

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2007

Vojtěch Sokol

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2007

Vojtěch Sokol

Zadání bakalářské práce

Téma:	Simulace 1-rozměrné vlny při protržení přehrady
Diplomant:	Vojtěch Sokol
Vedoucí:	Ing. Dalibor Lukáš, Ph.D.
Akademický rok:	2006/2007
Obor:	1103R021 Počítačová matematika

Zásady pro vypracování:

Dynamika tekutin je popsána Navier-Stokesovými rovnicemi a je jednou z nejobtížnějších oblastí výpočetní matematiky. Cílem této práce je numericky řešit 1-dimenzionální případ, který dobře popisuje rázovou vlnu při protržení přehrady, kdy počáteční podmínka je dána skokovým rozdílem v hladinách. Výsledky nám pomohou pochopit více-dimenzionální případy.

Práce bude zahrnovat:

1. studium fyziky proudění kapalin,
2. formulaci modelové 1-dimenzionální úlohy,
3. numerické řešení metodou konečných diferencí,
4. analýzu závislosti řešení na viskozitě.

Seznam odborné literatury:

1. P. Drábek, G. Holubová - Parciální diferenciální rovnice, Úvod do klasické teorie, ZČU Plzeň, 2001.
2. R. Feynman, R. Leighton, M. Sands - Feynmanovy přednášky z fyziky 2/3, Fragment, 2002.
3. R. Hinkelmann - Efficient Numerical Methods and Information-Processing Techniques for Modeling Hydro- and Environmental-Systems, Springer-Verlag, 2005.
4. E. Vitásek - Numerické metody, SNTL Praha, 1987.

Prohlášení o autorství

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě dne 9. května 2007

.....
Vojtěch Sokol

Abstrakt

Při simulaci 1-rozměrné vlny při protržení přehrady musíme vycházet z Navier-Stokesových rovnic popisujících dynamiku tekutin a dále z rovnice kontinuity popisující zákon zachování hmotnosti tekutiny.

Navier-Stokesovy rovnice popisující spoustu reálných dějů (například modely počasí, oceánských proudů, pohyb hvězd v galaxii, spolu s Maxwellovými rovnicemi mohou modelovat problémy magnetohydrodynamiky) jsou nelineární parciální diferenciální rovnice. Z důvodů nelinearity jsou analyticky řešitelné pouze pro úzký okruh jednoduchých případů. Náročnost obecného řešení Navier-Stokesových rovnic ilustruje i to, že nadace Clayova matematického institutu zařadila roku 2000 řešení těchto rovnic na seznam sedmi nejdůležitějších matematických problémů milénia.

Užitím vhodných zjednodušujících předpokladů můžeme od Navier-Stokesových rovnic přejít k Saint-Venantovým rovnicím popisujících proudění vody v říčních tocích (rovnice jsou také známy pod názvem rovnice mělké vody). I při tomto zjednodušení je však analytické řešení velmi náročné, proto budeme tento problém řešit pouze numericky a v jedné dimenzi.

Klíčová slova

Navier-Stokesovy rovnice, rovnice kontinuity, Saint-Venantovy rovnice, rovnice mělké vody, metoda sítí, Newton-Raphsonova metoda, numerické simulace

Seznam použitých symbolů a zkratek

$D_{ij}^{(d)}$	deviátor tenzoru rychlosti deformace [s^{-1}]
$D_{ij}^{(i)}$	izotropní část tenzoru rychlosti deformace [s^{-1}]
G_i	objemová síla [$N\ m^{-3}$]
g	místní tíhové zrychlení [$m\ s^{-2}$]
h	výška vodního sloupce [m]
h_i^j	diskretizace výšky vodního sloupce [m]
I_i	intenzita silového pole [$m\ s^{-2}$]
$k/2$	druhá viskozita [Pa s]
l	délka koryta [m]
m	hmotnost [kg]
p	tlak [Pa]
R_{n+1}	chyba Taylorova rozvoje
t	čas [s]
u_i	vektor posunutí [m]
V	objem [m^3]
v_i	rychlost [$m\ s^{-1}$]
v_i^j	diskretizace rychlosti [$m\ s^{-1}$]
x_i	prostorová proměnná [m]
Δx	délka prostorového kroku [m]
Δt	délka časového kroku [s]
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
∂V	plocha vymežující objem V [m^2]
η	dynamická viskozita [Pa s]

ν	kinematická viskozita [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
ρ	hustota [kg m^{-3}]
σ_{ij}	tenzor napětí [Pa]
$\sigma_{ij}^{(d)}$	deviátor tenzoru napětí [Pa]
$\sigma_{ij}^{(i)}$	izotropní část tenzoru napětí [Pa]

Obsah

1	Úvod.....	1
2	Fyzikální model.....	2
	2.1 Navier-Stokesova rovnice.....	2
	2.2 Rovnice kontinuity.....	5
	2.3 Saint-Venantovy rovnice.....	6
3	Numerický model.....	9
	3.1 Metoda sítí.....	9
	3.2 Newton-Raphsonova metoda.....	12
4	Numerické simulace.....	14
	4.1 Výsledky simulací.....	14
5	Závěr.....	21
	Literatura.....	22

Kapitola 1

Úvod

V poslední době jsme svědky prakticky každoročních záplav. Proto není překvapivé, že stále více úsilí je věnováno simulacím takových situací jako je šíření povodňových vln. Detailní simulace těchto situací by mohly pomoci například při minimalizaci škod způsobených šířením povodňových vln plánováním zástavby mimo záplavová území.

Cílem této práce je numericky simulovat šíření 1-dimenzionální vlny při přetržení přehrad. Tato úloha dobře popisuje rázovou vlnu při protržení přehrad, kdy počáteční podmínka je dána skokovým rozdílem v hladinách. Výsledky těchto simulací nám pomohou pochopit více-dimenzionální případy.

Práce bude rozdělena do následujících kapitol:

Ve druhé kapitole se budeme zabývat odvozením Navier-Stokesových rovnic (popisují proudění newtonovské viskózní kapaliny), rovnice kontinuity (popisuje zákon zachování hmotnosti tekutiny). Užitím jistých zjednodušení a předpokladů pak z Navier-Stokesových rovnic odvodíme Saint-Venantovy rovnice (také známy jako rovnice mělké vody).

Třetí kapitola je věnována metodám pro numerické řešení Saint-Venantových rovnic odvozených v předchozí kapitole. Konkrétně se bude jednat o metodu sítí a v návaznosti na ní také o Newton-Raphsonovu metodu použitou k řešení rovnic vzniklých užitím metody sítí.

Nakonec ve čtvrté kapitole se budeme věnovat výsledkům numerických simulací. Porovnáme tyto výsledky s předpokládaným chováním systému a všimneme si také závislosti řešení na viskozitě. Zmíníme také hypotézu, která by mohla vysvětlovat naše pozorování.

Kapitola 2

Fyzikální model

Navier-Stokesovy rovnice spolu s rovnicí kontinuity (a pro stlačitelnou kapalinu i s funkcí závislosti hustoty kapaliny na tlaku $\rho = \rho(p)$) tvoří úplný systém rovnic pro popis pohybu newtonovských viskózních kapalin. V následující kapitole se budeme proto věnovat jejich odvození a také interpretaci. Neuvedeme-li jinak, budeme všechny proměnné vyskytující se v textu uvažovat závislé na prostorové proměnné i na času. Dále bude užívat Einsteinovu sumační konvenci: vyskytne-li se ve výrazu nějaký index právě dvakrát, budeme tím rozumět sumaci přes tento index, aniž bychom vypisovali sumační znak a sumační meze. Sumační meze budeme uvažovat pro trojrozměrný prostor, tedy od 1 do 3. V této kapitole budeme vycházet z [1], [2], [3], u podkapitoly týkající se Saint-Venantových rovnic i z [4].

2.1 Navier-Stokesova rovnice

Navier-Stokesovu rovnici popisující proudění newtonovské viskózní kapaliny odvodili nezávisle na sobě francouzský matematik a fyzik Claude-Louis Navier v roce 1822 a irský matematik a fyzik George Gabriel Stokes v roce 1845.

Způsobů, jak odvodit Navier-Stokesovu rovnici, je více – jednou z možností je vyjít z pohybové rovnice kontinua:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2}, \quad (2.1)$$

kde σ_{ij} je tenzor napětí, G_i je objemová síla (například buzená elektrickým či magnetickým polem) a u_i je vektor posunutí.

Levá strana rovnice vyjadřuje síly působící na kapalinu, pravá pak zrychlení kapaliny. Pro ideální kapalinu, ve které nepůsobí viskózní síly (tzn. že neexistují smyková napětí), platí pro tenzor napětí vztah

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p, \quad (2.2)$$

kde δ_{ij} je kroneckerovo delta¹ a p je tlak. Z rovnice (2.2) tedy vyplývá, že napětí má pouze čistě tlakové/tahové složky. Dosazením (2.2) do rovnice (2.1), nahrazením zrychlení $d^2 u_i / dt^2$

¹ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$

derivací rychlosti podle času, derivováním složené funkce $v(x(t), t)$:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (2.3)$$

a vydělením rovnice hustotou ρ dostaneme Eulerovu hydrodynamickou rovnici, kde člen G_i/ρ značí intenzitu silového pole I_i

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + I_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t} . \quad (2.4)$$

Tato rovnice však popisuje pouze proudění neviskózní kapaliny. V reálné kapalině ale existují smyková napětí, která vznikají pohybují-li se dvě sousední vrstvy kapaliny různou rychlostí. Označíme-li takto vzniklá napětí σ'_{ij} a rozložíme-li tento tenzor na jeho deviátor a izotropní část², bude pro celkové napětí platit vztah

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \sigma'_{ij} = -\delta_{ij} p + \sigma'^{(i)}_{ij} + \sigma'^{(d)}_{ij} . \quad (2.5)$$

Za předpokladu že kapalina je viskózní, můžeme podle Newtonova viskózního zákona nahradit deviátor tenzoru napětí deviátorem tenzoru rychlosti deformace:

$$\sigma'^{(d)}_{ij} = 2\eta D_{ij}^{(d)} , \quad (2.6)$$

kde η značí dynamickou viskozitu kapaliny. Dále budeme předpokládat, že izotropní část tenzoru napětí je úměrná izotropní části tenzoru rychlosti deformace³, tedy

$$\sigma'^{(i)}_{ij} = k D_{ij}^{(i)} . \quad (2.7)$$

Oba parametry η i k uvažujeme konstantní.

Dosadíme-li do (2.5) z (2.6) a (2.7) a využijeme-li rozkladu tenzoru na izotropní část a deviátor, můžeme napětí pro newtonovskou viskózní kapalinu přepsat na tvar

2 Nechť γ_{ij} je symetrický tenzor druhého řádu. Pak existuje rozklad na jeho izotropní část $\gamma^{(i)}_{ij}$ a deviátor $\gamma^{(d)}_{ij}$:

$$\gamma_{ij} = \gamma^{(i)}_{ij} + \gamma^{(d)}_{ij} = \frac{1}{3} \gamma_I \delta_{ij} + \left(\gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_I \delta_{ij} \right)$$

kde γ_I je první invariant tenzoru γ_{ij} :

$$\gamma_I = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}$$

3 Pro $k/2$ se obvykle užívá názvu druhá viskozita. Charakterizuje viskózní odpor proti objemovým změnám. Všechny členy s tímto koeficientem by tedy u nestlačitelné kapaliny měly vymizet, což se ukáže dále.

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \frac{k-2\eta}{3} \delta_{ij} D_I + 2\eta D_{ij}. \quad (2.8)$$

Složky tenzoru rychlosti deformace jsou dány výrazy

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.9)$$

Využitím tohoto vzorce můžeme přepsat první invariant tenzoru rychlosti deformace na tvar

$$D_I = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (2.10)$$

Pro nestlačitelnou kapalinu je tento výraz nulový⁴, a proto se nám rovnice (2.8) zjednoduší na tvar

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + 2\eta \cdot D_{ij}. \quad (2.11)$$

Eliminovat se tedy člen charakterizující viskózní odpor proti objemovým změnám, které se u nestlačitelné kapaliny nevyskytují.

Dosazením vyjádření (2.11) tenzoru napětí do pohybové rovnice kontinua (2.1), vydělením rovnice hustotou ρ a užitím identity (2.3) dostáváme rovnici

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} G_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Uvažujeme-li p pouze jako hydrostatický tlak

$$p = h \rho g,$$

kde h je výška vodního sloupce a g místní tíhové zrychlení, a je-li kapalina nestlačitelná

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

dynamickou viskozitu nahradíme viskozitou kinematickou podle vzorce $\nu = \eta/\rho$, a neuvažujeme-li žádné vnější objemové síly ($G_i = 0$), dostaneme Navier-Stokesovu rovnici pro newtonovskou viskózní nestlačitelnou kapalinu v tomto tvaru:

$$-\frac{\partial h}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (2.13)$$

4 Vyplyvá z rovnice kontinuity: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$; $\rho = \text{konst.} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$

Na závěr ještě doplníme interpretaci (ve formě zrychlení) jednotlivých členů rovnice (2.13)

$\frac{\partial h}{\partial x_i}$: zrychlení způsobené tlakovým spádem

$v \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$: zrychlení potřebné k překonání viskózních sil

$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$: zrychlení způsobené změnou rychlosti v závislosti na poloze (silně se uplatňuje například u trysek)

$\frac{\partial v_i}{\partial t}$: lokální zrychlení

2.2 Rovnice kontinuity

Způsobů, jak odvodit rovnici kontinuity je také více – jednou z možností je odvodit ji ze změny hmoty v čase v pevně zvoleném objemovém elementu.

Uvažujme v prostoru pevnou plochu ∂V , kterou proudí kapalina charakterizovaná polem rychlostí \vec{v} . Hmotnost tekutiny m_1 , která za jednotku času vyteče z objemu V plochou ∂V , je dána plošným integrálem

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} = \int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \quad (2.14)$$

kde \vec{n} je vnější normála k ploše ∂V .

Změna hmotnosti m_2 obsažené v objemu V omezeného plochou ∂V za jednotku času je dána derivací objemového integrálu

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (2.15)$$

Jelikož platí zákon zachování hmotnosti, tak musí také platit

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} + \frac{\partial m_2}{\partial t} = 0. \quad (2.16)$$

Užitím rovnic (2.14) až (2.16) dostáváme

$$\int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 . \quad (2.17)$$

Podle Gaussovy věty lze první člen rovnice (2.17) přepsat na objemový integrál, a jelikož je objem V prostorově stálý v čase, lze zaměnit pořadí derivování a integrování. Rovnice (2.17) pak přejde ve tvar

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 . \quad (2.18)$$

Přepíšeme-li součet integrálů na integrál součtu a jelikož lze objem V v kapalině volit libovolně, musí být rovnice (2.18) splněna pro všechna V a to je možné jedině pokud je integrand roven identicky nule:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (2.19)$$

2.3 Saint-Venantovy rovnice

Saint-Venantovy rovnice (neboli rovnice mělké vody) se používají k popisu proudění vody říčním korytem. Použití těchto rovnic je omezeno těmito předpoklady:

- 1) hustota kapaliny je konstantní,
- 2) poměr hloubky vody k délce popisovaného úseku řeky je malý, můžeme tedy zanedbat vertikální složky rychlosti v a její velikost uvažujeme konstantní vzhledem k hloubce h ,
- 3) vertikální komponenta zrychlení je zanedbatelná (tlak je možno uvažovat hydrostatický),
- 4) v našem modelu neuvažujeme působení dalších vlivů, jako je například Coriolisova síla, tření o dno, vítr, změny množství kapaliny způsobené srážkami případně odpařováním.

Při odvozování Navier-Stokesovy rovnice (2.13) jsme již využili předpoklady 1) a 3). Dále uvažujeme pouze jednodimenzionální model. Rovnice (2.13) se tak zjednoduší na tvar:

$$-\frac{\partial h}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2.20)$$

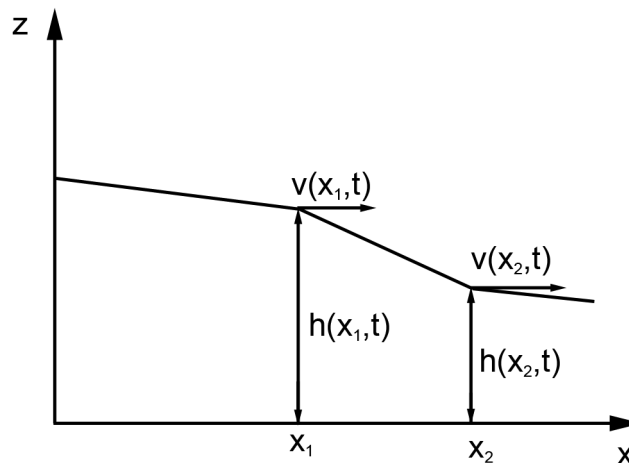
kde h je výška vodního sloupce, v je rychlost proudění kapaliny ve směru osy x (a má stejnou velikost v celém vodním sloupci) a ν je kinematická viskozita.

Rovnice kontinuity, tak jak jsme ji odvodili ve tvaru (2.19), je však v tomto případě nepoužitelná, jelikož její platnost je omezena pouze na případy, kdy se plochy, resp. objemy jimi omezené, nacházejí uvnitř kapaliny. Musíme ji proto odvodit v jiném tvaru.

Vyjdeme z integrálního tvaru zákona zachování hmotnosti:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho h dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h v) dx = 0, \quad (2.21)$$

kde první člen vyjadřuje změnu hmotnosti kapaliny v oblasti ohraničené prostorovými proměnnými x_1 , x_2 . Druhý člen vyjadřuje změnu hmotnosti kapaliny, která je způsobena vtečením, resp. vytečením, hranicí x_1 , resp. x_2 . Situaci ilustruje obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: Interpretace proměnných v 1D

Využitím předpokladu konstantnosti hustoty ρ ji můžeme ze vztahu (2.21) vyloučit.

Jsou-li funkce vystupující jako integrandy dostatečně hladké, lze parciální derivace přesunout před integraci⁵. Proto můžeme vztah (2.21) přepsat do tohoto tvaru:

5 $\frac{d}{da} \int f(x, a) dx = \int \frac{\partial f}{\partial a}(x, a) dx \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial a}(x, a)$, $f(x, a)$ jsou spojité jako funkce obou proměnných

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (h v) dx = 0 \quad (2.22)$$

Ze stejných důvodů jako u rovnice (2.18) můžeme přejít k diferenciálnímu tvaru rovnice (2.22):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h v) . \quad (2.23)$$

Kapitola 3

Numerický model

Hledání analytického řešení mnoha problémů matematické fyziky je velmi komplikované, ne-li dokonce nemožné. Proto se k řešení využívá některé z numerických metod, zvláště v dnešní době, kdy masivní rozšíření výpočetní techniky dovoluje využívat stále přesnějších a dokonalejších numerických metod. V této kapitole bude vycházet z [5], resp. [6], pro podkapitulu týkající se metody sítí, resp. Newton-Raphsonovy metody.

3.1 Metoda sítí

Základní myšlenka metody sítí spočívá v nahrazení derivací hledané funkce, které se vyskytují v řešené diferenciální rovnici, diferenčními podíly (odtud se metoda někdy nazývá metoda konečných diferencí). Proto si v oblasti, ve které hledáme řešení diferenciální rovnice, zvolíme konečnou množinu bodů, jež nazveme sítí. Jednotlivé body sítě se nazývají uzly a právě v těchto bodech nahradíme derivace diferenčními podíly. Diferenčními podíly rozumíme aproximaci derivace lineární kombinací funkčních hodnot v daném bodě, případně v bodech z blízkého okolí. Nejjednodušší diferenční podíly můžeme odvodit přímo z definice derivace pomocí limit, a to tím, že derivaci aproximujeme vypuštěním limity. Názornější je však odvození z Taylorova rozvoje, u kterého máme i informaci o chybě aproximace:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}. \quad (3.1)$$

Pokud rozepíšeme sumu pro $n=l$ a jako R_{n+1} vezmeme Lagrangeův tvar zbytku

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)}; \xi \in (x, a), \quad (3.2)$$

můžeme po úpravách derivaci funkce f v bodě a aproximovat výrazem⁶

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} + O((x-a)). \quad (3.3)$$

6 $f(x) \in O(g(x)) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Uvažujme systém parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.5)$$

se zákonem zachování hmoty

$$\int_0^l h(x, t) dx = S, \quad (3.6)$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= 0 \quad \forall x \in [0, l] \\ h(x, 0) &= h_1; x < a \left. \begin{array}{l} h_1 > 0; h_2 > 0; a \in (0, l) \\ = h_2; x \geq a \end{array} \right\} h_1 \cdot a + h_2 (l - a) = S \end{aligned} \quad (3.7)$$

a s okrajovými podmínkami

$$v(0, t) = v(l, t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.8)$$

Definujme diskretizační síť s ekvidistantním krokem takto:

$$x_i = i \cdot \Delta x; i \in \{0, 1, \dots, n\}; \Delta x = \frac{l}{n}, \quad (3.9)$$

$$t_j = j \cdot \Delta t; j \in \{0, 1, \dots, m\}; \Delta t = \frac{T}{m}. \quad (3.10)$$

Potom funkce $v(x, t)$ a $h(x, t)$ nabývají v uzlech sítě těchto hodnot

$$v_i^j = v(x_i, t_j), \quad (3.11)$$

$$h_i^j = h(x_i, t_j). \quad (3.12)$$

Pro aproximaci prvních derivací budeme využívat zpětných diferencí

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (3.13)$$

a pro aproximaci druhých derivací budeme využívat dopředných diferencí

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}. \quad (3.14)$$

Užitím vztahů (3.11) – (3.14) můžeme aproximovat první a druhé derivace funkce $v(x,t)$ takto

$$\frac{\partial v_i^j}{\partial x} \approx \frac{v_i^j - v_{i-1}^j}{\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 v_i^j}{\partial x^2} \approx \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial v_i^j}{\partial t} \approx \frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial^2 v_i^j}{\partial t^2} \approx \frac{v_i^{j+1} - 2v_i^j + v_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3.16)$$

a obdobně pro funkci $h(x,t)$.

Užitím výše uvedených aproximací na rovnice (3.4) – (3.6) a podmínky (3.7) a (3.8) dostáváme soustavu nelineárních diferencních rovnic:

$\forall j \geq 1$:

$$\frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{\Delta t} - v_i^j \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + v_i^j \frac{v_i^j - v_{i-1}^j}{\Delta x} + g \frac{h_i^j - h_{i-1}^j}{\Delta x} = 0, \quad (3.17)$$

$pro i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\frac{h_i^j - h_{i-1}^j}{\Delta t} + v_i^j \frac{h_i^j - h_{i-1}^j}{\Delta x} + h_i^j \frac{v_i^j - v_{i-1}^j}{\Delta x} = 0 \quad pro i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\Delta x}{2} (h_0 + 2h_1 + \dots + 2h_{n-1} + h_n) = 0, \quad (3.19)$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} v_i^0 &= 0, 1, \quad pro i \in \{0, 1, \dots, n\} \\ h_i^0 &= h_1; x < a \left\{ \begin{array}{l} h_1 > 0; h_2 > 0; a \in (0, l) \\ = h_2; x \geq a \end{array} \right. \\ &= h_2; x \geq a \left\{ \begin{array}{l} h_1 \cdot a + h_2(l-a) = S \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.20)$$

a s okrajovými podmínkami

$$v_0^j = 0; v_n^j = 0 \quad pro j \in \{0, 1, \dots, m\}. \quad (3.21)$$

Tímto dostáváme soustavu $2(n+1)$ nelineárních rovnic o $2(n+1)$ neznámých, které budeme řešit Newton-Raphsonovou metodou.

3.2 Newton-Raphsonova metoda

Nechť je dána rovnice

$$F(x) = 0; F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Ekvivalentními úpravami ji můžeme převést na tvar $x = x + \lambda(x) \cdot F(x)$.

Hledání kořene rovnice (3.22) je tedy ekvivalentní k hledání pevného bodu zobrazení

$$G(x) = x + \lambda(x) \cdot F(x), \quad (3.23)$$

a iterační předpis bude tohoto tvaru:

$$x_{n+1} = G(x_n) = x_n + \lambda(x_n) \cdot F(x_n). \quad (3.24)$$

Po Newton-Raphsonově metodě požadujeme, aby byla řádu dvě, první nenulová derivace $G(x)$ musí být tedy také řádu dvě⁷. Derivováním pravé strany rovnice (3.23) a dosažením řešení rovnice (3.22) tedy dostáváme podmínku na koeficient $\lambda(x)$:

$$\lambda(x) = -\frac{1}{F'(x)}. \quad (3.25)$$

Dosažením do rovnice (3.23) tedy získáváme iterační předpis pro hledání pevného bodu zobrazení (3.23) těmito iteracemi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}. \quad (3.26)$$

Uvažujeme-li soustavu rovnic

$$\vec{F}(x) = \vec{0}; F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (3.27)$$

můžeme iterační schéma (3.25) přepsat do tohoto tvaru:

7 Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost aproximací kořene rovnice (3.22) a x^* je kořen této rovnice. Řekneme, že iterační metoda je řádu ℓ tehdy a jen tehdy, platí-li následující nerovnost:

$$\exists C > 0: |x^* - x_{n+1}| \leq C |x^* - x_n|^\ell \text{ pro } n = 0, 1, \dots$$

Označme chybu aproximace $e_{n+1} = x_{n+1} - x^*$ a rozviňme ji Taylorovým rozvojem v okolí bodu x^* :

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = G(x_n) - G(x^*) = -G'(x^*) \cdot (x_n - x^*) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{G^{(k)}(x^*)}{k!} \cdot (x_n - x^*)^k.$$

Využitím Lagrangeova tvaru zbytku pak chybu aproximace můžeme vyjádřit takto:

$$e_{n+1} = \sum_{k=1}^m \frac{G^{(k)}(x^*)}{k!} \cdot e_n^k + \frac{G^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \cdot e_n^{m+1}; \xi \in (\min(x_n, x^*), \max(x_n, x^*)).$$

Pokud jsou derivace $G(x)$ v bodě x^* rovny nule až do řádu m , závisí chyba aproximace e_{n+1} pouze na $(m+1)$ -ní derivaci $G(x)$ v bodě x^* . Řád metody tedy závisí na řádu první nenulové derivace $G(x)$ v bodě x^* .

$$x^{k+1} = x^k - [F'(x^k)]^{-1} \cdot F(x^k), \quad (3.28)$$

kde $F'(x^k)$ je Jakobián matice $F(x^k)$. V každé iteraci je tedy třeba počítat inverzi matice, což je zvláště při větších soustavách výpočetně velmi náročné, iterace se proto počítají takto:

$$F'(x^k) \Delta x^k = -F(x^k), \quad (3.29)$$

$$\Delta x^k = x^{k+1} - x^k. \quad (3.30)$$

V rovnici (3.28) řešíme lineární soustavu rovnic, což je v poměru k počítání inverze matice výpočetně levná záležitost.

Na závěr ještě doplníme symbolický zápis Newton-Raphsonovy metody:

funkce Newton-Raphson(x_0, its, eps)

```
fx = vyhodnoť funkci f(x0);
dfx = vyhodnoť jakobián funkce f(x0);
dx = vyřeš soustavu dfx · dx = fx;
x = x + dx;
it = 1;
```

Dokud (norma(dx) >= eps) a zároveň (it < its) opakuj:

```
fx = vyhodnoť funkci f(x);
dfx = vyhodnoť jakobián funkce f(x);
dx = vyřeš soustavu dfx * dx = fx;
x = x + dx;
it = it + 1;
```

Konec algoritmu, v proměnné x je uložen výsledek

Tato implementace Newton-Raphsonovy metody je volána s počáteční aproximací řešení x_0 a dvěma pomocnými proměnnými eps a its . Proměnná eps určuje přesnost, s jakou má být řešení iterováno, a proměnná its určuje maximální počet iterací.

8 Funkce (3.26) je reprezentována n reálnými funkcemi n neznámých. Označíme-li každou takovou funkci

$$F_i(x) = 0; F_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

a existují-li všechny parciální derivace těchto funkcí, můžeme Jakobián $F'(x)$ definovat jako matici, pro jejíž prvky platí následující:

$$F'_{ij}(x^k) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}; i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Kapitola 4

Numerické simulace

V této kapitole se budeme věnovat výsledkům řešení rovnic (2.20) a (2.23) metodou sítí a následně Newton-Raphsonovou metodou. Jelikož je rovnice (2.20) parabolického typu⁹, nelze diskretizační síť volit libovolně, ale velikost Δt musí být volena v závislosti na Δx .

4.1 Výsledky simulací

Hodnoty řešení v čase $t = 0$ jsou známy z počáteční podmínky. Ty také tvoří počáteční iteraci řešení v čase $t = \Delta t$, která vstupuje do Newton-Raphsonovy metody iterující řešení v daném časovém kroku. Obecně řešení v čase $t = j \cdot \Delta t$ je počáteční iterací pro řešení v čase $t = (j+1) \cdot \Delta t$.

Pro řešení rovnic (2.20) a (2.23), resp. (3.17) – (3.19), uvažujme tyto počáteční podmínky:

$$\begin{aligned}v(x,0) &= 0; \forall x \in [0, l] \\h(x,0) &= h_1; \forall x \in [0, a_1] \\&= \frac{h_1 + h_2}{2} + \cos\left(\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot \pi\right); \forall x \in [a_1, a_2], \\&= h_2; \forall x \in [a_2, l]\end{aligned}$$

resp. jejich odpovídající diskretizaci. Z důvodů větší stability výpočtu je skok v bodě a (viz. počáteční podmínky (3.7)) nahrazen hladším přechodem mezi body a_1 a a_2 .

Z důvodu rozdílných výšek hladin mezi body a_1 a a_2 se začnou šířit dvě rázové vlny v opačných směrech. Následující obrázky 4.1 - 4.4 jsou ze simulací s těmito parametry:

$$l = 100 \text{ m}$$

$$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

$$\Delta x = 0,4 \text{ m}$$

$$v = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1} \text{ (odpovídá viskozitě vody při } 20^\circ\text{C)}$$

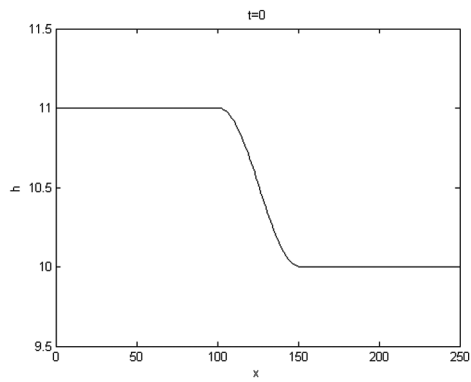
$$\Delta t = 0,1 \text{ s}$$

⁹ Necht' A_{11}, A_{12}, A_{22} jsou funkce spojité v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

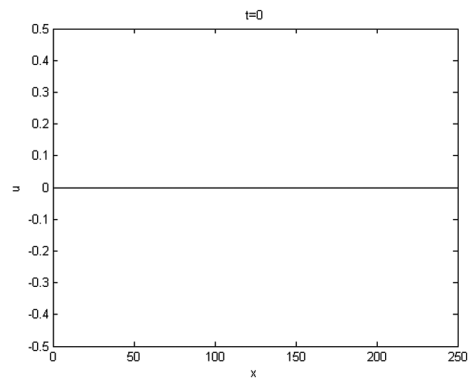
Parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro funkci $z(x,y)$ tvaru

$$A_{11}(x,y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2A_{12}(x,y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A_{22}(x,y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y,z, \partial z \partial x, \frac{\partial z}{\partial y})$$

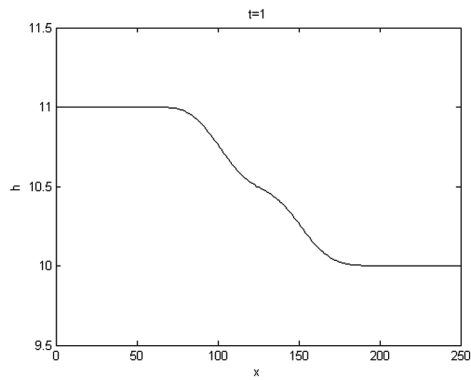
se nazývá parabolická v Ω , platí-li v Ω stále $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0$.



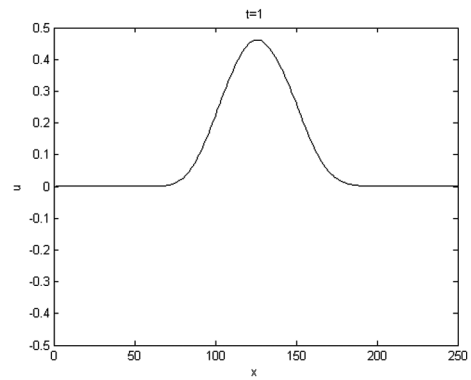
(a)



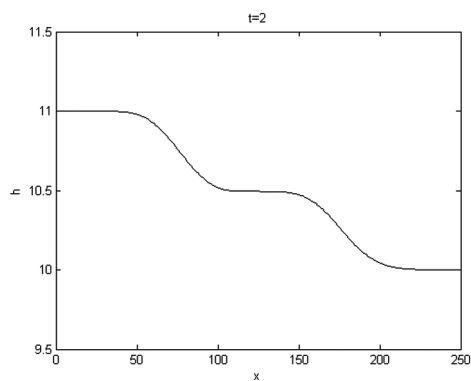
(b)



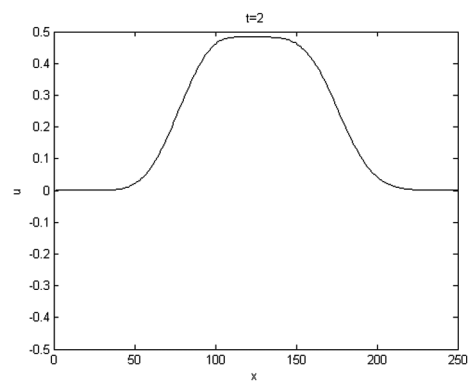
(c)



(d)

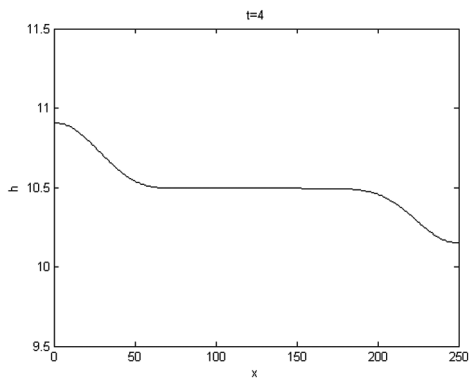


(e)

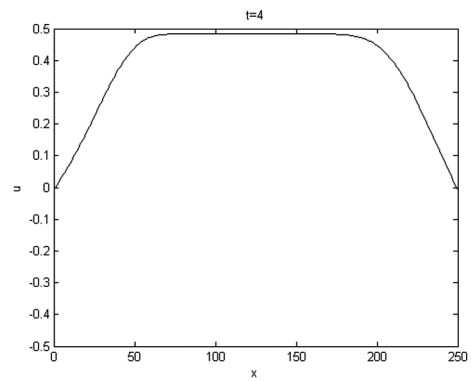


(f)

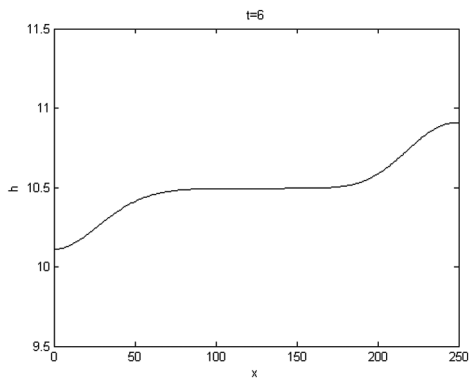
Obrázek 4.1: Grafy popisující chování vlny před odrazem závislostmi hloubky h a rychlosti v na prostorové souřadnici x : (a), (b) v čase $t=0$ s (počáteční podmínky); (c), (d) v čase $t=1$ s; (e), (f) v čase $t=2$ s.



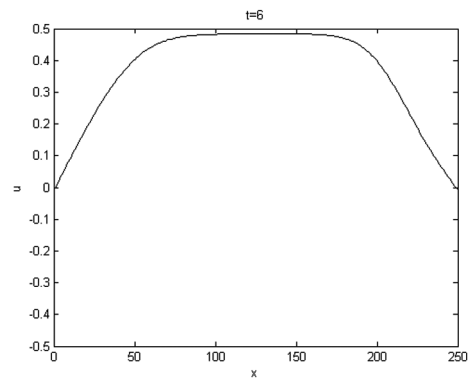
(a)



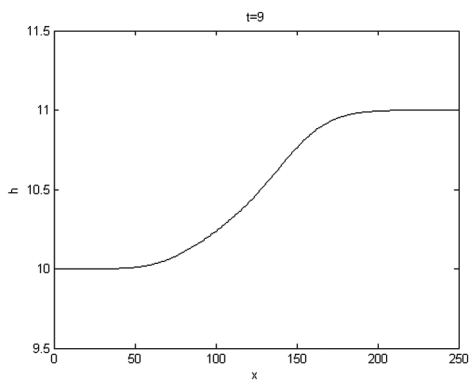
(b)



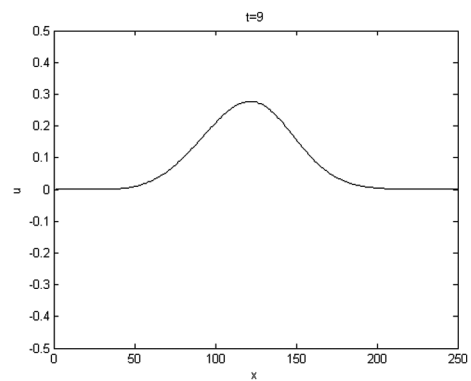
(c)



(d)



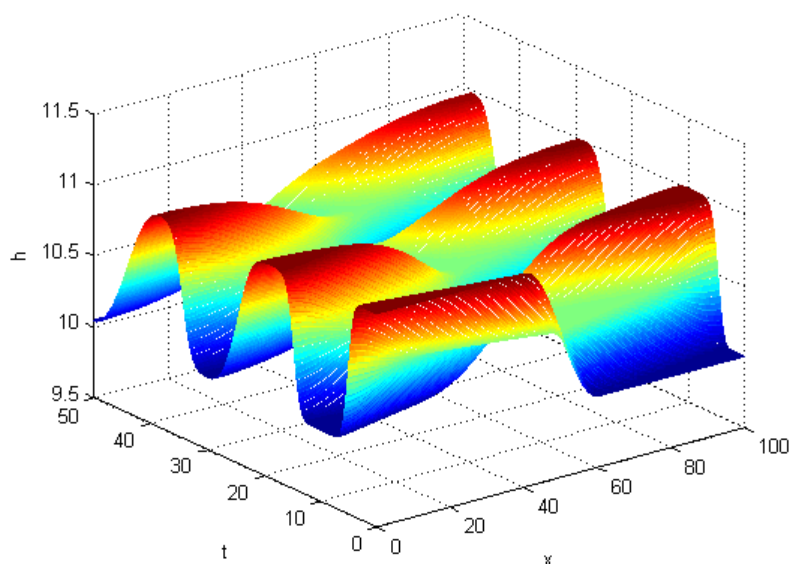
(e)



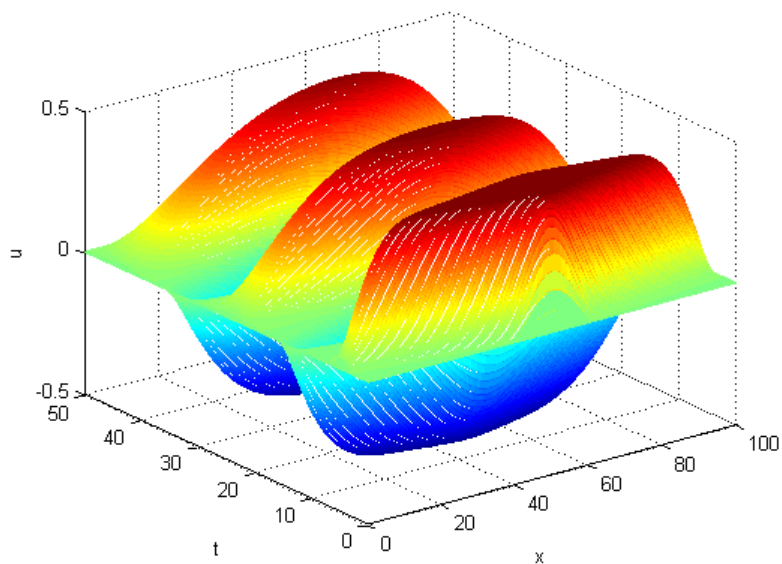
(f)

Obrázek 4.2: Grafy popisující chování vlny po prvním odrazu závislostmi hloubky h a rychlosti v na prostorové souřadnici x : (a), (b) v čase $t=4$ s (počáteční podmínky); (c), (d) v čase $t=6$ s; (e), (f) v čase $t=9$ s.

Z uvedených obrázků je patrné, že pohyb kapaliny se neustaluje, a kapalina se přelévá z jedné strany na druhou, což je lépe vidět z následujících obrázků:



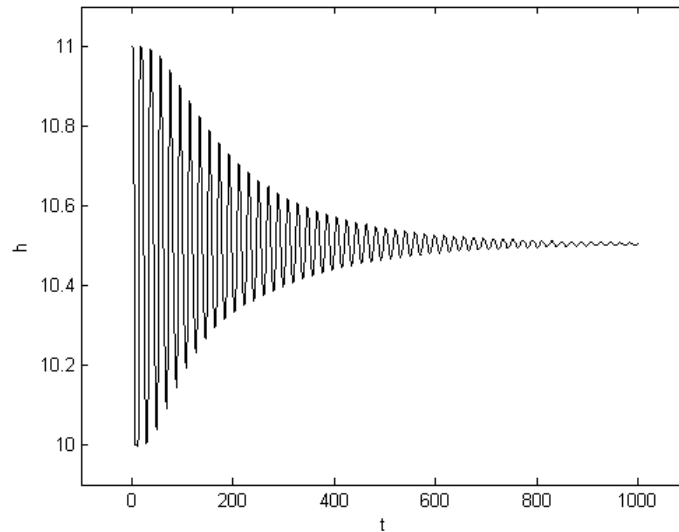
(a)



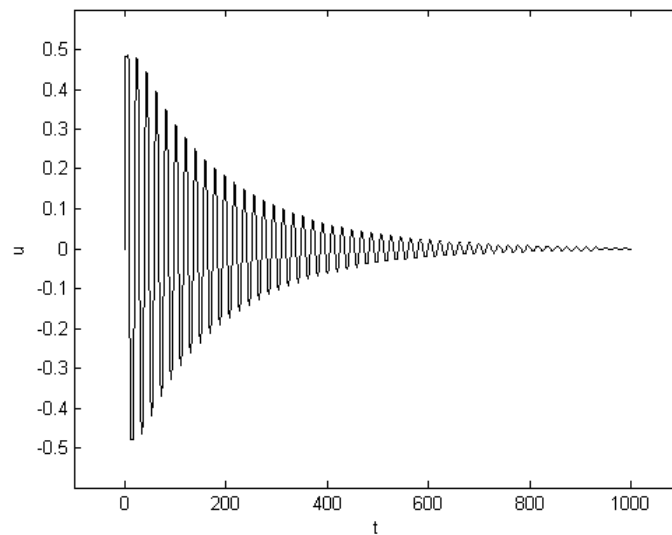
(b)

Obrázek 4.3: Grafy šíření vln do času $t = 50$ s: (a) pro hloubku h ; (b) pro rychlost v .

Z těchto simulací by se mohlo zdát, že vlny se budou neustále odrážet s neklesající amplitudou výšky h , resp. rychlosti v . Avšak při simulaci v dostatečně dlouhém časovém měřítku se ukazuje, že amplitudy h a v postupně klesají, až nakonec dojde k ustálenému stavu, kdy rychlost proudění v se blíží nule a místní rozdíly výšky h se taktéž blíží nule. To je názorněji vidět z obrázku 4.4:



(a)



(b)

Obrázek 4.4: Zmenšování amplitud výšky h a rychlosti v v závislosti na čase.

Další zajímavá věc na simulacích tohoto modelu je ta, že pro stejné vstupní parametry lišící se jen v hodnotě viskozity jsou výsledky velmi podobné. Při simulacích s parametry

$$l = 100 \text{ m}$$

$$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

$$\Delta x = 0,4 \text{ m}$$

$$\nu \in \{0, 10^{-6}, 10^{-3}\} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

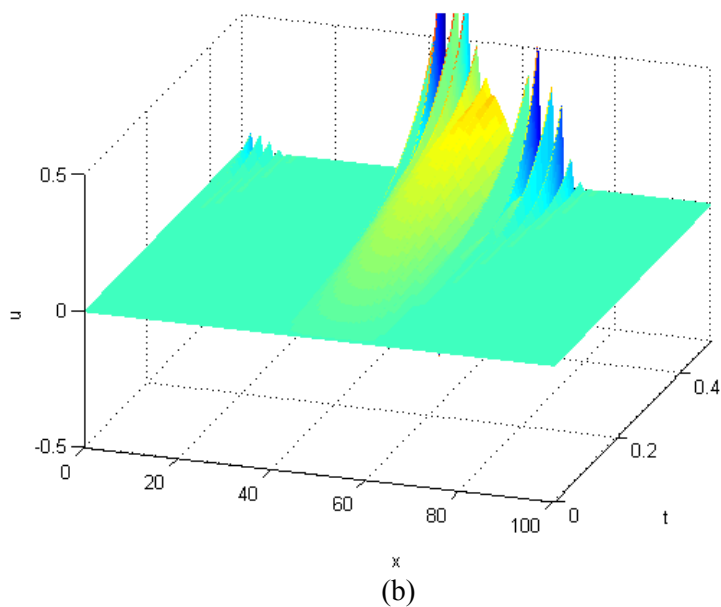
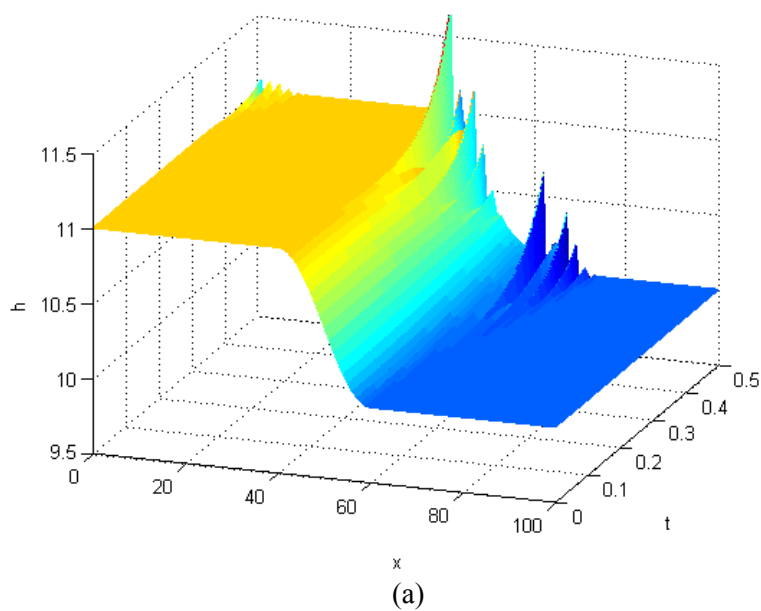
$$\Delta t = 0,1 \text{ s}$$

byla maximální odchylka řešení v čase $t = 100 \text{ s}$, resp. $t = 1000 \text{ s}$, pro tyto viskozity v řádu 10^{-4} m , resp. 10^{-6} m , pro výšku h a 10^{-4} ms^{-1} , resp. 10^{-5} ms^{-1} , pro rychlost v .

Toto chování by mohlo být způsobeno přítomností tzv. numerické viskozity v metodě použité k řešení rovnic (2.13) a (2.21). Volbou vysoké hodnoty kinematické viskozity při simulacích bylo možné tuto hypotézu ověřit. Nicméně při této velikosti viskozity je numerické schéma při hrubší diskretizaci značně nestabilní (při parametrech diskretizační sítě $\Delta x = 0,4 \text{ m}$, $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ a volbě viskozity $\nu = 100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ se nestability ukazují již v čase $t=5 \text{ s}$), při volbě jemnější diskretizace je simulace výpočetně neúnosně náročná (při parametrech diskretizační sítě $\Delta x = 0,1 \text{ m}$, $\Delta t = 0,025 \text{ s}$ a volbě viskozity $\nu = 100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ trvá výpočet simulace pro $t=5 \text{ s}$ více než 2 minuty).

Taktéž by bylo možné tuto hypotézu ověřit ponecháním stejné hodnoty kinematické viskozity ($\nu=10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$) a volbou velmi jemné diskretizační sítě, což je ale také výpočetně neúnosně náročné.

Na závěr ještě uvedme jednu ze simulací, kde volba viskozity a diskretizační sítě způsobila nestabilitu řešení.



Obrázek 4.5: Grafy nestabilního řešení šíření vln do času $t = 0.5$ s parametry $l = 100$ m, $\Delta x = 0,1$ m, $\Delta t = 0,001$ s, $g = 9,81$ m s⁻², $\nu = 10^{-6}$ m²s⁻¹: (a) pro hloubku h ; (b) pro rychlost v .

Kapitola 5

Závěr

Cílem této práce bylo simulovat 1-rozměrnou vlnu při protržení přehradu s počáteční podmínkou danou skokovým rozdílem v hladinách. Proto byly ve druhé kapitole odvozeny rovnice, popisující chování kapalin – konkrétně Navier-Stokesovy rovnice popisující dynamiku newtonovských viskózních tekutin a rovnice kontinuity popisující zákon zachování tekutin. Z důvodu velké složitosti tohoto systému rovnic byly užity zjednodušující předpoklady pro přechod k Saint-Venantovým rovnicím, které popisují proudění vody v říčních tocích. Třetí kapitola byla věnována metodám užitým k řešení tohoto systému – metodě sítí (také známa jako metoda konečných diferencí) a také Newton-Raphsonově metodě, která byla užita k řešení nelineárních rovnic vzniklých užitím metody sítí. Konečně čtvrtá kapitola byla věnována výsledkům numerických simulací. Byly ukázány některé zajímavé výsledky (simulace ve velkém časovém měřítku, kdy docházelo k ustálení stavu – rychlost proudění se blížila nule, výška hladiny byla konstantní pro celou délku koryta). Ukázalo se také, že řešení závisí na viskozitě pouze minimálně, což by mohlo ukazovat na přítomnost tzv. numerické viskozity v metodě použité k řešení problému. Tuto hypotézu by bylo možno ověřit užitím jiných numerických metod – například užitím metody konečných prvků nebo metody konečných objemů. Tyto metody by bylo také vhodné využít při řešení problému ve více dimenzích.

Literatura

- [1] HAVRÁNEK, Antonín. *Klasická mechanika II. : Kontinuum*. 1. vyd. Praha : Nakladatelství Karolinum, 2003. 174 s. ISBN 80-246-0627-5.
- [2] FEYNMAN, Richard P., LEIGHTON, Robert B., SANDS, Matthew. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2*. 1. vyd. Havlíčkův Brod : Fragment, 2001. 806 s. ISBN 80-7200-420-4.
- [3] KVASNICA, Jozef. *Matematický aparát fyziky*. 2. opravené vyd. Praha : Academia, 1997. 383 s. ISBN 80-200-0603-6.
- [4] HINKELMANN, Reinhard. *Efficient Numerical Methods and Information-Processing Techniques for Modeling Hydro- and Enviromental Systems*. Berlin : Springer-Verlag, 2005. xviii, 305 s. s. ISBN 3-540-24146-9.
- [5] REKTORYS, Karel, et al. *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha : Prometheus, 2000. 2 sv. (xxxii, 720, xxxii, 874 s.). ISBN 80-7196-179-5.
- [6] VONDRÁK, Vít. *Numerické metody I* [online]. 21.4.2004 [cit. 2007-05-01]. Dostupný z WWW: <http://vondrak.am.vsb.cz/education/vv_nm1.html>.