

## **Prohlášení o autorství**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě dne 4. května 2010

.....

## **Poděkování**

Na tomto místě bych rád poděkoval za poskytnutí zajímavého tématu diplomové práce, který navazoval na téma mé bakalářské práce, příslušných materiálů, všech potřebných rad, návodů a v neposlední řadě za vstřícné vedení při tvorbě mé diplomové práce svému vedoucímu **Ing. Daliboru Lukáši, Ph.D.**

Dále bych rád poděkoval své rodině, své přítelkyni, svým blízkým a přátelům za dostatek prostoru a pochopení při tvorbě práce. Dále bych rád poděkoval Vysoké škole báňské, zvláště pak celé Katedře aplikované matematiky, že mi umožnili velice zajímavé a do budoucna prospěšné studium.

## **Abstrakt**

Většinu praktických úloh, které vedou k matematickému modelování pomocí parciálních diferenciálních rovnic (PDR), nelze řešit analyticky, ale musí se využít numerických metod. Jedním z klíčových problémů při numerickém řešení PDR je aproximace okrajových podmínek. Diskretizační síť musí věrně kopírovat hranici oblasti, což pro praktické úlohy znamená rozsáhlé soustavy lineárních rovnic. Alternativní postup, tzv. kompozitní konečné prvky, byl navržen v [1], kdy se diskretizují oblasti s velmi jemnými geometrickými detaily pomocí hierarchického zjemňování nekonformní sítě [2]. Navržené konečně-prvkové bázové funkce pak mají velké nosiče, tedy výsledné soustavy mají hustěji zaplněné matice, které se však umí efektivně řešit. Tato práce se zabývá konstrukcí a řešením úloh touto metodou.

**Klíčová slova:** kompozitní metoda konečných prvků, metoda konečných prvků, diskretizace sítě, hierarchická triangulace, Poissonova úloha

## **Abstract**

Most practical problems that lead to mathematical modelling using partial differential equations (PDE) cannot be solved analytically, instead numerical methods should be applied. One of the main problems for numerical solution of PDE is an approximation of boundary conditions. Discretisation grid must properly represent border of the domain, which leads to large systems of linear equations for practical problems. An alternative method, so called composite finite elements, was proposed in [1]. This method leads to construction of hierarchy of non-conforming grids, which cover the domain with small geometric details [2]. Composite finite element basis functions have bigger supports and the resulting system matrices are more dense, but these systems can be solved efficiently. The aim of this thesis is to construct and solve problems using this method.

**Key words:** composite finite elements, finite elements method, domain discretisation, hierarchical triangulation, Poisson's equation

## Seznam použitých symbolů a zkratek

PDR – Parciální diferenciální rovnice

MKP – Metoda konečných prvků

CFE – Composite finite elements

$A$  – Matice tuhosti úlohy

$F$  – Vektor pravé strany

$u_h$  – Aproximace řešení

$\Omega$  – Oblast úlohy

$\Gamma$  – Hranice oblasti

$K$  – Element triangulace

$\tau$  – Diskretizační síť

$\varphi$  – Bázová funkce

## Obsah

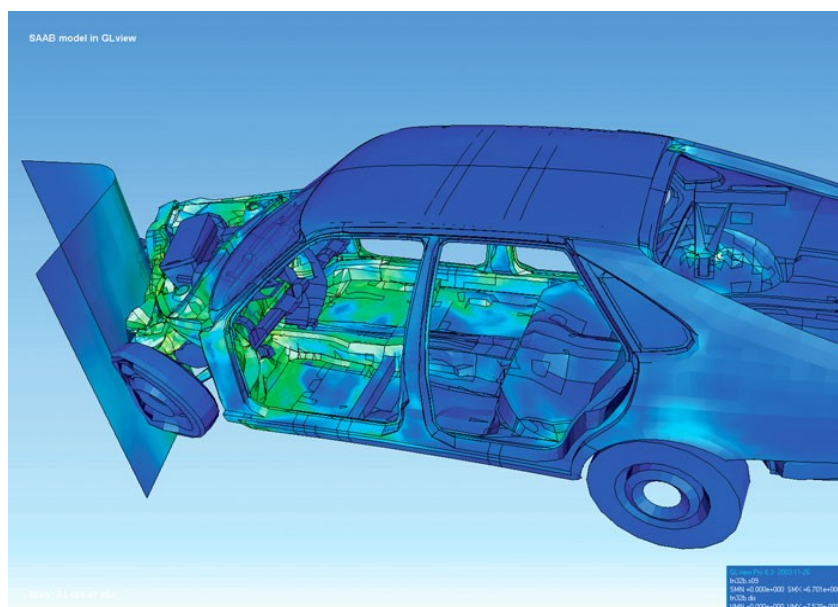
1. Úvod.....	3
2. Metoda konečných prvků.....	6
2.1. Princip metody konečných prvků.....	6
2.2. Slabé řešení.....	6
2.3. Aproximace řešení.....	9
2.4. Výpočet a konstrukce matic.....	12
3. Kompozitní metoda konečných prvků (CFE – Composite finite elements).....	16
3.1. Diskretizace (triangulace) oblasti a hierarchie sítí.....	16
3.2. Tvorba bazových funkcí.....	20
3.3. Sestavení matice tuhosti a vektoru pravé strany úlohy.....	22
4. Použité algoritmy a příklady.....	26
4.1. Algoritmy.....	26
4.2. Příklad řešení Poissonovy úlohy na oblasti se třemi výřezy.....	30
4.3. Příklad řešení Poissonovy úlohy na oblasti s pěti výřezy.....	34
5. Závěr.....	35
Seznam použité literatury.....	36
Seznam příloh.....	37

## Seznam obrázků

Obrázek 1.1: Vizualizace nárazového testu vozidla	3
Obrázek 1.2: Model auta metodou konečných prvků	4
Obrázek 2.1: Rozdělení oblasti	10
Obrázek 2.2: Typická bázová funkce	11
Obrázek 2.3: Referenční trojúhelník a souřadnice	14
Obrázek 2.4: Příklad diskretizace 1-dimenzionální úlohy	15
Obrázek 2.5: Příklad triangulace 2-dimenzionální úlohy	15
Obrázek 2.6: Příklad diskretizace na čtyřúhelníky 2-dimenzionální úlohy	15
Obrázek 2.7: Příklad diskretizace 3-dimenzionální úlohy	15
Obrázek 3.1: Počáteční dělení oblasti	16
Obrázek 3.2: Síť $\tau_{l_{min}}$ , kde $l_{min} = 2$	17
Obrázek 3.3: Příklad hraniční sítě $\tau_{l_{max}}$ , kde $l_{max} = 7$	18
Obrázek 3.4: Příklad sítě $\tau_{l_{max}}^{CFE}$	19
Obrázek 3.5: Bázové funkce z různých hladin	20
Obrázek 3.6: Nosiče bázových funkcí	21
Obrázek 3.7: Hranice oblasti	22
Obrázek 3.8: Ukázková triangulace a konstrukce matice tuhosti	25
Obrázek 4.1: Počáteční pokrytí podle $h$	27
Obrázek 4.2: Triangulace kolem hranice	30
Obrázek 4.3: Oblast a počáteční pokrytí	31
Obrázek 4.4: CFE síť ukázkového příkladu	31
Obrázek 4.5: Řídkost matice tuhosti úlohy	32
Obrázek 4.6: Řešení a stupnice hodnot	32
Obrázek 4.7: Hladké stínování řešení	33
Obrázek 4.8: 3-D ukázka řešení	33
Obrázek 4.9: Hladké barevné stínování řešení	34
Obrázek 4.10: Prohnutí membrány ve 3D pohledu	34

# 1 Úvod:

V dnešní době jsou kladeny vysoké požadavky na bezpečnost, kvalitu a cenu. Například nároky na konstrukce všech typů vozidel, konstrukce nosníků, nebo například spojů ropných potrubí jsou podstatně vyšší, než tomu bývávalo dříve. Všechny tyto a mnoho dalších objektů musí splňovat nejvyšší možné bezpečnostní požadavky, musí mít maximální odolnost vůči nepříznivým vlivům okolí, musí mít co nejlepší parametry pro plnění své funkce. Toho je docíleno prováděním množství testů a měření na prototypech jednotlivých konstrukcí. Pro mnoho případů je však většina testů pro prototyp fatální. Po proběhnutí testu zůstanou na prototypu nevratné změny a poškození (například nárazové testy automobilů, viz Obr. 1.1), nebo je prototyp naprosto zničen (např. zátěžové testy podpěr a nosníků).

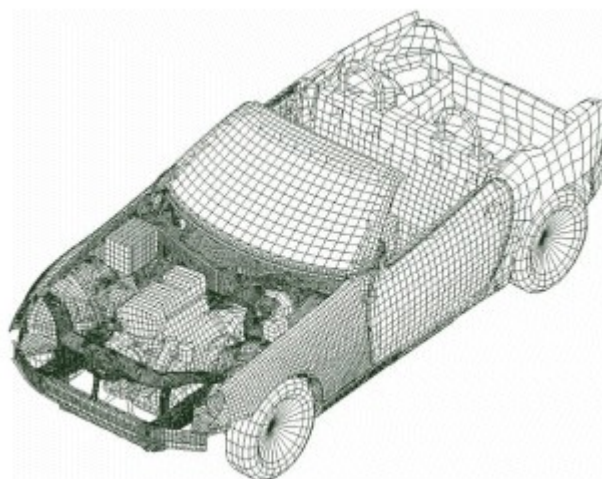


**Obr. 1.1:** Vizualizace nárazových testů modelu vozidla použitý z [5]

Proto se hledají jiné možnosti optimalizace požadovaných parametrů, než testy skutečných prototypů. Například testování vesmírných stanic nebo letadel je jistě velice nákladné, ne-li nemožné. Začaly se proto vytvářet virtuální modely a testy se prováděly pomocí počítačů a různých simulačních softwarů virtuálně. To zapříčinilo zvýšení požadavků na numerické techniky řešení, vzniklo mnoho nových a speciální modifikace starých metod zaměřené na konkrétní testy a technické problémy. Vytvoření modelů a použití vhodné numerické techniky umožnilo optimalizovat veškeré parametry testovaného objektu ještě před tím, než první reálný prototyp spatřil světlo světa.

Velké množství praktických technických a vědeckých problémů se popisuje parciálními diferenciálními rovnicemi (PDR). Nalézt řešení analytickou cestou je však již pro 2-dimenzionální úlohy mnohdy nemožné, proto je třeba původní úlohu aproximovat a úlohu řešit numericky. V této práci, zejména v kapitole 2, se budeme zabývat popisem numerické techniky vhodné k řešení mnoha technických problémů, a to metodou konečných prvků (MKP). MKP je založena na objemové diskretizaci zkoumaného objektu. To znamená, že se model objektu rozdělí na konečně mnoho elementů neboli prvků, které pak aproximují skutečný objem modelu.

V dnešní době se metoda konečných prvků stala jedním ze základních kamenů numerických technik, využívá ji velké množství softwarů k simulování fyzikálních, technických či vědeckých problémů. Již při výuce se studenti vysokých škol mohou s touto metodou setkat. Stala se součástí osnov mnoha technický oborů. Já se s touto metodou setkal poprvé v předmětu Numerické metody a studiem metody jsme se zabývali i v dalších navazujících předmětech. Již má bakalářská práce [2] se zabývá jednou z částí MKP, konkrétně diskretizací oblasti. Metoda konečných prvků je vhodná pro použití u těch úloh, kde požadavek na přesnost řešení se liší v různých částech zkoumané oblasti. Například u nárazových testů vozidel můžeme zvýšit přesnost v přední části vozidla a na důležitých součástkách, naopak v zadní části vozu můžeme přesnost snížit, čímž snížíme i výpočetní nároky na samotnou úlohu. Viz Obr. 1.2.



**Obr. 1.2:** Modelace auta metodou konečných prvků  
(Obrázek je z [6])



Dále je metoda konečných prvků vhodná u úloh, kde se může oblast měnit, když očekávané řešení není hladké, nebo zkoumaná oblast obsahuje nějaké komplikované tvary či geometrické detaily.

Dimenze úlohy řešené pomocí MKP silně závisí na geometrii zkoumaného objektu. To může být problém u oblastí s velmi malými geometrickými detaily. Kvůli dosažení požadované přesnosti musíme rozdělit celý objekt na mnoho elementů, velikostí odpovídající geometrickým detailům oblasti. To může zapříčinit, že kvůli drobnému geometrickému detailu rozdělíme na velmi malé elementy i tu část objemu objektu, kde to ani zdaleka není zapotřebí. To nám podstatně zvedá dimenzi úlohy, což značně zvyšuje časové i technické nároky na samotný výpočet a limituje použití například multi-gridní metody k nalezení řešení. Na problém s drobnými geometrickými detaily (např. oblasti s výřezy tvaru kružnice, kterými se zabývá [2] i tato práce) je právě zaměřena speciální modifikace klasické MKP, tzv. kompozitní metoda konečných prvků, je hlavní částí této práce a kterou se budeme zabývat v kapitole 3. Výhodou této metody je to, že zachytí drobné geometrické detaily nejen v diskretizaci oblasti, ale i v konstrukci bázových funkcí prostoru řešení.

Tato metoda je detailně popsána včetně rigorózní analýzy v článcích [1] a [3] od autorů W. Hackbusche a S.A. Sautera, ze kterých jsem čerpal nejvíce. V těchto článcích je dále uvedena i numerická studie a několik vhodných metod k řešení, například multi-gridní metoda vhodná pro nalezení řešení této speciální metody.

## 2 Metoda konečných prvků(MKP)

### 2.1 Princip metody konečných prvků

Metoda konečných prvků je založena na objemové, resp. obsahové diskretizaci zkoumaného objektu na konečný počet elementů reprezentujících tento objekt. Namísto hledání přesného řešení analytickou cestou, aproximujeme úlohu pomocí těchto elementů, nad těmito elementy vytvoříme bázové funkce a prostory, kde budeme hledat přibližné řešení. Pomocí elementů pak převedeme úlohu na lineární systém rovnic, jehož řešením nalezneme požadovanou aproximaci skutečného řešení. Různými metodami dělení objektu a tvary použitých elementů pak můžeme korigovat přesnost řešení.

Obecně je metoda konečných prvků charakterizována následujícími kroky:

- Rozdělení oblasti na elementy, tzv. diskretizace. Nejčastěji se používá dělení na trojúhelníky, čtyřúhelníky, ale lze použít i další typy konvexních polygonů.
- Určení bázových funkcí. V tomto textu využijeme po částech lineární funkce, ale často se používají i po částech polynomiální bázové funkce.
- Aproximace úlohy s požadovanou přesností.
- Sestavení matice a pravé strany, soustavy lineárních rovnic.
- Aplikace okrajových podmínek.
- Řešení soustavy rovnic.

V následujícím textu kapitoly čerpáme hlavně z článku [4] od autora Endre Süliho, ve kterém je popsána teorie metody konečných prvků pro parciální diferenciální rovnice. Ke studiu této kapitoly je také potřeba znát základní pojmy funkcionální analýzy.

### 2.2 Slabé řešení

K ilustraci metody konečných prvků použijeme jako ukázkový příklad okrajovou úlohu eliptické parciální diferenciální rovnice. Eliptické úlohy reprezentuje nehomogenní analogie Poissonova rovnice

$$-\Delta u = f,$$

kde užíváme Laplaceův operátor  $\Delta$ , označující

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Nechť  $\Omega$  je lipschitzovská oblast na  $\mathbb{R}^n$  a uvažujme lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

kde koeficienty  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  a  $f$  splňují následující podmínky:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in \mathbf{C}^1(\bar{\Omega}), \quad i, j = 1, \dots, n; \\ b_i &\in \mathbf{C}(\bar{\Omega}), \quad i = 1, \dots, n; \\ c &\in \mathbf{C}(\bar{\Omega}), \quad f \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}), \end{aligned}$$

a také

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (2.2)$$

zde je  $\tilde{c}$  kladná konstanta nezávislá na  $x$  a  $\xi$ . Podmínka (2.2) je označována jako stejnoměrná elipticita a (2.1) proto nazýváme eliptickou rovnicí. Existuje několik typů okrajových podmínek, zde uvedeme dvě základní:

(a)  $u = g$  na  $\Gamma_1$  (Dirichletova okrajová podmínka), kde  $g$  udává funkci definovanou na  $\Gamma_1$ ;

(b)  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = h$  na  $\Gamma_2$  (Neumannova okrajová podmínka), kde  $\nu$  udává jednotkový vnější

normálový vektor ke  $\Gamma_2$  a kde  $h$  je skalární funkce definovaná na  $\Gamma_2$ ,

kde  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$  a  $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega$ .

Začneme s Dirichletovou okrajovou úlohou

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  a  $f$  jsou stejné jako ve (2.2).

Funkce  $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega})$  splňující (2.3) se nazývá klasické řešení úlohy. Teorie parciálních diferenciálních rovnic říká, že existuje jediné klasické řešení rovnice, pokud jsou  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$ ,  $f$  a  $\partial\Omega$  dostatečně hladké. Nicméně v mnoha praktických úlohách jsou tyto podmínky porušeny a zde je použití klasické teorie nevhodné. Vezměme si například Poissonovu rovnici s nulovou Dirichletovou okrajovou podmínkou na oblasti  $\Omega = (-1, 1)^n$  na  $\mathbb{R}^n$  [4]:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= \operatorname{sgn} \left( \frac{1}{2} - |x| \right), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (\Lambda)$$

Tato úloha nemá klasické řešení, hledané řešení by mělo být spojitě na  $\Omega$ , což není možné, protože  $\operatorname{sgn}(1/2 - |x|)$  není spojitá funkce na  $\Omega$ .

Abychom dokázali vyřešit parciální diferenciální rovnici s nehladkými daty a překonali limity klasické teorie, zobecníme představu řešení oslabením podmínek diferencovatelnosti  $u$ .

### Definice 1

Nechť  $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$ ,  $i, j=1, \dots, n$ ,  $b_i \in L_\infty(\Omega)$ ,  $i=1, \dots, n$ ,  $c \in L_\infty(\Omega)$  a necht'  $f \in L_2(\Omega)$ .

Funkce  $u \in H_0^1(\Omega)$  splňující

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx \\ + \int_{\Omega} c(x) uv dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (2.4)$$

nazýváme slabým řešením rovnice (2.3). Všechny parciální derivace  $v$  (2.4) musíme chápat ve smyslu slabé derivace.

Je zřejmé, že pokud existuje klasické řešení, pak existuje i slabé řešení. Naopak ale tvrzení neplatí. Jestliže má úloha slabé řešení, nemusí být dostatečně hladké, aby bylo zároveň klasickým řešením. Například úloha ( $\Lambda$ ) má jednoznačné slabé řešení  $u \in H_0^1(\Omega)$ , přesto nemá klasické řešení.

Pro zjednodušení zavedeme následující značení:

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c(x) uv dx \quad (2.5)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (2.6)$$

S tímto značením můžeme přepsat úlohu (2.4) následovně:

$$\text{naleznete } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tak, aby platilo } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Nebudeme dokazovat existenci a jednoznačnost řešení, k tomu jen využijeme větu z funkcionální analýzy. Všechny předpoklady jsou splněny.

**Věta 2 (Laxova-Milgramova)**

Předpokládejme, že  $V$  je reálný Hilbertův prostor s normou  $\|\cdot\|_V$ . Necht'  $a(\cdot, \cdot)$  je taková bilineární forma na  $V \times V$ , aby platilo:

$$(a) \exists c_0 > 0 \quad \forall v \in V \quad a(v, v) \geq c_0 \|v\|_V^2,$$

$$(b) \exists c_1 > 0 \quad \forall v, w \in V \quad |a(v, w)| \leq c_1 \|w\|_V \|v\|_V,$$

a necht' je  $l(v) \in V^*$  lineární funkcionál na  $V$  tak, že

$$(c) \exists c_2 > 0 \quad \forall v \in V \quad |l(v)| \leq c_2 \|v\|_V.$$

Pak existuje právě jedno  $u \in V$  tak, že

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V,$$

navíc platí stabilita řešení

$$\|u\| \leq \frac{1}{c_0} \cdot \|l\|_{V^*}.$$

**2.3 Aproximace úlohy, diskretizace oblastí**

V prvním kroku konstrukce MKP eliptického problému (2.3) převedeme úlohu na její slabou formulaci:

$$\text{nalezňte } u \in V \text{ tak, aby platilo } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \quad (\text{P})$$

kde  $V$  je prostor řešení (například  $H_0^1(\Omega)$  pro homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku),  $a(\cdot, \cdot)$  je bilineární funkcionál na  $V \times V$ , a  $l(\cdot)$  je lineární funkcionál na  $V$  (například (2.5) a (2.6)). Ve druhém kroku konstrukce nahradíme prostor  $V$  z problému (P) konečně-dimenzionálním podprostorem  $V_h \subset V$ , který je složen ze spojitých, po částech lineárních funkcí asociovaných s dělením zkoumané oblasti. Uvažujme tedy následující aproximaci problému (P):

$$\text{nalezňte } u_h \in V_h \text{ tak, aby platilo } a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (\text{P}_h)$$

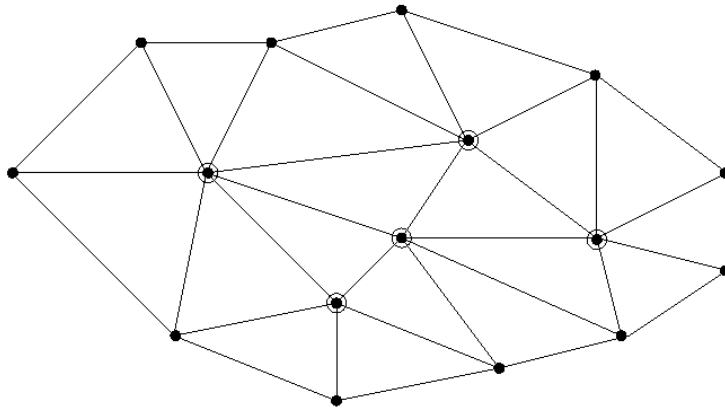
Předpokládejme například, že

$$\dim V_h = N \text{ a } V_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\},$$

kde mají lineárně nezávislé báze funkce  $\varphi_i, i=1, \dots, N$  dostatečně „malý“ nosič. Vyjádříme aproximované řešení  $u_h$  z hlediska báze funkcí  $\varphi_i$ :

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i(x), \quad (\square)$$

kde zavedeme  $U_i, i=1, \dots, N(h)$ .



**Obr. 2.1:** Rozdělení (triangulace) oblasti  $\bar{\Omega}$ .  
Obrázek triangulace použit z [4].

Pak můžeme přepsat problém  $(P_h)$  takto:

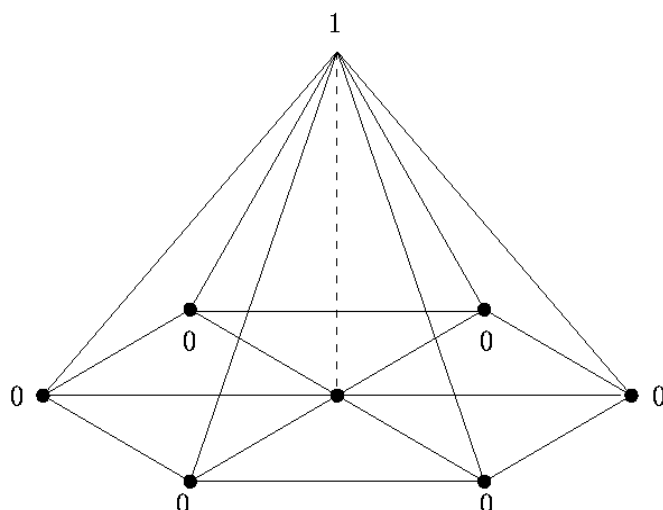
nalezněte  $(U_1, \dots, U_N) \in \mathbb{R}^N$  tak, aby platilo

$$\sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) U_i = l(\varphi_j), \quad j=1, \dots, N. \quad (P'_h)$$

Dostaneme systém lineárních rovnic pro  $U = (U_1, \dots, U_N)^T$  s maticí  $A = (a(\varphi_j, \varphi_i))$  o rozměrech  $N \times N$ . Protože funkce  $\varphi_i$  mají malý nosič, pak bude  $a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$  pro většinu dvojic  $i$  a  $j$ , takže matice  $A$  bude řídká. Tato vlastnost je zásadní, jelikož máme k dispozici mnoho rychlých iteračních metod pro nalezení řešení pro velmi řídké matice. Jakmile vyřešíme problém  $(P'_h)$  pro  $U = (U_1, \dots, U_N)^T$ , rozložení (2) nám poskytne požadovanou aproximaci  $u$ . Dále uvedeme konstrukci MKP na jednoduchém příkladu.

Nechť je  $\Omega$  ohraničená oblast v  $\mathbb{R}^2$  s polygonální hranicí  $\partial\Omega$ ; pak můžeme oblast  $\Omega$  přesně pokrýt konečným počtem trojúhelníků. Předpokládáme, že každá dvojice trojúhelníků triangulace  $\Omega$  mají společnou buď právě jednu celou hranou, vrchol, nebo jsou disjunktní, jak je znázorněno na Obr. 2.1. S každým uzlem triangulace asociujeme bázovou funkci  $\varphi$ , která má hodnotu 1 v daném uzlu a má hodnotu 0 v ostatních uzlech.  $\varphi$  je spojitá funkce na  $\bar{\Omega}$  a je lineární nad každým trojúhelníkem, jak je znázorněno na Obr. 2.2.

Všechny uzly triangulace oblasti  $\bar{\Omega}$  očíslovme  $1, 2, \dots, N$  a necht' jsou  $\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_N(x, y)$  příslušně asociované bázové funkce. Funkce  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  jsou lineárně nezávislé a jejich obal je  $N$ -dimenzionální lineární podprostor  $V_h$  prostoru  $H_0^1(\Omega)$ .



**Obr. 2.2:** Typická bázová funkce  $\varphi$  konečných prvků.  
Obrázek bázové funkce použit z [4].

Uvažujme následující eliptickou okrajovou úlohu:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ na } \Omega, \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Začneme s uvážením slabé formulace (speciální případ z kapitoly 2.2, kdy  $n=2, a_{ij}(x) \equiv 1$  pro  $i=j$  a  $a_{ij}(x) \equiv 0$  v jiném případě,  $b_i(x) \equiv 0$  pro všechna  $i$  a  $c(x) \equiv 0$ ):

nalezněte  $u \in H_0^1(\Omega)$  tak, aby platilo

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Aproximace této úlohy konečnými prvky:

nalezněte  $u_h \in V_h$  tak, aby platilo

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_h}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} f v_h dx dy \quad \forall v_h \in V_h.$$

Zapsáním

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i(x, y),$$

můžeme metodu konečných prvků přeformulovat následujícím způsobem:

nalezněte  $(U_1, \dots, U_N)^T \in \mathbb{R}^N$  tak, aby platilo

$$\sum_{i=1}^N U_i \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy \right] = \int_{\Omega} f \varphi_j dx dy, \text{ pro } j=1, \dots, N.$$

Nechť  $A = (a_{ij})$ ,  $F = (F_1, \dots, F_N)^T$ ,

$$a_{ij} = a_{ji} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$F_j = \int_{\Omega} f \varphi_j dx dy,$$

pak lze aproximaci konečných prvků napsat jako systém lineárních rovnic

$$AU = F.$$

Vyřešením této soustavy získáme  $U = (U_1, \dots, U_N)^T$ , a proto i aproximaci řešení  $u_h$ .

## 2.4 Výpočet a konstrukce matic

Původní úlohu tedy aproximujeme systémem lineárních rovnic

$$AU = F,$$

kde  $A$  nazveme globální maticí tuhosti velikosti  $N \times N$  s prvky

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i(x, y) \cdot \nabla \varphi_j(x, y) dx dy,$$

a vektor  $F = (F_1, \dots, F_N)^T$  nazveme globální vektor pravé strany, kde

$$F_i = (f, \varphi_i) = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy.$$

Sestavení matice  $A$  a vektoru pravé strany  $F$  provedeme sečtením lokálních přírůstků příslušných básových funkcí každého trojúhelníku  $K$  triangulace oblasti  $\Omega$ . Očíslujeme všechny uzly triangulace od 1 do  $N$ . Poté přiřadíme každému trojúhelníku  $K$  index  $k = 1, \dots, M$ . Každý trojúhelník identifikuje index a trojice vrcholů, kterou seřadíme proti směru hodinových ručiček.

Lokální matice tuhosti  $A^k$  trojúhelníku  $K$  s indexem  $k$  a vrcholy  $a = (x_a, y_a)$ ,  $b = (x_b, y_b)$ ,  $c = (x_c, y_c)$ , kterým odpovídají asociované básové funkce  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$  budou vypadat takto:

$$A^k = \begin{bmatrix} a_{aa}^k & a_{ab}^k & a_{ac}^k \\ a_{ba}^k & a_{bb}^k & a_{bc}^k \\ a_{ca}^k & a_{cb}^k & a_{cc}^k \end{bmatrix}, \text{ kde } a_{ij}^k = \int_K \nabla \varphi_i(x, y) \cdot \nabla \varphi_j(x, y) dx dy$$

kde  $i, j = a, b, c$  a lokální vektor pravé strany  $F^k$ :

$$F^k = [f_a^k \quad f_b^k \quad f_c^k], \text{ kde } f_i^k = \int_K f(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy,$$

kde  $i = a, b, c$ .



Zavedeme funkce  $g^k: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ , které zobrazí matici  $A^k$  na matici  $A^{k*}$ .

$$A^{k*} = \begin{bmatrix} \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & a_{aa}^k & * & a_{ab}^k & * & a_{ac}^k & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & a_{ba}^k & * & a_{bb}^k & * & a_{bc}^k & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & a_{ca}^k & * & a_{cb}^k & * & a_{cc}^k & * \\ * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix},$$

kde na místech \* budou nuly. Výsledná globální matice tuhosti  $A$  pak bude:

$$A = \sum_{k=1}^M g^k(A^k).$$

Zavedeme funkce  $h^k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^N$ , které zobrazí vektor  $F^k$  na vektor  $F^{k*}$ .

$$F^{k*} = \begin{bmatrix} \dots & a & \dots & b & \dots & c & \dots \\ * & f_a^k & * & f_b^k & * & f_c^k & * \end{bmatrix},$$

kde místo \* budou nuly. Výsledný vektor pravé strany  $F$  bude:

$$F = \sum_{k=1}^M h^k(F^k)^T.$$

Jakmile máme sestavenou globální matici tuhosti  $A$  i vektor pravé strany  $F$  můžeme vyřešit úlohu  $AU = F$  a pomocí  $U = (U_1, \dots, U_N)^T$  získáme hledanou aproximaci řešení  $u_h$ . Samotný výpočet lokálních matic tuhosti provedeme transformací elementu do referenčních souřadnic na referenční trojúhelník, viz Obr. 2.3. Matici  $A^k$  spočteme jako

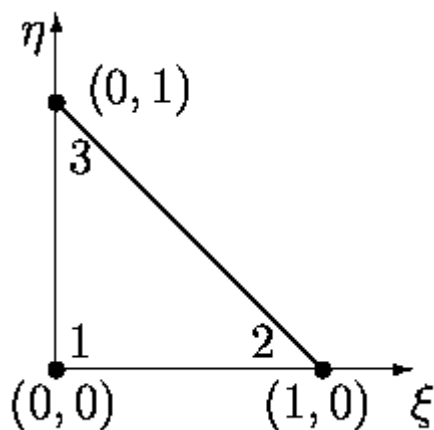
$$A^k = B^{kT} \cdot B^k \cdot \frac{1}{2} \cdot |det R^k|,$$

kde  $|det R^k|$  je změna objemu trojúhelníku při transformaci,  $\frac{1}{2}$  je obsah referenčního trojúhelníku a matice  $B^k$  je transformace gradientů funkcí  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$  do referenčních souřadnic. Matice  $R^k$  a  $B^k$  vypočteme následujícími vzorci:

$$R^k = \begin{bmatrix} x_b - x_a & x_c - x_a \\ y_b - y_a & y_c - y_a \end{bmatrix},$$

$$B^k = (R^k)^{-T} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transformací do referenčních souřadnic řešíme i výpočet vektoru pravé strany  $F$ . Lokální vektor pravé strany  $F^k$  vypočteme pomocí hodnoty funkce  $f$  a hodnot funkcí  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$  v těžišti trojúhelníku  $K$  o souřadnicích  $x_t^k, y_t^k$ . Díky vhodné konstrukci bázevých funkcí bude jejich hodnota v těžišti rovna  $1/3$ .



**Obr. 2.3:** Referenční trojúhelník a lokální souřadnice.

Obrázek použit z [4].

Vektor pravé strany  $F^k$  proto spočteme vzorcem

$$F^k = f(x_t^k, y_t^k) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T \cdot \frac{1}{2} \cdot |\det R^k| .$$

Po sestavení matic úlohy je vhodné aplikovat Dirichletovy podmínky. Máme zadány Dirichletovy podmínky  $u=0$  na  $\partial\Omega$ , jejich aplikace se provádí vynulováním všech nediagonálních prvků matice  $A$  ve všech řádcích a sloupcích odpovídajícím uzlům triangulace oblasti  $\Omega$ , které leží na hranici  $\partial\Omega$ .

Podobný postup jako výše zmíněný se dá aplikovat na různé problémy. Ať už na odlišné typy rovnic, různé okrajové podmínky, různé typy diskretizací oblasti. Existují proto různé modifikace metody konečných prvků. Chyba metody je silně závislá na tvaru jednotlivých elementů diskretizace zkoumaného objektu. Obecně je potřeba, aby vnitřní úhly v rámci elementu nebyly příliš rozdílné, nevyskytovaly se žádné příliš ostré úhly. Proto je nejvhodnější například u triangulace použití rovnostranných, nebo pravoúhlých trojúhelníků, kde délka všech stran nebude příliš rozdílná. Testování metody a algoritmů řešení popisované v této práci probíhalo na oblastech nazývaných „plátek ementálu“ [3], což je obdélníková oblast obsahující výřezy ve tvaru kružnice. Pro diskretizaci byl zvolen lineární pravoúhlý trojúhelník, kde délky stran jsou si blízké a proto chyba metody je přijatelná.

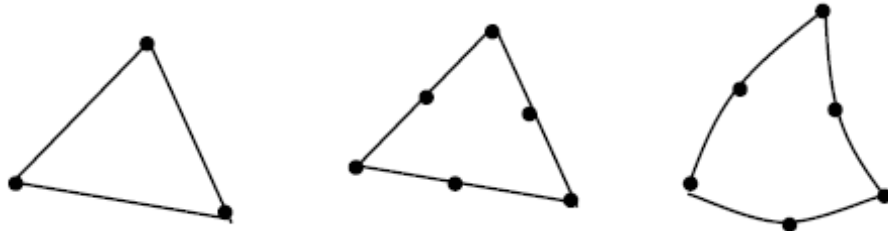
Uvedeme zde několik typů elementů používaných pro diskretizace různých problémů (příklady použité z [7]):

i) 1-Dimenzionální úlohy

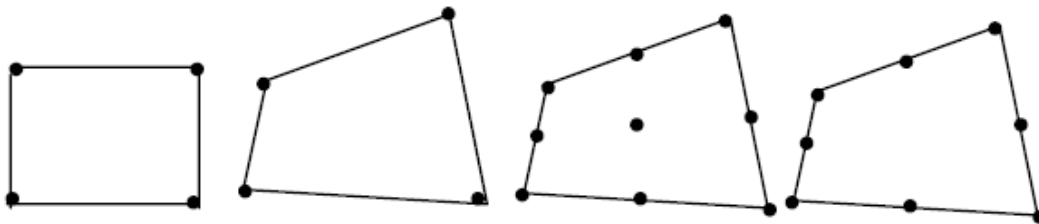


**Obr. 2.4:** V tomto obrázku jsou dvě možnosti diskretizace v 1-D. Vlevo je použita lineární diskretizace, na pravém obrázku pak kvadratické diskretizace

ii) 2-Dimenzionální úlohy

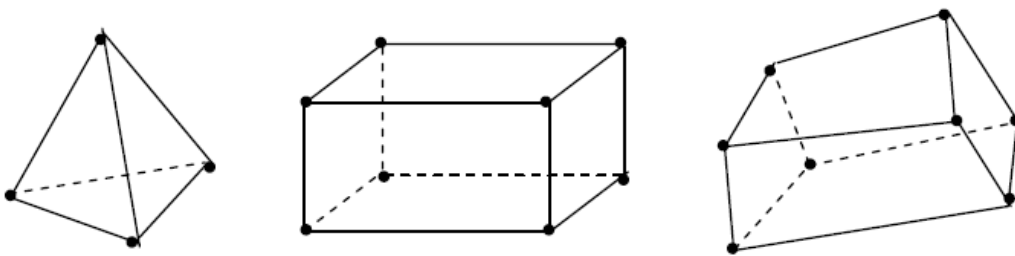


**Obr. 2.5:** V tomto obrázku je ukázáno několik možností triangulací. Vlevo je použita lineární triangulace, na prostředním a pravém obrázku pak dva příklady kvadratické triangulace



**Obr. 2.6:** Zde je ukázána diskretizace pomocí čtyřúhelníků. Lineární triangulace je na dvou příkladech vlevo, na dvou příkladech vpravo pak kvadratická triangulace

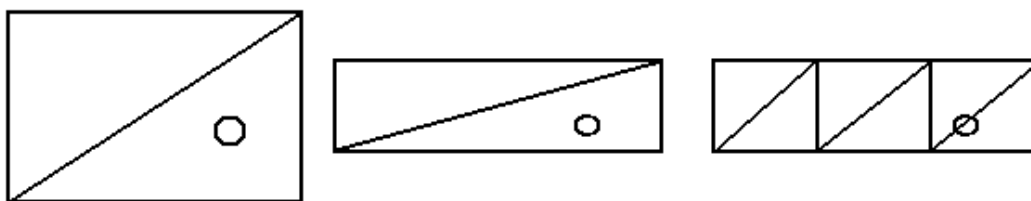
iii) 3-Dimenzionální úlohy



**Obr. 2.7:** V tomto obrázku jsou ukázány tři příklady prostorové diskretizace. Vlevo je diskretizace pomocí čtyřstěnů, uprostřed pomocí pravoúhlých hranol, vpravo pak pomocí obecných šestistěnů.

Uzly diskretizací jsou v obrázcích zobrazeny jako  $\bullet$ . Tyto uzly budou sloužit pro konstrukci báзовých funkcí a prostorů při konkrétním použití diskretizace.

V následující kapitole popíšeme kompozitní metodu konečných prvků.

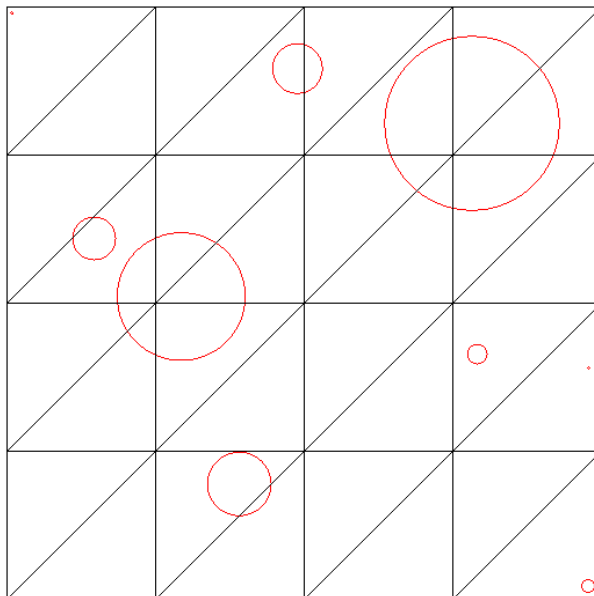


**Obr. 3.1:** Na prvním obrázku je příklad, kdy rozměry oblasti umožňují vytvořit počáteční pokrytí jednoduše rozdělením diagonálou na dva trojúhelníky. Jak vidíme u druhého obrázku, u této oblasti bychom dostali příliš ostrý úhel, což by vedlo ke snížené přesnosti řešení. Na třetím obrázku pak vidíme vhodnější způsob počáteční triangulace oblasti.

### 3 Kompozitní metoda konečných prvků (CFE – Composite finite elements)

#### 3.1 Diskretizace (triangulace) oblasti a hierarchie sítí

V této kapitole čerpáme z článků [1] a [3] a používáme stejné značení. Diskretizaci oblasti a tvorbě hierarchie sítí se již věnovala má bakalářská práce [2], kterou využijeme pro generaci některých obrázků. Kvůli konstrukci matice tuhosti a vektoru pravé strany úlohy však potřebujeme kromě diskretizace uvedené v [2] ještě další informace. V této části textu proto zrekapitulujeme triangulaci oblasti a vše, co budeme potřebovat pro sestavení rovnice úlohy. CFE je nekonformní metoda konečných prvků, tj.  $V_h \not\subset V$ , proto nebudeme definovat standardní prostory konečných prvků, ale vhodným způsobem zahrneme geometrické detaily do definice bází prostorů. Předpokládejme, že  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  má po částech hladkou hranici  $\Gamma = \partial\Omega$ . Hranice oblasti však může obsahovat drobné geometrické detaily, mikrostruktury. Prvním krokem triangulace metody kompozitních konečných prvků je zkoumanou oblast rozdělit pomocí počátečního pokrytí  $\tau_0$ . Toto pokrytí může být například původní obdélníková oblast rozdělená diagonálou na dva trojúhelníky, což je vhodné u čtvercových oblastí, nebo obdélníkových oblastí blízkých čtverci. Vzhledem k tomu, že další kroky triangulace zachovávají poměry stran trojúhelníků z počátečního pokrytí, není vhodné pro příliš vysoké či úzké oblasti takto postupovat. Mohli bychom dostat nevhodný poměr stran trojúhelníku. Proto rozdělíme oblast raději na více trojúhelníků tak, ať vytvoříme co nejlepší poměry stran, viz Obr. 3.1.



**Obr. 3.2:** Síť  $\tau_{l_{min}}$ , kde  $l_{min} = 2$ .

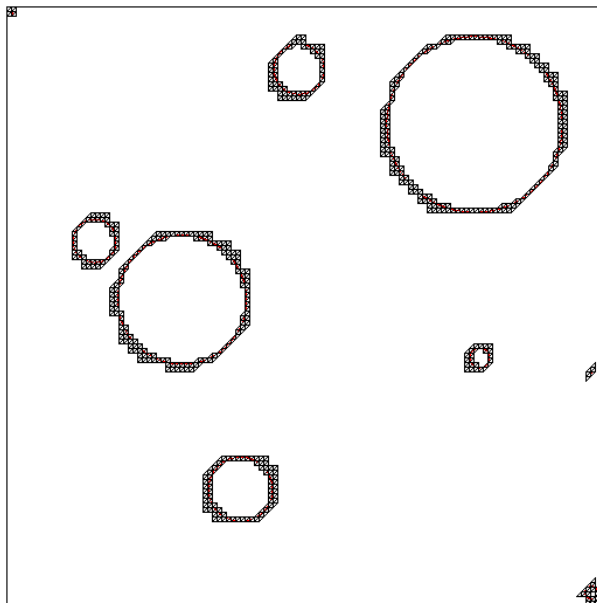
Počáteční pokrytí  $\tau_0$  nemůže být bráno jako aproximace hranice oblasti, ale splňuje pouze rovnost  $\Omega \subset \text{dom } \tau_0$ . Označením  $\text{dom } \tau$  rozumíme vnitřek oblasti pokryté sítí  $\tau$ :

$$\text{dom } \tau = \text{int} \left( \overline{\bigcup_{K \in \tau} K} \right).$$

V další fázi vytvoříme hierarchii sítí  $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{min}}$  tak, že budeme triangulovat oblast  $\Omega$  až na úroveň  $l_{min}$  zjemňováním trojúhelníků počátečního pokrytí  $\tau_0$  oblasti  $\Omega$ , které leží uvnitř oblasti a také těch trojúhelníků, které protínají hranici  $\Gamma$ . Tím mimo jiné dostaneme i síť  $\tau_{l_{min}}$ , která je zobrazena na Obr 3.2. Zjemňování trojúhelníku  $K$  probíhá tak, že jej rozdělíme pomocí středních příček (spojením středů stran) na 4 trojúhelníky ( $K_{1-4}$ ), které dědí tvar původního trojúhelníku a navíc platí:

$$\overline{K} = \left( \overline{\bigcup_{i=1, \dots, 4} K_i} \right)$$

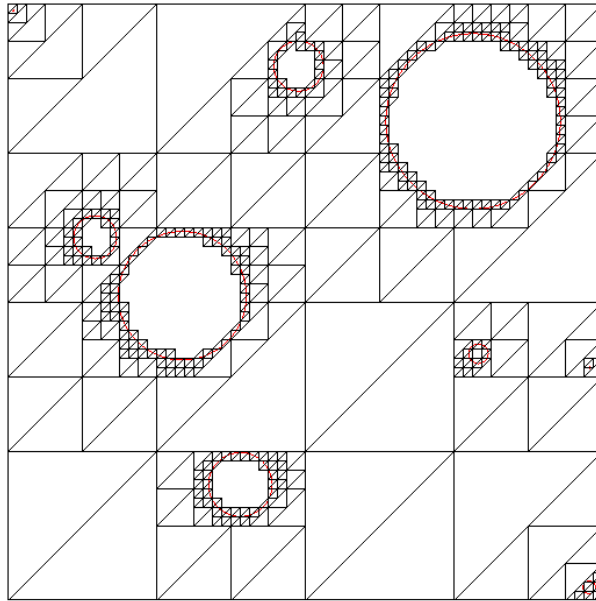
Dále pak vytvoříme hierarchii  $\{\tau_l\}_{l_{min} < l \leq l_{max}}$ , které reprezentují hranici  $\Gamma$  oblasti  $\Omega$ , a proto je budeme označovat jako hraniční síť. Nejjemnější hraniční síť  $\tau_{l_{max}}$  by měla reprezentovat hranici oblasti s dostatečnou přesností. To znamená, že můžeme hranici  $\Gamma$  dostatečně přesně aproximovat užitím hran prvků ležících na této hranici, viz Obr. 3.3. Výše zmíněnou hierarchii hraničních sítí vytvoříme tak, že vždy budeme zjemňovat ty trojúhelníky sítě  $\tau_{l_{max}}$ , které protínají hranici  $\Gamma$  a neleží vně oblasti  $\Omega$ . Použijeme stejný princip zjemňování jako u tvorby



**Obr. 3.3:** Příklad hraniční sítě  $\tau_{l_{max}}$ , kde  $l_{max} = 7$ , reprezentace okraje je již velice přesná.

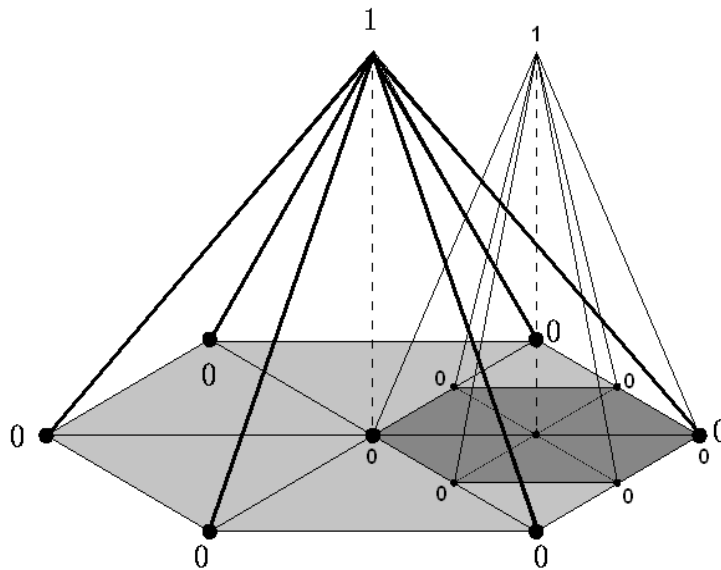
sítě  $\tau_{l_{min}}$ , ale u každého zjemněného trojúhelníku si budeme pamatovat jeho potomky, tj. trojúhelníky vzniklé jeho zjemněním. V algoritmu pak použijeme opačný postup, u každého nově vzniklého trojúhelníku si budeme pamatovat, ze kterého trojúhelníku vznikl. To je důležité při konstrukci básových funkcí a pro výpočet a konstrukci matic úlohy.

Nyní sloučíme síť  $\tau_{l_{min}}$  s hierarchií hraničních sítí tak, že z každé sítě počínaje  $\tau_{l_{min}}$  vybereme ty trojúhelníky  $K$ , které neleží vně oblasti  $\Omega$  a které nemají potomky. Tzn. neexistuje trojúhelník z vyšší sítě, který by vznikl dělením tohoto trojúhelníku, viz Obr. 3.4. Tuto výslednou síť označíme  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$  a nazveme síť kompozitních konečných prvků. Množinu všech uzlů sítě označíme  $\Theta_{l_{min}}^{CFE}$ . Tato síť reprezentuje přesné rozdělení oblasti  $\Omega$ , i když v obecném případě nemůže být považována za klasickou síť konečných prvků, protože se v síti objevují visící uzly a síť je vysoce nerovnoměrná. Zdůrazněme, že jemnější rozdělení oblasti  $\Omega$  poblíž hranice  $\Gamma$  je potřebné k definování básových funkcí a určení jejich nosičů. S každým uzlem této výsledné sítě bude asociována jedna básová funkce. Ke konstrukci těchto básových funkcí použitým algoritmem nám výše zmíněný postup nebude stačit. Bude nutné vytvořit ještě jednu hierarchii sítí  $\{\bar{\tau}_l\}_{l_{min} < l \leq l_{max}}$ . Tuto hierarchii vytvoříme tak, že nebudeme dělit pouze ty trojúhelníky  $K$  sítě  $\tau_{l_{min}}$ , které neleží vně oblasti  $\Omega$  a protínají hranici, ale také všechny trojúhelníky sousední.



**Obr. 3.4:** Příklad sítě  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$ , kde  $l_{min} = 2$  a  $l_{max} = 6$ .

Sousedním trojúhelníkem  $K'$  trojúhelníku  $K$  nazveme takový trojúhelník, který je ze stejné sítě a splňuje  $K \cap \overline{K'} \neq \emptyset$ , tzn mají společný alespoň jeden vrchol. Je zřejmé, že  $\{\tau_l\} \subset \{\bar{\tau}_l\}$  pro každé  $l$ , proto je efektivnější vytvořit nejdříve hierarchii sítí  $\{\bar{\tau}_l\}$  a z té poté vyextrahovat  $\{\tau_l\}$ . To je v algoritmu řešeno tak, že si pro každý trojúhelník  $K$  pamatujeme důvod zjemnění. Zda-li přímo protínal hranici, nebo hranici protínal jeho sused. Pomocí této informace snadno sestavíme z této sítě CFE síť. Stejným způsobem jako jsme tvořili síť  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$  pak vytvoříme síť  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$ . Množinu všech uzlů sítě označme  $\bar{\Theta}_{l_{min}}^{CFE}$ . Pro konstrukci kompozitních konečných prvků budeme ještě potřebovat jeden typ sítí. Podmnožiny sítí  $\{\tau_l\}_{l_{min} \leq l \leq l_{max}}$ , které obsahují jen ty trojúhelníky, které leží uvnitř oblasti  $\Omega$  označíme  $\hat{\tau}_m$  a definujeme je jako  $\hat{\tau}_m = \{K \in \tau_m \mid K \text{ nemá žádné potomky}\}$ . V následující sekci se budeme zabývat definicí bázových funkcí CFE, kde osvětlíme, proč je třeba dělit i trojúhelníky susední a dále se budeme zabývat konstrukcí prostorů CFE.



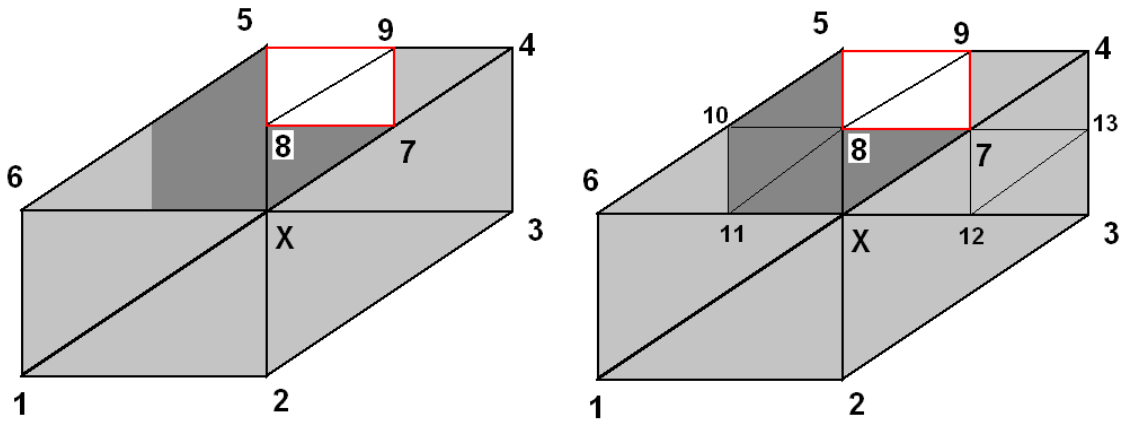
**Obr. 3.5:** Ukázka dvou bázových funkcí z různých úrovní a jejich nosičů. Tmavě šedá označuje nosič funkce z vyšší úrovně, tmavě a světle šedá označuje nosič funkce z nižší úrovně.

### 3.2 Tvorba bázových funkcí

U klasické metody konečných prvků měla každá bázová funkce společnou část nosiče maximálně s tolika jinými bázovými funkcemi, s kolika uzly byl uzel asociovaný touto bázovou funkcí spojen společnou hranou. U kompozitních konečných prvků toto neplatí. To sice znamená, že výsledná matice tuhosti  $A$  bude méně řídká, než u klasické metody, ale to je cena za to, že snížíme dimenzi úlohy při stejné přesnosti na hranici i o několik řádů. Jak tedy budou vypadat bázové funkce u kompozitní metody konečných prvků popíšeme v tomto odstavci. Každá bázová funkce bude na první pohled vypadat stejně jako u klasické metody, tj. jako na Obr. 2.9. Rozdíl ale bude v tom, že funkce asociované s uzly vzniklých na různých úrovních budou mít různé velikosti nosičů, jak je zobrazeno na Obr. 3.5. Nosičem každé bázové funkce bude sjednocení všech potomků trojúhelníků, které vznikly na stejné úrovni jako uzel příslušný této funkci, mimo trojúhelníky ležících vně oblasti  $\Omega$ . Na Obr. 3.6 je zobrazen příklad části sítě  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$  (vlevo) a zobrazení příslušné části sítě  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$  (vpravo). Barevně jsou zde zobrazeny nosiče bázových funkcí asociovaných s uzly X a 8.

Bázová funkce  $\varphi_X^{CFE}$  bude lineární na každém z trojúhelníků, bude nabývat hodnoty 1 na uzlu X a bude mít hodnotu 0 na uzlech 1-6. Hodnota na uzlech 7-13 se dá zjistit jednoduchou interpolací hodnot sousedních uzlů. Bázová funkce  $\varphi_8^{CFE}$  bude nabývat hodnoty 1 na uzlu 8



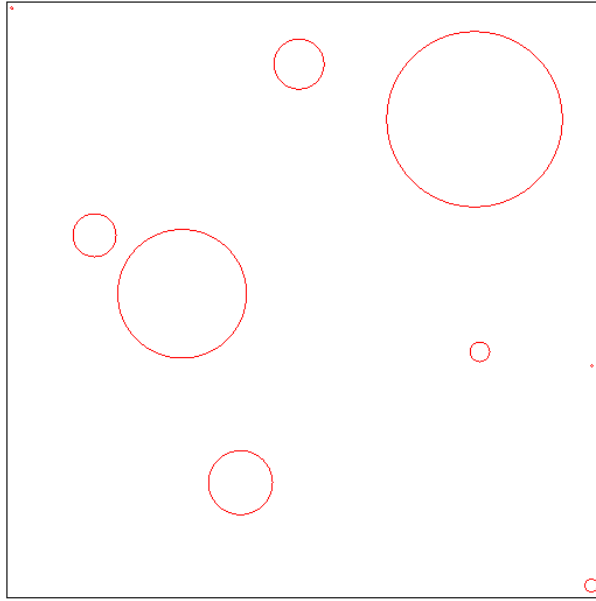


Obr. 3.6: Ukázka nosičů bázových funkcí  $\varphi_X^{CFE}$  a  $\varphi_8^{CFE}$  na sítích  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$  (vlevo) a  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$  (vpravo).

a hodnoty 0 na ostatních uzlech. Bude také lineární na každém trojúhelníku sítě  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$  a po částech lineární na každém trojúhelníku sítě  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$ . S uzly X a 1-9, které jsou uzly obou sítí budou asociovány příslušné funkce. Uzly 10-13 jsou uzly jen pomocné sítě  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$ , s těmito uzly nebudou žádné bázové funkce asociovány. Slouží k určení nosiče bázových funkcí asociovaných s uzly 7-9. Na Obr. 3.6 je nosič bázové funkce  $\varphi_X^{CFE}$  zobrazen šedě (tmavě i světle šedá) a nosič bázové funkce  $\varphi_8^{CFE}$  je zobrazen tmavě šedou barvou. Dva bílé trojúhelníky uvnitř červeného obdélníku značí elementy vně oblasti  $\Omega$ . Nad těmito elementy nebudou žádné bázové funkce definovány. Nosič funkce  $\varphi_X^{CFE}$  bude sjednocení trojúhelníků  $\{1, 2, X\}$ ,  $\{2, 3, X\}$ ,  $\{X, 3, 4\}$ ,  $\{X, 5, 6\}$ ,  $\{X, 7, 8\}$  a  $\{7, 4, 9\}$ . Nosič funkce  $\varphi_8^{CFE}$  bude sjednocení trojúhelníků  $\{X, 7, 8\}$ ,  $\{X, 8, 11\}$ ,  $\{8, 10, 11\}$ , a  $\{8, 5, 10\}$  Průnikem nosičů funkcí  $\varphi_X^{CFE}$  a  $\varphi_8^{CFE}$  bude nosič  $\varphi_8^{CFE}$ .

V předchozím části kapitoly jsme vygenerovali hierarchii hraničních sítí  $\{\tau_l\}_{l_{min} < l \leq l_{max}}$  reprezentující hranici  $\Gamma$  oblasti  $\Omega$  a hierarchii úplných sítí  $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{min}}$ , které pokrývají oblast  $\Omega$ . Na těchto sítích konečných prvků  $\tau$  (buď na hraničních, nebo úplných) můžeme definovat standardní prostory konečných prvků  $S_\tau$

$$S_\tau = \{v \in \mathbb{R}^d(\text{dom } \tau) \mid \forall K \in \tau : v|_K \text{ je po částech lineární} \}.$$



**Obr. 3.7:** Část hranice  $\Gamma_1$  je zobrazena černou barvou a část  $\Gamma_2$  je zobrazena červenou barvou.

### 3.3 Sestavení matice tuhosti a vektoru pravé strany úlohy

Sestavení systému rovnic uvedeme na příkladu eliptické okrajové úlohy s homogenními Dirichletovými podmínkami na hranici. Necht' máme oblast  $\Omega$  tvaru „plátku ementálu“, viz [3]. To znamená, že je obdélníkového tvaru a má kruhové výřezy. Mějme hranici  $\partial\Omega$  rozdělenou na  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$ , kde  $\Gamma_1$  odpovídá okraji obdélníku a  $\Gamma_2$  odpovídá okrajům kruhových výřezů, jak je zobrazeno na Obr.3.7.

Uvažujme následující eliptickou okrajovou úlohu s homogenními Dirichletovými podmínkami:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \end{aligned}$$

Uvažujme CFE diskretizaci oblasti  $\Omega$ . Máme síť  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$ , která obsahuje  $M$  elementů a množinu  $\Theta_{l_{min}}^{CFE}$  obsahující  $N$  uzlů, síť  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$ , která obsahuje  $\bar{M}$  elementů a množinu  $\bar{\Theta}_{l_{min}}^{CFE}$  obsahující  $\bar{N}$  uzlů. Na síti  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$  sestrojíme bázové funkce  $\varphi_i^{CFE}$ , kde  $i = 1, \dots, N$ . Mějme aproximaci slabého řešení  $u_h$  zapsanou následujícím způsobem:

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i(x, y).$$

Máme tedy nalézt  $U = (U_1, \dots, U_N)^T \in \mathbb{R}^N$  tak, aby platilo

$$AU = F,$$

kde  $A = (a_{ij}), F = (F_1, \dots, F_N)^T$ ,

$$a_{ij} = a_{ji} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi_i^{CFE}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^{CFE}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i^{CFE}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j^{CFE}}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$F_j = \int_{\Omega} f \varphi_j^{CFE} dx dy.$$

V této části si popíšeme sestavení matice  $A$  o velikosti  $N \times N$  a sestavení vektoru pravé strany  $F$ .

Pro každý prvek  $\bar{K}$  sítě  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$  s indexem  $\bar{k} = 1, \dots, \bar{M}$  sestavíme lokální matici tuhosti  $A^{\bar{k}}$  a lokální vektor pravé strany  $F^{\bar{k}}$ . Pro sestavení matice  $A^{\bar{k}}$  budeme potřebovat najít všechny bázové funkce, které nemají nad prvkem  $\bar{K}$  nulovou hodnotu. Tyto funkce nalezneme tak, že postupně hledáme předky prvku  $\bar{K}$  až po úroveň  $l_{min}$ . Uzel předka prvku  $\bar{K}$  sítě  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$  s indexem  $i$  bude asociován s bázovou funkcí  $\varphi_i^{CFE}$ , pokud uzel bude zároveň prvkem množiny  $\Theta_{l_{min}}^{CFE}$ . Podle hladiny, na které prvek  $\bar{K}$  vznikl při triangulaci, a podle umístění uvnitř oblasti může takových uzlů být podstatně více, než jen tři, jak bylo u klasické MKP. Seřadíme indexy takto nalezených uzlů a označme je  $i_1, i_2, \dots$ . Těmto uzlům bude odpovídat  $X$  bázových funkcí  $\varphi_i^{CFE}$   $i = i_1, i_2, \dots, i_X$ , které nabývají nenulové hodnoty nad prvkem  $\bar{K}$ . Matice  $A^{\bar{k}} \in \mathbb{R}^{X \times X}$  pro prvek  $\bar{K}$  bude vypadat takto:

$$A^{\bar{k}} = \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1}^{\bar{k}} & a_{i_1 i_2}^{\bar{k}} & \dots \\ a_{i_2 i_1}^{\bar{k}} & a_{i_2 i_2}^{\bar{k}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

Prvky matice spočítáme tímto vzorcem:

$$a_{ij}^{\bar{k}} = \int_{\bar{K}} \nabla \varphi_i^{CFE}(x, y) \cdot \nabla \varphi_j^{CFE}(x, y) dx dy, \text{ kde } i, j = i_1, i_2, \dots, i_X.$$

Zavedeme funkce  $g^{\bar{k}}: \mathbb{R}^{X \times X} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ , které zobrazí matici  $A^{\bar{k}}$  na matici  $A^{\bar{k}*}$ .

$$A^{\bar{k}*} = \begin{bmatrix} \dots & i_1 & \dots & i_2 & \dots \\ * & * & * & * & * \\ * & a_{i_1 i_1}^{\bar{k}} & * & a_{i_1 i_2}^{\bar{k}} & * \\ * & * & * & * & * \\ * & a_{i_2 i_1}^{\bar{k}} & * & a_{i_2 i_2}^{\bar{k}} & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix},$$

kde na místech \* budou nuly.

Výslednou matici tuhosti  $A$  pak spočteme pomocí:

$$A = \sum_{\bar{k}=1}^{\bar{M}} g^{\bar{k}}(A^{\bar{k}}).$$

Vektor  $F^{\bar{k}} \in \mathbb{R}^X$  bude vypadat takto:

$$F^{\bar{k}} = [f_{i_1}^{\bar{k}} \quad f_{i_2}^{\bar{k}} \quad \dots], \text{ kde } f_i^{\bar{k}} = \int_{\bar{K}} f(x, y) \varphi_i^{CFE}(x, y) dx dy, \text{ kde } i = i_1, i_2, \dots, i_X.$$

Zavedeme funkce  $h^{\bar{k}}: \mathbb{R}^X \rightarrow \mathbb{R}^N$ , které zobrazí vektor  $F^{\bar{k}}$  na vektor  $F^{\bar{k}*}$  takto:

$$F^{\bar{k}*} = \begin{bmatrix} \dots & i_1 & \dots & i_2 & \dots \\ * & f_{i_1}^{\bar{k}} & * & f_{i_2}^{\bar{k}} & * \end{bmatrix},$$

kde místo \* budou nuly. Výsledný vektor pravé strany  $F$  pak bude:

$$F = \sum_{\bar{k}=1}^{\bar{M}} h^{\bar{k}}(F^{\bar{k}})^T.$$

Jakmile máme sestavenou globální matici tuhosti  $A$  i vektor pravé strany  $F$  můžeme vyřešit úlohu  $AU = F$  a pomocí  $U = (U_1, \dots, U_N)^T$  získáme hledanou aproximaci řešení  $u_h$ . Samotný výpočet lokálních matic tuhosti provedeme transformací elementu do referenčních souřadnic na referenční trojúhelník, viz Obr. 2.3. Kromě transformace objemu elementu budeme ještě potřebovat transformace gradientů jednotlivých básových funkcí. Prvky matice  $A^{\bar{k}}$  elementu  $\bar{K}$  s uzly  $X=(x_X, y_X)$ ,  $Y=(x_Y, y_Y)$ ,  $Z=(x_Z, y_Z)$  spočteme takto:

$$a_{ij}^{\bar{k}} = b^{iT} \cdot b^{j \cdot 1/2} \cdot |\det R^{\bar{k}}|,$$

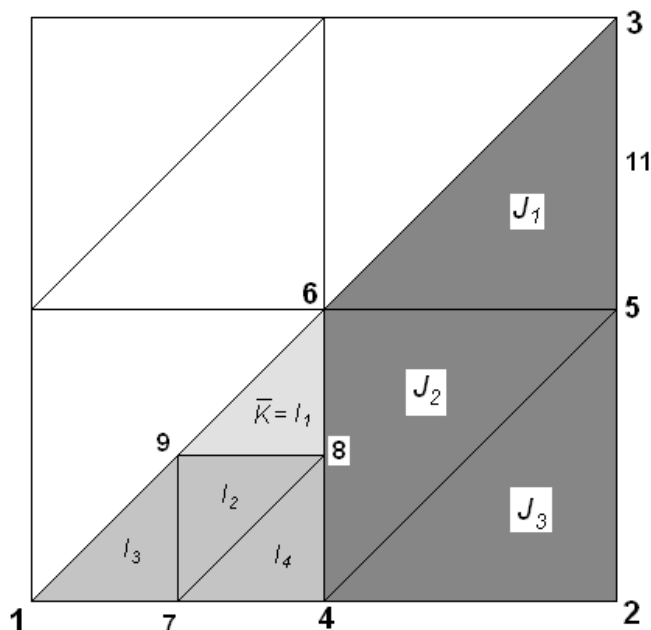
kde  $|\det R^{\bar{k}}|$  je změna objemu trojúhelníku při transformaci,  $1/2$  je obsah referenčního trojúhelníku a  $b^i$  a  $b^j$  jsou prvky matic  $B^I$  a  $B^J$ , což jsou transformační matice elementu  $I$ , resp.  $J$ , gradientu funkce  $\varphi_i$ , resp.  $\varphi_j$ , kde  $i, j = a, b, c, \dots$  do referenčních souřadnic. Element  $I$ , resp.  $J$ , je předek prvku  $\bar{K}$  z hladiny, na které vznikl uzel  $i$ , resp.  $j$ . Příklad je zobrazen na Obr. 3.8. Matici  $R^{\bar{k}}$  získáme takto:

$$R^{\bar{k}} = \begin{bmatrix} x_Y - x_X & x_Z - x_X \\ y_Y - y_X & y_Z - y_X \end{bmatrix}.$$

Matici  $B^I$ , resp.  $B^J$  spočteme tímto vzorcem:

$$B^I = (R^I)^{-T} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kde má element  $I$  uzly  $X^I = (x_X^I, y_X^I)$ ,  $Y^I = (x_Y^I, y_Y^I)$ ,  $Z^I = (x_Z^I, y_Z^I)$ . Vektor  $b^i$  pak odpovídá příslušnému sloupci matice  $B^I$ .



**Obr. 3.8:** Na obrázku je zobrazena ukázková triangulace. Trojúhelníky  $\{1,7,9\}$ ,  $\{7,8,9\}$ ,  $\{7,4,8\}$  a  $\{9,8,6\}$  vznikly zjemněním trojúhelníku  $\{1,4,6\}$ . Ten spolu s  $\{4,2,5\}$ ,  $\{4,5,6\}$  a  $\{6,5,3\}$  vznikl zjemněním trojúhelníku  $\{1,2,3\}$ . Máme spočítat matici tuhosti pro prvek  $\bar{K}$  s indexem  $\bar{k}$ . Nenulovou hodnotu na tomto prvku budou mít báze funkce  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_8$  a  $\varphi_9$ . Matice  $A^{\bar{k}}$  proto bude mít rozměr  $7 \times 7$ , tomu odpovídají řádky a sloupce matice s indexy  $1, \dots, 7$ . Prvek matice  $A^{\bar{k}}$  pro uzly 1 a 4 spočítáme pomocí vzorce  $a_{14}^{\bar{k}} = b^{JT} \cdot b^I \cdot \frac{1}{2} \cdot |\det R^{\bar{k}}|$ , kde element I je trojúhelník  $\{1,4,6\}$  a element J je trojúhelník  $\{1,2,3\}$ .

Matici  $R^I$  vypočítáme takto:

$$R^I = \begin{bmatrix} x_Y^I - x_X^I & x_Z^I - x_X^I \\ y_Y^I - y_X^I & y_Z^I - y_X^I \end{bmatrix}.$$

Transformací do referenčních souřadnice řešíme i výpočet vektoru  $F$ . Prvek  $f_i^{\bar{k}}$  lokálního vektoru pravé strany  $F^{\bar{k}}$  vypočteme pomocí hodnoty funkce  $f$  a hodnoty funkce  $\varphi_i$  v těžišti  $X_t^{\bar{k}} = (x_t^{\bar{k}}, y_t^{\bar{k}})$  trojúhelníku  $\bar{K}$ . Hodnotu báze funkce  $\varphi_i$  v těžišti  $X_t^{\bar{k}}$  spočítáme jako průměrnou hodnotu funkce  $\varphi_i$  v uzlech  $X, Y$  a  $Z$  trojúhelníku  $\bar{K}$ . Hodnoty funkce  $\varphi_i$  v uzlech  $X, Y$  a  $Z$  můžeme získat například jednoduchou interpolací. Prvek  $f_i^{\bar{k}}$  proto spočteme vzorcem:

$$f_i^{\bar{k}} = f(x_t^{\bar{k}}, y_t^{\bar{k}}) \cdot \left( \frac{\varphi_i(X) + \varphi_i(Y) + \varphi_i(Z)}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot |\det R^{\bar{k}}|.$$

## 4 Použité algoritmy a příklady

### 4.1 Algoritmy

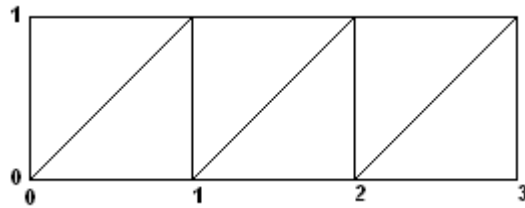
Testovací algoritmus, který slouží k řešení zadané úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \text{ na } \Omega, \\ u &= 0 \text{ na } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ na } \Gamma_2, \end{aligned}$$

se skládá z několika základních kroků. Spouští se s parametry  $l_{min}$  a  $l_{max}$ . Tyto kroky jsou:

- načtení oblasti, podmínky přesnosti ( $h$  - kvůli počátečnímu pokrytí)
- vytvoření počátečního pokrytí podle  $h$
- vytvoření hierarchie úplných sítí  $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{min}}$ , po každém kroku zjemňování provedeme redukci sítě o elementy ležící mimo oblast (uvnitř kruhových výřezů)
- vytvoření hierarchie sítí  $\{\bar{\tau}_l\}_{l_{min} < l \leq l_{max}}$  a opět prováděná redukce
- sestavení CFE sítě  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$ , abychom získali bázové funkce a mohli sestavit matice úlohy
- sestavení  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$
- označení uzlů ležících na okraji vhodnými podmínkami (Dirichlet, Neumann)
- výpočet matice úlohy  $A$  sečtením lokálních matic pro všechny elementy sítě  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$
- výpočet vektoru pravé strany  $F$  sečtením lokálních vektorů elementů sítě  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$  (výpočet  $A$  a  $F$  probíhá v algoritmu jedné metodě)
- aplikace okrajových podmínek
- vyřešení soustavy  $AU=F$
- výpočet řešení  $u_h$
- vykreslení řešení

V této části textu se budeme zabývat ukázkou jednotlivých algoritmů. Pro formulaci některých algoritmů použijeme pseudo-programátorský jazyk. Nejprve tedy popíšeme požadavky na zadání úlohy. Zkoumaná oblast se načítá z textového souboru, kde první hodnota je počet kruhových výřezů, další řádky pak odpovídají těmto výřezům zadaným souřadnicí středu a poloměrem, což nám určí  $\Gamma_2$ , další řádek odpovídá zadanému  $h$  a poslední dva pak odpovídají rohovým bodům, obdélníku určujícími  $\Gamma_1$ .



**Obr. 4.1:** Na obrázku je zadaná oblast třikrát širší než vyšší. Při nevhodně zadaném  $h$  bychom mohli získat elementy nevyhovujícího tvaru, příliš ostré úhly. V tomto případě máme  $h$  zadané jako kratší ze stran obdélníku a proto počet dělení výšky( $n_y$ ) bude 1 a šířky ( $n_x$ ) bude 3. Všimněte si, že máme mnohem lepší tvary elementů, než kdybychom dělili oblast pouze diagonálou ( $n_x = n_y = 1$ ).

Dalším krokem je vytvoření počátečního pokrytí podle zadaného  $h$

**metoda** `init_grid(  $\Omega$  ,  $h$  )`

$n_x$  = počet dělení šířky oblasti

$n_y$  = počet dělení výšky oblasti, viz. Obr. 4.1.

**for**  $i = 0$  to  $n_y$

**for**  $j = 0$  to  $n_x$

        vytvor\_uzel – vytvoří uzel odpovídající souřadnicím  $(i,j)$  na Obr. 4.1 a nastaví jeho úroveň na hodnotu 0

        vytvor\_prvky – vytvoří dva prvky, pokud  $i,j > 0$

        vytvor\_hrany – vytvoří příslušné hrany

**end for**

**end for**

**end**

V dalším kroku tvoříme hierarchii úplných sítí  $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{max}}$  algoritmem:

**metoda** `refine_full(uzly, hrany, prvky, hladina)`

**for**  $i = 1$  to počet\_hrany

    vytvor\_uzel – vytvoří uzel uprostřed hrany  $i$  a nastaví jeho úroveň na hodnotu ( $hladina+1$ )

    vytvor\_hrany – vytvoří dvě hrany rozpůlením hrany  $i$

**end for**

**for**  $i = 1$  to počet\_prvků

    vytvor\_hrany – vytvoří 3 hrany spojením středů stran, uzly již vznikly v předchozím cyklu

    vytvor\_prvky – vytvoří 4 prvky spojením středů stran trojúhelníku  $i$  a nastaví, že vznikly z prvku o indexu  $i$

**end for**

**end**

Tento algoritmus voláme od 0 až do hladiny  $l_{min}$ .

Nyní vytvoříme hierarchii sítí  $\{\bar{\tau}_l\}_{l_{min} < l \leq l_{max}}$ . Nejdříve voláme metodu k určení, které prvky dělit:

**metoda refine\_setup**(uzly, hrany, prvky, hladina,  $\Gamma_2$ )

**for** i = 1 to počet\_prvků

    urči\_dělení – označí, zda prvek i leží na hranici  $\Gamma_2$  a tedy jestli jej budeme dělit

**end for**

**for** i = 1 to počet\_prvků

    urči\_sousedství – označí, zda prvek i sousedí s některým prvkem určeným k dělení

**end for**

**end**

Po této metodě zavoláme metodu k dělení prvků:

**metoda refine**(uzly, hrany, prvky, hladina)

**for** i = 1 to počet\_hran

**if** dělit - pokud je hrana součástí prvku určenému k dělení

        vytvoř\_uzel – vytvoří uzel uprostřed hrany i a nastaví jeho úroveň na hodnotu

(hladina+1)

**end if**

**end for**

**for** i = 1 to počet\_prvků

**if** dělit - pokud je prvek určeném k dělení

        vytvoř\_hrany – vytvoří 3 hrany spojením středů stran

        vytvoř\_prvky – vytvoří 4 prvky a nastaví, že vznikly z prvku i

**end if**

**end for**

**end**

Tento postup opakujeme od úrovně  $l_{min} + 1$  až po  $l_{max}$ .

Nyní sestavíme CFE síť  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$ . Součástí této sítě budou všechny prvky, které nemají potomky a ty, které sice mají potomky, ale byly rozděleny kvůli sousedství, nikoliv, že by protínali hranici  $\Gamma_2$ .

Síť  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$  bude obsahovat všechny prvky, které nemají potomky.

Nyní označíme uzly sítě  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$  ležící na  $\Gamma_1$  jako D uzly a dále označíme uzly ležící na  $\Gamma_2$  jako N uzly. Vzhledem k tomu, že máme zadány homogenní Neumannovy podmínky, tak neměníme výpočet matic úlohy. Aplikace Dirichletových podmínek nám ovšem ušetří několik výpočtů prvků matice úlohy.



Funkce  $f$  bude vzhledem k zadání vektor jedniček. Matici  $A$  a vektor pravé strany  $F$  sestavíme tímto algoritmem:

**metoda compute**(uzly, prvky\_  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$ , uzly\_  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$ ,  $f$ )

**for** i = 1 to počet\_prvků\_  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$

    připrav\_indexy – připraví indexy uzlů, ke kterým mají příslušné asociované báze funkce nenulovou hodnotu nad tímto prvkem

**for** j = počet\_indexů

            urči\_index\_  $i_j$  – index  $i_j$  odpovídá  $j$ -tému indexu z připravených

            vypočti\_  $f_{i_j}^i$  – viz kapitola 3.3

$F(i_j) = F(i_j) + f_{i_j}^i$  - přičte hodnotu k příslušné hodnotě vektoru  $F$

**for** k = počet\_indexů

**if** (j == k) nebo (j a k nejsou D uzly) – aplikace Dirichletových podmínek

                urči\_index\_  $i_k$  – index  $i_k$  odpovídá  $k$ -tému indexu z připravených

                vypočti\_  $a_{i_j, i_k}^i$  – viz kapitola 3.3

$A(i_j, i_k) = A(i_j, i_k) + a_{i_j, i_k}^i$

**end if**

**end for**

**end for**

**end for**

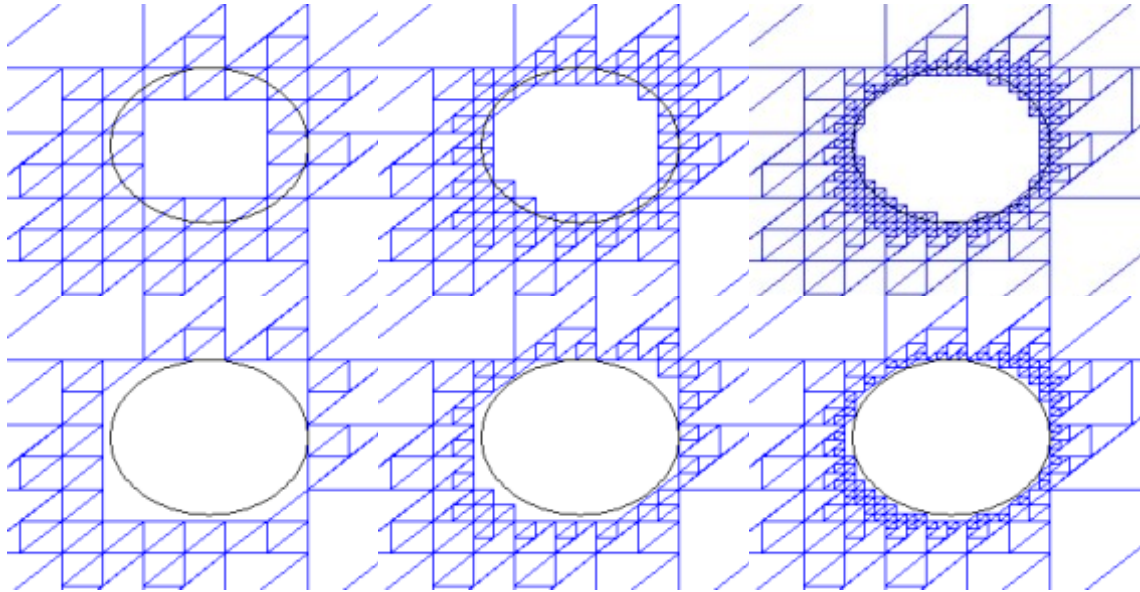
**end**

Nyní již stačí vyřešit soustavu  $AU=F$ . Dostaneme  $U=(U_1, \dots, U_N)^T$  a pomocí

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i(x, y)$$

vyjádříme hledanou aproximaci řešení  $u_h$ .

Nyní už zbývá jen vykreslit výsledné řešení. To provádíme vykreslováním jednotlivých trojúhelníků sítě  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$  do jednoho grafu. Několik konkrétních příkladů ukážeme v následující části textu, včetně několika vykreslení výsledných grafů.



**Obr. 4.2:** Na prvním řádku obrázku je zobrazena „klasická“ triangulace zevnitř, na druhém řádku je pak zobrazena triangulace z vnějšku kruhových výřezů, jak jsme použili v ukázkovém příkladu.

## 4.2 Příklad řešení Poissonovy úlohy na oblasti se třemi výřezy

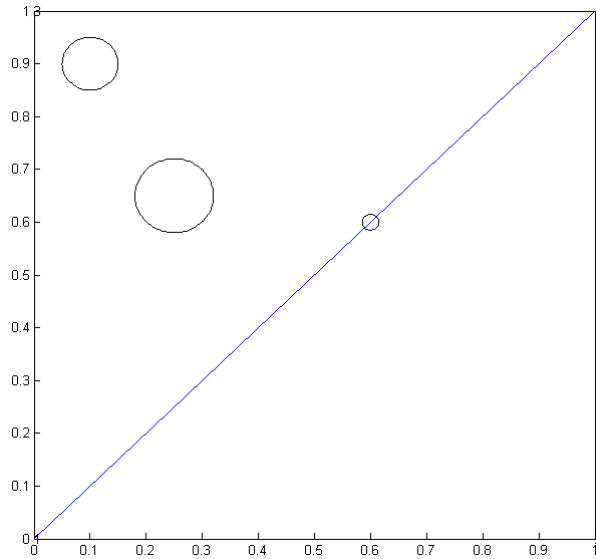
V ukázkovém příkladu je použita ukážka, kdy jsou sítě  $\tau_{l_{min}}^{CFE}$  a  $\bar{\tau}_{l_{min}}^{CFE}$  tvořeny tak, abychom se k části okraje  $\Gamma_2$  blížili volbou  $l_{max}$  z vnějšku kruhových výřezů, viz Obr. 4.2, a ne zevnitř, jak je popsáno výše. Rozdíl je nepatrný a pro ilustraci je tento postup vhodnější. Uvedeme příklad pro následující Poissonovu okrajovou úlohu s homogenními Dirichletovými a Neumannovými podmínkami:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= 1 \text{ na } \Omega, \\ u &= 0 \text{ na } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ na } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (\blacksquare)$$

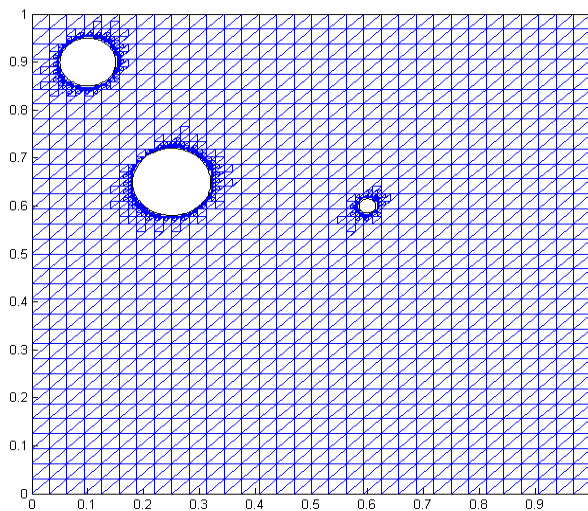
Mějme oblast  $\Omega$  tvaru čtverce o straně 1 a obsahující několik kruhových výřezů, viz. Obr 4.3. CFE diskretizací oblasti  $\Omega$ , kdy máme zadáno  $h=1$ ,  $l_{min}=5$  a  $l_{max}=8$ , viz. Obr 4.4, máme vytvořenou síť  $\tau_5^{CFE}$ , která obsahuje  $M = 3063$  elementů a  $N = 1912$  uzlů. Sestavíme bázevé funkce  $\varphi_i^{CFE}$ , kde  $i = 1, \dots, N$ . Mějme aproximaci slabého řešení  $u_h$ .

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i(x, y).$$

Matice  $A$  má velikost  $1912 \times 1912$ , proto na Obr. 4.5 zobrazíme jen náhled na její nenulové prvky.

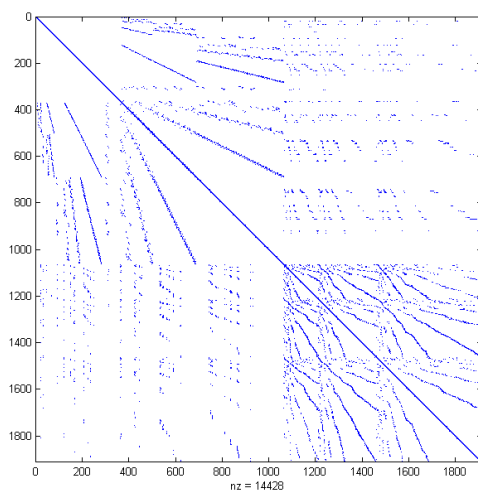


**Obr. 4.3:** Na obrázku je oblast  $\Omega$ , která je definovaná jako  $\tilde{\Omega} - \mathring{\Omega}$ , kde  $\tilde{\Omega} = \{0,1\} \times \{0,1\}$  a  $\mathring{\Omega}$  je sjednocení tří kruhových oblastí. Na obrázku je zobrazeno počáteční pokrytí  $\mathcal{T}_0$  (trojúhelníky  $\{1,3,4\}$  a  $\{1,4,2\}$ ).

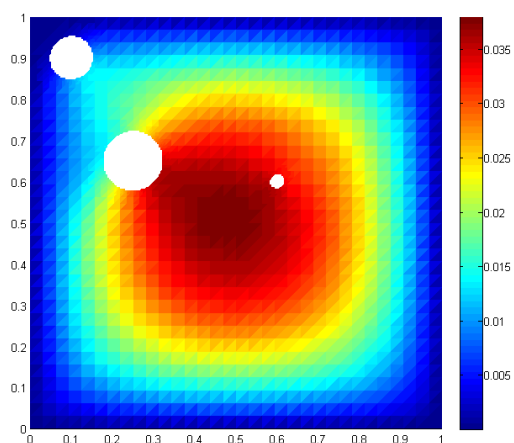


**Obr. 4.4:** Na obrázku je zobrazena CFE síť  $\mathcal{T}_5^{CFE}$ . Je zřejmé, že je vnitřek oblasti reprezentován s dostatečnou přesností, ale na přesnou reprezentaci části hranice  $\Gamma_2$  bylo vhodné diskretizovat jemnějšími trojúhelníky.

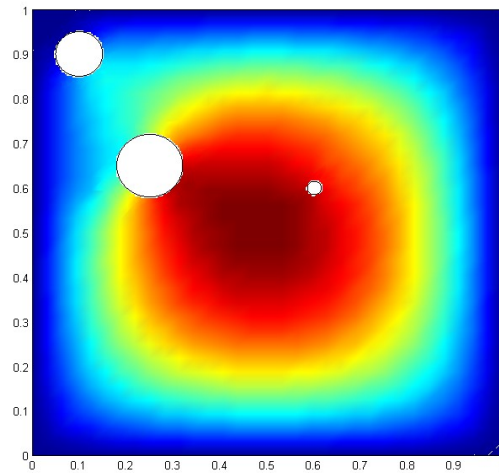
Výsledné řešení této úlohy ukážeme na několika obrázcích. Na Obr. 4.6 je zobrazeno řešení, kde je interpolována barva jednotlivých elementů, podle rozsahu řešení a je zde zobrazena stupnice hodnot. Na Obr. 4.7 je zobrazeno řešení, které je interpolováno postupně přes celou oblast. Na Obr. 4.8 je zobrazen 3D graf výsledného řešení vykreslen po jednotlivých elementech. Díky nekonformnosti triangulace obsahuje 3D graf několik otvorů, protože je vykreslován přes elementy.



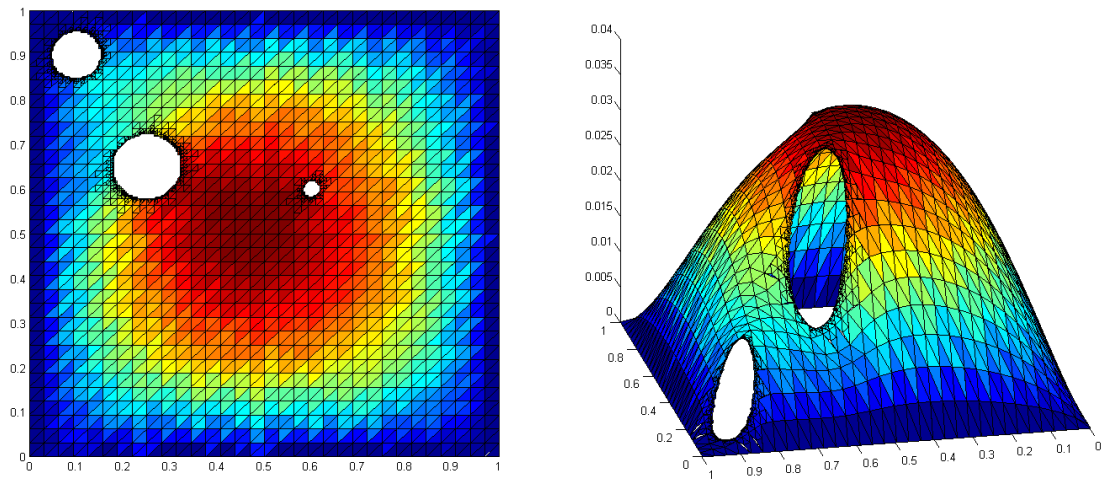
**Obr. 4.5:** Na obrázku jsou zobrazeny nenulové prvky matice  $A$ . V matici, která obsahuje přes 3 milióny prvků je jich nenulových jen 14428. Řidkost matice je způsobena nejen konstrukcí básových funkcí, ale i aplikací Dirichletovy homogenní podmínky.



**Obr. 4.6:** Jeden z příkladů prezentace řešení. Je zde zobrazena stupnice hodnot řešení. Jednotlivé elementy mají barvu podle průměrné hodnoty vrcholů tohoto elementu.



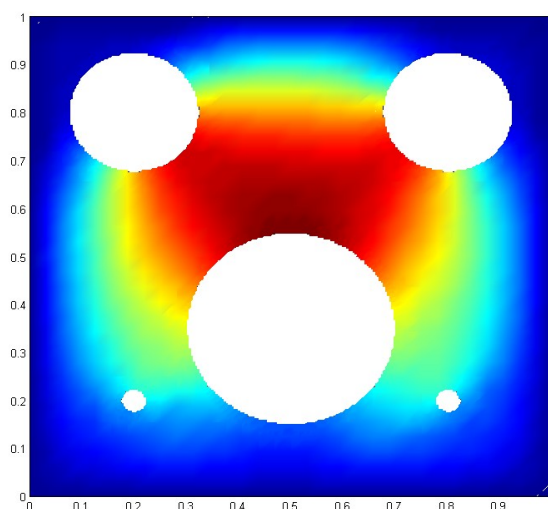
**Obr. 4.7:** Zde je zobrazeno hladké stínování řešení. Černými kružnicemi je zobrazena skutečná hranice  $\Gamma_2$ .



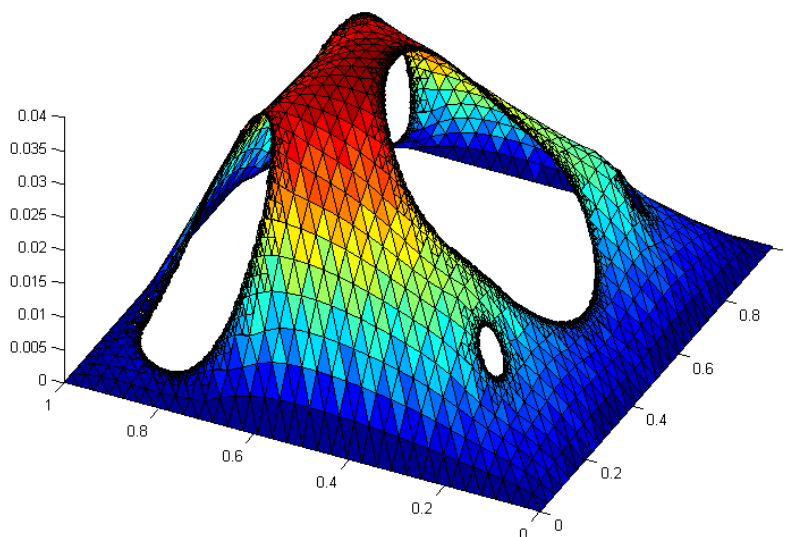
**Obr. 4.8:** Na této dvojici obrázků je zobrazeno řešení včetně triangulace. V levé části je klasické 2D zobrazení, vpravo je pak 3D zobrazení, kde je v nejbližším rohu vidět několik otvorů vzniklých nekonformností triangulace.

### 4.3 Příklad řešení Poissonovy úlohy na oblasti s pěti výřezy

Zde uvedeme Poissonovu okrajovou úlohu (⊙) pro oblast  $\Omega$  se složitější hranicí  $\Gamma_2$  oproti příkladu z kapitoly 4.2. Oblast tohoto příkladu je  $\Omega = \tilde{\Omega} - \mathring{\Omega}$ , kde  $\tilde{\Omega} = \{0,1\} \times \{0,1\}$  a  $\mathring{\Omega}$  je sjednocení tří větších kruhových výřezů a dvou menších. Tento příklad dobře ilustruje jaký má geometrie oblasti vliv na průhyb membrány a jaký vliv má homogenní Neumannova podmínka na hranici  $\Gamma_2$ . Při homogenní Neumannově podmínce musí být izolinie (vrstevnice) kolmé na tuto hranici v každém jejím bodě, což je nejlépe patrné z Obr. 4.9. Na Obr. 4.10 je pak 3D zobrazení průhybu membrány. Výsledné řešení je pro hodnoty  $h=1$ ,  $l_{min}=5$  a  $l_{max}=8$ .



Obr. 4.9: Hladké barevné stínování řešení.



Obr. 4.10: Prohnutí membrány ve 3D pohledu.

## 5 Závěr

Studiem metody kompozitních konečných prvků jsem strávil a ještě strávím mnoho času. Tato metoda umožňuje řešení mnohých úloh s takovou přesností, která není jinými metodami dosažitelná, ať už z hlediska výpočetní či časové náročnosti. Konstrukce této metody ale není jednoduchá a je třeba najít vhodný kompromis volby  $l_{min}$  a  $l_{max}$  tak, aby metoda byla ještě efektivní pro každou úlohu zvlášť. Při vysokém  $l_{min}$  můžeme obdržet příliš mnoho neznámých, při nízkém snížíme přesnost na oblasti dále od okraje a sice snížíme počet neznámých, zvýšíme ale procentuální počet nenulových prvků matice úlohy.

Mé studium této metody se týkalo jen specifického problému, Poissonovy rovnice s homogenními Dirichletovými a Neumannovými podmínkami. Navíc na oblasti s jasně definovanými geometrickými detaily. Proto je přede mnou ještě spousta práce při studiu této metody pro obecnější úlohy. Program metody jsem postavil tak, aby se dalo výměnou jednotlivých komponent algoritmu přizpůsobit program na jakoukoliv úlohu. Například hranice by mohla být mnohem komplikovanější a v programu by stačilo přepsat metodu pro určení, zda prvek protíná hranici. Přizpůsobit program na oblasti, které budou mít komplikovanější tvar než obdélník se dá také jednoduše, jen úpravou metody tvorby počátečního pokrytí. Také sestavení lineárního systému úlohy pro jiné než Poissonovy úlohy by znamenal pouze úpravu výpočtu lokální matice a vektoru pravé strany pro daný element.

Pro rozsáhlé úlohy a vysoké přesnosti  $l_{min}$  a  $l_{max}$  by bylo vhodné problém paralelizovat, například rozdělením oblasti na několik částí.

Budu se proto zabývat studiem této metody i v budoucnu, ať už její aplikací na komplikovanější problémy nebo na její 3-dimenzionální variantou.

## Seznam použité literatury

- [1] W. Hackbusch, S.A. Sauter – Composite finite elements for problems containing small geometrical details. Part II: Implementation and numerical results. *Comp. Vis. Sci.* 1, pp. 15-25, 1997
- [2] A. Ronovský – Hierarchická triangulace plátku ementálu. Bakalářská práce FEI VŠB-TU Ostrava, 2007  
Práce dostupná na: <http://am.vsb.cz/theses/bakalari/2007/pdfs/ronovsky.pdf>
- [3] W. Hackbusch, S.A. Sauter – Composite finite elements for approximation of PDEs on domains with complicated micro-structures. Institut für Informatik und Praktische Mathematik, Universität Kiel, 1995
- [4] Endre Süli – Finite Element Methods for Partial Differential Equations, 2007  
Text dostupný z: <http://web.comlab.ox.ac.uk/people/Endre.Suli/fem.ps>
- [5] Wikipedia - <http://en.wikipedia.org/wiki>
- [6] [http://www.msc.commas.uni-stuttgart.de/images/car\\_mesh.gif](http://www.msc.commas.uni-stuttgart.de/images/car_mesh.gif)
- [7] <http://amp.postech.ac.kr/course/fem.html> – Introduction to Finite Element Method
- [8] Yousef SAAD - Iterative methods for sparse linear systems. Second edition with corrections, 2000  
Text dostupný z: [http://www-users.cs.umn.edu/~saad/PS/all\\_pdf.zip](http://www-users.cs.umn.edu/~saad/PS/all_pdf.zip)



## **Seznam příloh**

K diplomové práci je přiloženo CD, které obsahuje:

- tuto práci ve formátu .pdf,
- tuto práci ve formátu .odt
- použité obrázky
- testovací soubory uvedených příkladů