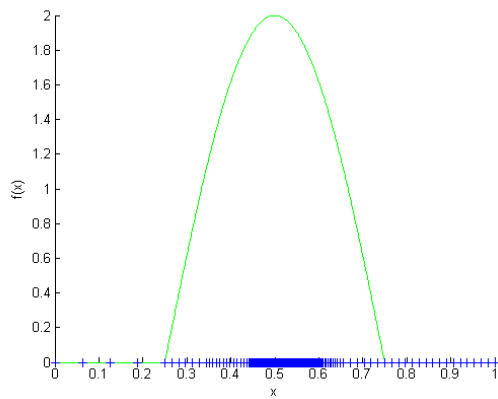
Obr. 15: MKD reziduální  $f_2$



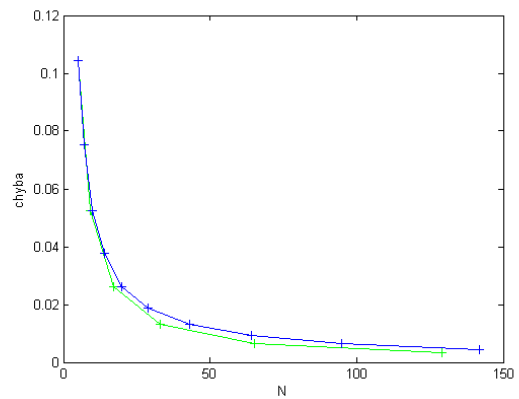
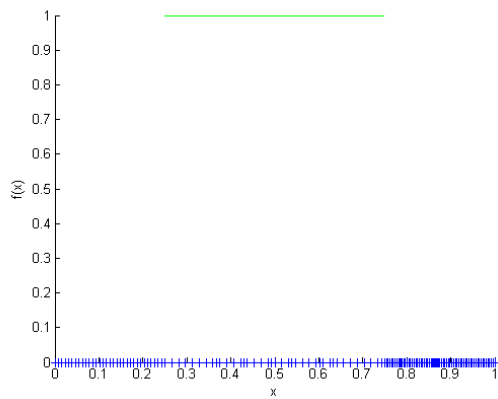
Obr. 16: MKD reziduální  $f_3$



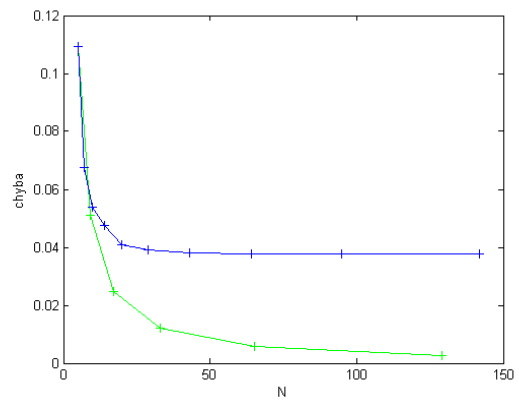
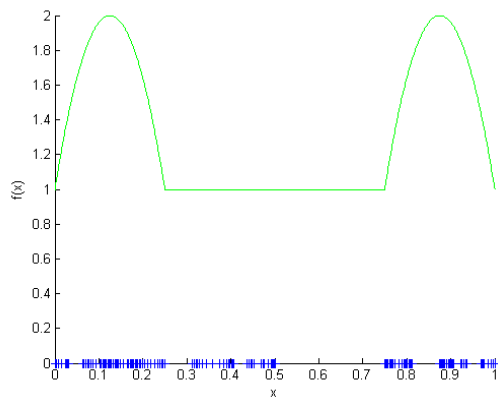
Obr. 17: MKD mezikrok  $f_1$



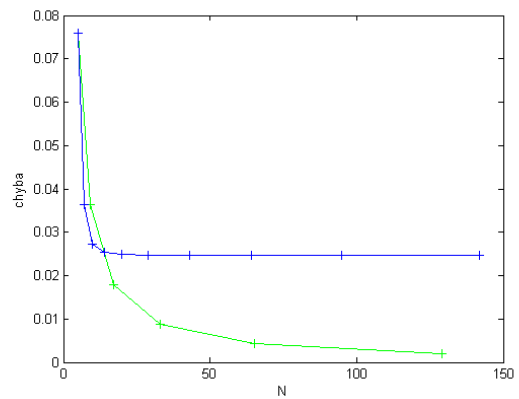
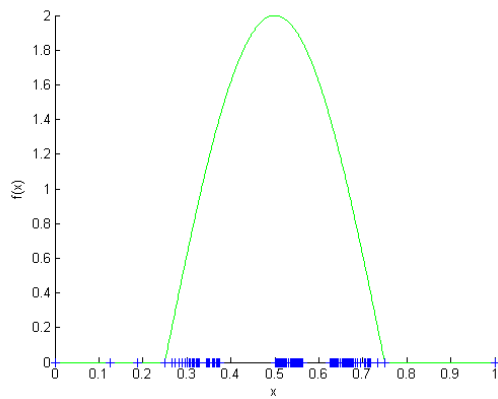
Obr. 18: MKD mezikrok  $f_2$



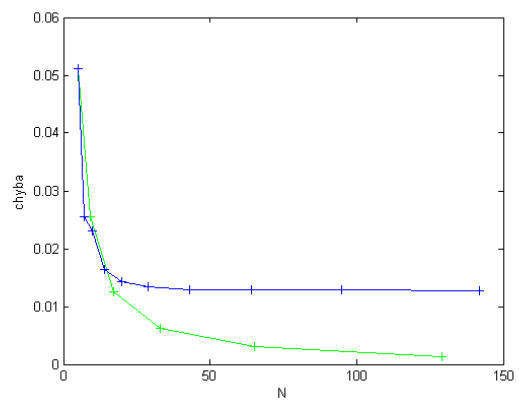
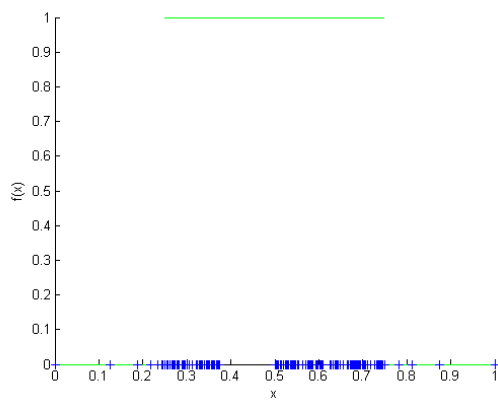
Obr. 19: MKD mezikrok  $f_3$



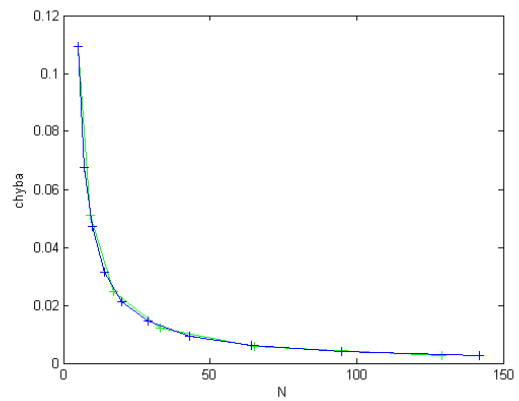
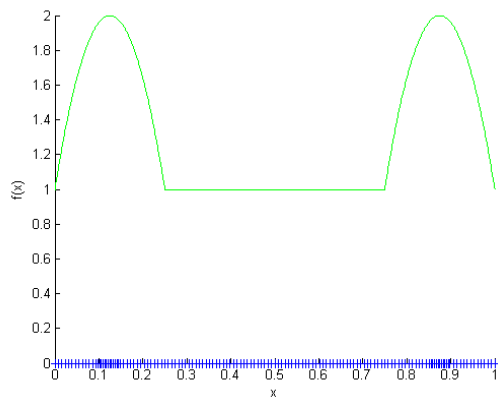
Obr. 20: MKP průměrování  $f_1$



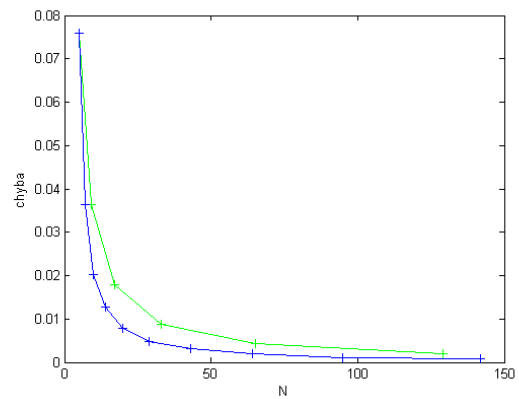
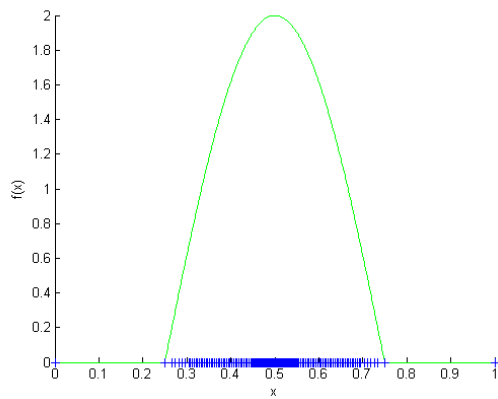
Obr. 21: MKP průměrování  $f_2$



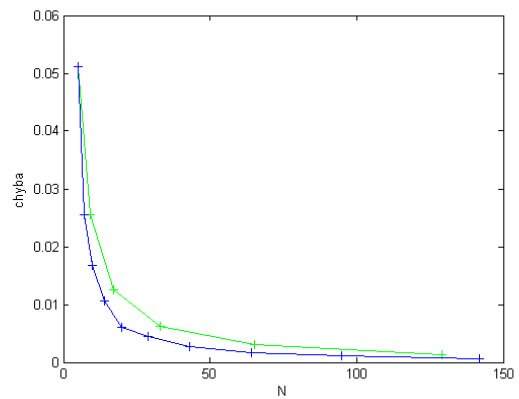
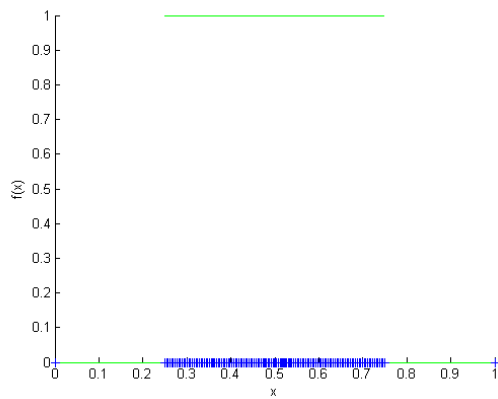
Obr. 22: MKP průměrování  $f_3$



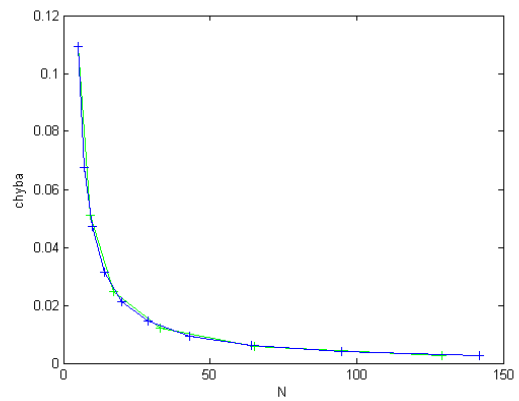
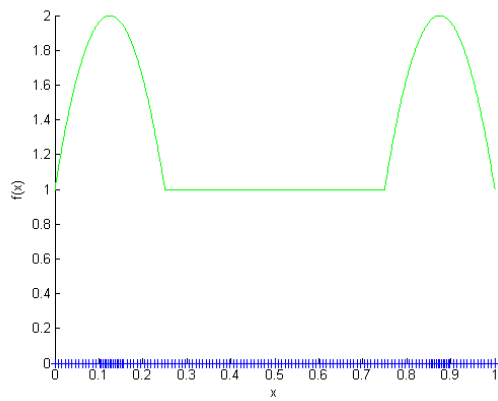
Obr. 23: MKP reziduální  $f_1$



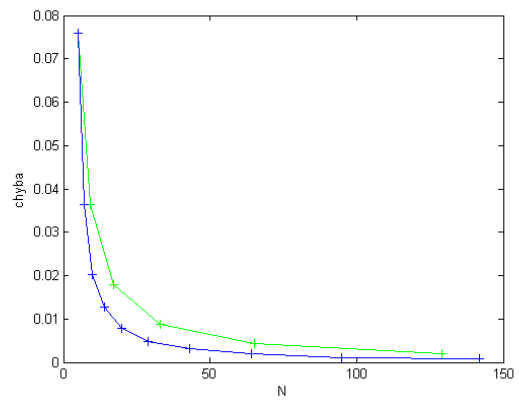
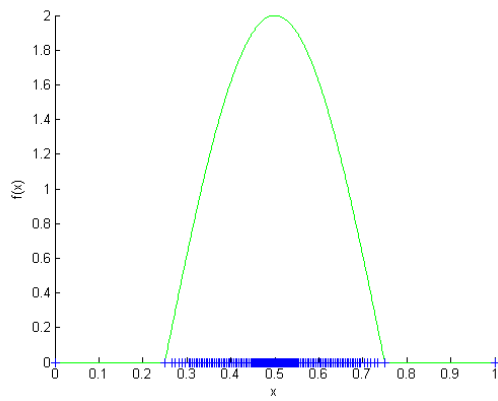
Obr. 24: MKP reziduální  $f_2$



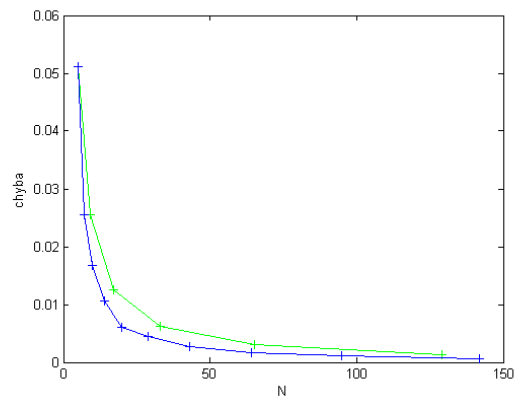
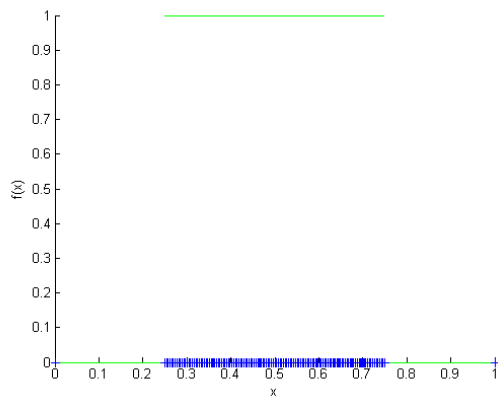
Obr. 25: MKP reziduální  $f_3$



Obr. 26: MKP mezikrok f1



Obr. 27: MKP mezikrok f2



Obr. 28: MKP mezikrok f3

## 7 Závěr

Tato práce popisuje některé metody umožňující řešení zadaného problému. Tyto metody byly vyzkoušeny v Matlabu. Bylo zjištěno, že výhodnost jednotlivých metod se liší dle zadané hustoty zátěžových sil. Cílem práce bylo seznámení se s metodami adaptivního řešení. Bohužel v 1D nelze pozorovat výraznou výhodu adaptivních zjemňování.

## 8 Literatura

- [1] O. C. Zienkiewicz a J. Z. Zhu (1987), A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 24, str. 337-357
- [2] D. Braess, *Finite elements*, second edition, Cambridge Univerzity Press, 2001
- [3] J. Bouchala, *Matematická analýza I.*, skripta VŠB-TUO, 2000