

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2013

Lukáš Malý

Primární Metody Rozložení Oblasti a Hraniční Prvky

Primal Domain Decomposition Methods and Boundary Elements

Zadání diplomové práce

Student:

Bc. Lukáš Malý

Studijní program:

N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103T031 Výpočetní matematika

Téma:

Primární metody rozložení oblasti a hraniční prvky
Primal Domain Decomposition Methods and Boundary Elements

Zásady pro vypracování:

Práce se zabývá návrhem paralelních metod pro řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic popisující např. magnetostatiku. Úloha po diskretizaci metodou konečných prvků vede na soustavu lineárních rovnic se symetrickou pozitivně definitní maticí. Primární metody rozložení oblasti autorů Bramble, Pasciaka a Schatze (BPS), viz [1,2], jsou založeny na technice rozložení výpočetní oblasti na podoblasti a následné rozložení matice na blokově diagonální část odpovídající vnitřním uzlům, což se zpracuje nezávisle paralelními procesy, a na Schurův doplněk, který odpovídá neznámým na hranicích podoblastí a který způsobuje komunikaci mezi procesy. Na rozdíl od populárnějších FETI metod, BPS metody nezvyšují počet neznámých a zachovávají pozitivní definitnost úlohy, tudíž je lze použít jako předpokládání v metodě sdružených gradientů. Úlohy na podoblastech lze řešit nepřesně a Schurův doplněk lze reprezentovat pomocí hraničních integrálních rovnic [3]. Robustnost metody bude testována na úloze 2d magnetostatiky se skokem materiálových koeficientů v řádu 1000.

Práce zahrnuje:

- diskretizaci 2d úlohy metodou konečných prvků,
- dekompozici úlohy do podoblastí,
- diskretizaci Steklov-Poincarého operátoru metodou hraničních prvků,
- numerická studie předpokládání diagonálních bloků Schurova doplněku,
- aplikaci na úlohu 2d magnetostatiky.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, A.H. Schatz - The construction of preconditioners of elliptic problems by substructuring I, *Mathematics of Computation* 47 (175): 103-134, 1986.
- [2] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, A.H. Schatz - The Construction of Preconditioners for Elliptic Problems by Substructuring. II, *Mathematics of Computation* 49 (179): 1-16, 1987.
- [3] O. Steinbach, S Rjasanow - *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Springer, 2007.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Dalibor Lukáš, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012

Datum odevzdání: 07.05.2013



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 5. května 2013

A handwritten signature in blue ink, written over a dotted horizontal line. The signature is cursive and appears to read 'Erik Mj'.

Rád bych na tomto místě poděkoval doc. Ing. Daliboru Lukášovi, Ph.D. za příkladné vedení, mnohé rady, připomínky a ochotu, jež mi projevili při psaní této diplomové práce.

Abstrakt

Práce se zabývá primárními metodami rozložení oblasti pro řešení 2-dimenzionální Poissonovy úlohy s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a se skoky v koeficientech. Výpočetní oblast se rozloží na podoblasti, kterým pak odpovídají jednotlivé skoky v koeficientech. Úloha se diskretizuje metodou konečných prvků a převede se tak na soustavu lineárních rovnic, kterou řešíme nepřesnou tříkrokovou metodou s využitím předpodmínění. Konstruuujeme paralelní předpodmiňovač, který se skládá ze tří nezávislých částí. Lokální Dirichletovy úlohy na jednotlivých podoblastech, lokální úlohy pro všechny hrany mezi jednotlivými podoblastmi a nakonec globální Dirichletovy úlohy. Globální úlohu můžeme pro jednoduché tvary podoblastí řešit metodou konečných prvků nad hrubou diskretizační sítí danou dekompozicí, anebo ekvivalentně metodou hraničních prvků s využitím Steklov-Poincarého operátoru, což nám posléze umožňuje řešit úlohu i pro složitější tvary podoblastí. Tato nová varianta řešení je v práci představena a otestována.

Klíčová slova: Schurův doplněk, Steklov-Poincarého operátor, Poissonova rovnice, primární metody rozložení oblasti, metoda konečných prvků, metoda hraničních prvků

Abstract

This work deals with primal domain decomposition methods for a 2-dimensional Poisson equation with homogenous Dirichlet's boundary conditions and jumping coefficients. The computational domain is decomposed into subdomains, that align the coefficients jumps. The problem is discretized by finite element method and converted into system of linear equations, which are solved by inexact three-step method acting as a preconditioner. Parallel preconditioner, comprised of three parts, is introduced. These parts are local problems on subdomains, local problems for all edges between the subdomains and a global coarse problem. The global coarse problem may be discretized by finite element method and also by boundary element method using Steklov-Poincare operator. The boundary element approach gives us the possibility to solve this problem for more complicated shapes of subdomains. This approach is being introduced and tested in this thesis.

Keywords: Schur complement, Steklov-Poincaré operator, Poisson equation, primal domain decomposition method, finite elements, boundary elements

Seznam použitých zkratk a symbolů

LDL^T	– rozklad matice na dolní trojúhelníkovou L , diagonální D a horní trojúhelníkovou L^T
\approx	– aproximace
$\overline{\Omega}$	– uzávěr množiny Ω
$\partial\Omega$	– hranice množiny Ω
\mathbb{N}	– množina přirozených čísel
\mathbb{R}	– množina reálných čísel
\mathbb{R}^2	– dvoudimenzionální eukleidovský prostor, množina uspořádaných dvojic reálných čísel (rovina)
$\mathbb{R}^{n \times m}$	– prostor reálných matic řádu $n \times m$, $n, m \in \mathbb{N}$
$C^\infty(\overline{\Omega})$	– prostor všech reálných funkcí se spojitými derivacemi všech řádů na uzávěru množiny Ω
$L^2(\Omega)$	– prostor funkcí, jejichž druhé mocniny mají na množině Ω konečný Lebesgueův integrál
$\text{diam}(\Omega)$	– průměr (diameter) množiny Ω , $\text{diam}(\Omega) := \sup\{\ x - y\ : x, y \in \Omega\}$
$\text{Lin}M$	– lineární obal množiny M
Df	– definiční obor funkce f
$\text{supp } f$	– nosič funkce f , $\text{supp } f := \overline{\{x \in Df : f(x) \neq 0\}}$
Δ	– Laplaceův operátor
∇u	– gradient funkce u
$\text{div } w$	– divergence vektorového pole w
$\frac{\partial u}{\partial n}$	– derivace ve směru n
$\frac{d\varphi}{dt}$	– derivace podle tečny (tangenciální derivace)
$u _M$	– restrikce funkce u na množinu M
$a(\cdot, \cdot)$	– bilineární forma
\oplus_a	– direktní součet, kolmý vzhledem k bilineární formě a
δ_x	– Diracova distribuce centrovaná do bodu x
$(\cdot)^T$	– symbol pro transpozici matice
X^*	– duální prostor k prostoru X
\emptyset	– prázdná množina
\ln	– přirozený logaritmus
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	– hodnota funkcionálu v bodě nebo také skalární součin

- I – identické zobrazení nebo odpovídající jednotková matice
- $A[i, j]$ – prvek matice A v i -tém řádku a j -tém sloupci
- $\lambda_{min}(A)$ – nejmenší vlastní číslo reálné matice A
- $\lambda_{max}(A)$ – největší vlastní číslo reálné matice A
- $\kappa(A)$ – číslo podmíněnosti reálné pozitivně definitní matice A , $\kappa(A) := \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$

Předmluva

Tato práce se zabývá řešením parciálních diferenciálních rovnic ve dvou dimenzích, konkrétně tedy Poissonovy rovnice se skoky v koeficientech, pomocí přístupu primárních metod rozložení oblasti. Metody rozložení oblasti obecně rozkládají úlohu pro danou oblast na ekvivalentní úlohy pro jednotlivé podoblasti, které jsou navzájem svázané podmínkami přechodu. Jednotlivé lokální úlohy jsou menší a snáze se tak řeší. Díky vývoji nových paralelních výpočetních strojů se dnes různé metody rozložení oblasti využívají téměř pro všechny rozsáhlejší úlohy v nejrůznějších odvětvích. Řešení takovýchto úloh vedou po diskretizaci metodou konečných prvků na soustavy lineárních rovnic, které můžeme přímo řešit nějakou základní numerickou iterační metodou. Ty ovšem často konvergují příliš pomalu, proto se často využívá předpodmínění, díky kterému získáme rychlejší konvergenci. Základní myšlenkou dnešních metod rozložení oblasti tak je řešit místo jedné obrovské úlohy na celé oblasti více menších úloh na jednotlivých podoblastech, které se následně ještě předpodmíní pro dosažení co nejefektivnější metody.

Numerické řešení hledáme na diskrétních konečně-dimenzionálních prostorech souvisejících jak s jemnou diskretizací celé výpočetní oblasti, tak i s dekompozicí na jednotlivé podoblasti. Při řešení úlohy pak pracujeme s příslušnými podprostory odpovídajícími geometrii úlohy a její dekompozici. Vzniklé podprostory odpovídají jednotlivým podoblastem, rozhraní mezi podoblastmi, hranám a vrcholům. Řešení celé úlohy je pak složeno z funkcí v těchto podprostorech.

Cílem této práce je představit a otestovat paralelní metodu rozložení oblasti pro Poissonovu úlohu ve dvou dimenzích se skoky v koeficientech. Součástí metody je sestavení předpodmiňovače, který se skládá ze tří částí. Jedna odpovídá lokálním Dirichletovým úlohám na jednotlivých podoblastech, druhá odpovídá úloze přes jednotlivé hrany mezi podoblastmi, respektive úloze pro dvojici podoblastí sousedící přes danou hranu, a třetí část odpovídá globální Dirichletově úloze. Právě třetí uvedenou část budeme řešit metodou hraničních integrálních rovnic a metodou hraničních prvků, což nám umožní provádět dekompozici oblasti na podoblasti různých složitějších tvarů.

Závěrem této předmluvy se podíváme na přehled jednotlivých kapitol a jejich obsah. V úvodní kapitole, kapitola 1, si ukážeme základní myšlenky a principy metody rozložení oblasti na jednoduchém příkladu. Danou oblast rozložíme na dvě nepřekrývající se podoblasti a zformulujeme variační formulace pro řešení obou ekvivalentních úloh. Dále se podíváme na možnosti diskretizace oblasti, ujasníme si co vlastně rozumíme pod tímto pojmem a zadefinujeme i další potřebné vlastnosti pro diskretizaci, které jsou nezbytné pro správné fungování numerických metod. Poté, v části 1.3, přejdeme metodou konečných prvků k ekvivalentní soustavě lineárních rovnic. Také zde provedeme rozklad na příslušné podprostory odpovídající jednotlivých podoblastem a rozhraní mezi nimi. V poslední části první kapitoly, část 1.4, si ukážeme paralelní metodu na řešení vzniklé soustavy rovnic, která je založena na rozkladu řešení úlohy na jeho homogenní a partikulární část.

V kapitole 2 se budeme věnovat předpodmínění pro danou Poissonovu úlohu. Vyjdeme z úvodní kapitoly a opět rozložíme příslušný konečně-prvkový prostor, ve kterém hledáme řešení, na jednotlivé podprostory. Pro sestavení předpodmínění budeme uva-

žovat nejdříve diskrétní harmonické rozšíření, které transformuje úlohu na rozhraní do podoby Schurova doplňku. Ten se budeme dále snažit aproximovat a předpokmínit. Následně budeme uvažovat lineární interpolaci z vrcholů (rohů) diskretizované sítě pro jednotlivé podoblasti na jejich hrany. Tímto transformujeme globální problém na konečně-prvkovou úlohu na hrubé síti. Implementaci této části v další části textu nahradíme metodou hraničních prvků a nakonec budeme srovnávat jednotlivé přístupy, viz kapitola 4. V druhé části kapitoly se podíváme na odhady kovergence pro uvedené předpokmínění, které jsou výsledkem práce autorů Brambla, Pasciaka, Schatze [2], dále autorů Dryja, Widlund [4] a Toselli, Widlund [16]. Odhady konvergence jsou teoreticky zpracovány pouze pro dekompozici na trojúhelníkové podoblasti, prakticky však uvedená metoda funguje i pro čtvercovou dekompozici, což uvidíme na modelové úloze v kapitole 4.

V kapitole 3 si představíme metodu hraničních a vhodnou aplikaci této metody pro konstrukci daného předpokmínění. Nejdříve si pro Poissonovu úlohu ukážeme jak sestavit hraničně integrální rovnice a představíme reprezentační formuli. Poté sestavíme Steklov-Poincarého operátor, pomocí kterého budeme dále v práci aproximovat matice soustavy pro globální úlohu. Tento přístup přes hraniční prvky nám umožní pracovat s rozkladem do složitějších tvarů než, které umíme řešit metodou konečných prvků.

V kapitole 4 otestujeme předvedenou metodu na několika modelových příkladech. Nejprve budeme čtvercovou oblast dělit na menší čtverce a srovnáme výsledky pro oba přístupy, s využitím konečných prvků i hraničních prvků pro globální úlohu. V obou případech budeme testovat také robustnost metody a závislost na skocích v koeficientech. Druhým příkladem bude rozklad opět čtvercové domény, ovšem tentokrát na podoblasti tvaru L, tzv. L-shape. Takovéto tvary už nejsme schopni rozumně popsat konečnými prvky a tak zde s výhodou využijeme právě představenou hraničně-prvkovou aproximaci. Opět i pro tuto úlohu budeme sledovat závislost na skocích v koeficientech.

Obsah

Předmluva	1
1 Úvod	6
1.1 Formulace úlohy	6
1.2 Diskretizace oblasti	9
1.3 Metoda konečných prvků	11
1.4 Paralelní řešení soustavy tříkrokovou metodou	15
2 Paralelní předpodmínění	17
2.1 Konstrukce předpodmínění	18
2.2 Analýza předpodmínění	29
3 Aplikace hraničních prvků	32
3.1 Hraniční integrální formulace	33
3.2 Steklov-Poincarého operátor	34
3.3 Diskretizace a Galerkinova aproximace Steklov-Poincarého operátoru	36
3.4 Kombinace FEM a BEM matic	39
4 Numerické experimenty	42
4.1 Dekompozice na čtverce	43
4.2 Dekompozice na L-Shape	47
5 Závěr	50
6 Reference	51

Seznam tabulek

1	Výsledky pro různé kombinace dekompozice a diskretizace, dělení na čtverce, A^H - FEM.	45
2	Výsledky pro různé kombinace dekompozice a diskretizace, dělení na čtverce, A^H - BEM.	47
3	Výsledky pro různé kombinace dekompozice a diskretizace, dělení na L-shape, A^H - BEM.	49

Seznam obrázků

1	Rozložení oblasti Ω na 2 podoblasti.	7
2	Ukázka konformní triangulace a jednotlivých situací dvou různých elementů. Vlevo: elementy nesdílejí nic, uprostřed: elementy sdílejí vrchol, vpravo: elementy sdílejí celou hranu.	10
3	a) Bázová funkce, b) Aproximované řešení nad elementem T_k	12
4	Funkce z prostoru V_i , nenulová pouze uvnitř podoblasti Ω_i	13
5	Funkce z prostoru V_Γ , nenulové pouze na rozhraní Γ	14
6	Diskrétní lokální harmonické rozšíření \mathcal{H}^i na oblasti Ω_i	20
7	Rozklad rozhraní Γ na jednotlivé hrany \mathcal{E}_i a vrcholy \mathcal{V}	23
8	Funkce z prostoru $V_{\mathcal{E}_i}$, nenulové pouze na hraně \mathcal{E}_i	23
9	Funkce z prostoru $V_{\mathcal{V}}$, nenulové pouze ve vrcholech \mathcal{V}	24
10	Znázornění lineární interpolace I^H nad jednou hranou mezi dvěma vrcholy. Vlevo znázorněna funkce z $V_{\mathcal{V}}$, vpravo funkce z $\tilde{V}_{\mathcal{V}}$	26
11	Ekvivalentní bázová funkce na hranici a v objemu pro trojúhelníkový element.	40
12	Ekvivalentní bázová funkce na hranici a v objemu pro obdélníkový element.	41
13	Dekompozice čtvercové oblasti Ω na menší čtverce.	44
14	Rozložení funkce $\rho(x)$, vlevo je konstantní na celé oblasti Ω a nabývá hodnoty 1, vpravo nabývá střídavě hodnot 1 a 1000.	44
15	Dekompozice čtvercové oblasti Ω na L-shape.	48
16	Rozložení funkce $\rho(x)$, vlevo je konstantní na celé oblasti Ω a nabývá hodnoty 1, vpravo nabývá střídavě hodnot 1 a 1000.	48

1 Úvod

Tato kapitola je úvodem do metod rozložení oblasti a komplexně pojednává o způsobu, jak můžeme šikovnou cestou řešit okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice. Kapitola nás provede celým postupem řešení Poissonovy okrajové úlohy, od její počáteční formulace ve spojitě podobě, přes diskretizaci, následné sestavení soustavy lineárních rovnic, až po metodu jak tuto soustavu řešit.

V první části se tedy zaměříme na formulaci úlohy pro Poissonovu rovnici s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami na dané oblasti. Oblast posléze rozložíme na více vzájemně nepřekrývajících se podoblastí a zformulujeme ekvivalentní rozloženou úlohu. V druhé části se budeme věnovat diskretizaci, předepsanou oblast pokryjeme konečným počtem elementů. Nad uzly těchto elementů posléze, ve třetí části, sestavíme diskretizovanou úlohu, jejíž řešení odpovídá soustavě lineárních rovnic. V poslední části této kapitoly si ukážeme metodu, kterou lze vhodně řešit příslušnou soustavu lineárních rovnic.

1.1 Formulace úlohy

Základní myšlenky a principy metod rozložení oblasti si ukážeme na jednoduchém příkladě, kdy budeme dělit danou oblast pouze na dvě podoblasti. Zformulujeme dvě ekvivalentní úlohy, úlohu pro celou původní oblast a potom úlohu pro rozklad na jednotlivé podoblasti. Definice příslušných prostorů a slabých řešení diferenciálních úloh naleznete např. v [11, 6].

Mějme danou omezenou oblast Ω ve dvou dimenzích s lipschitzovskou hranicí a na ní uvažujme Poissonovu úlohu s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla u(x)) &= f(x) & \text{v } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x) &= 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

kde pravá strana rovnice, funkce f , je z $L^2(\Omega)$ a $\rho \in L^\infty(\Omega)$ taková, že $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ je tzv. materiálová funkce (z fyziky odpovídá např. tuhosti materiálu). Potom funkce $u \in H_0^1(\Omega)$ je slabým řešením úlohy (1.1) pokud splňuje

$$\int_{\Omega} \rho(x)\nabla u(x)\nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2)$$

Nyní uvažujme dělení oblasti Ω na 2 nepřekrývající se podoblasti tak, že hranice jednotlivých podoblastí jsou lipschitzovské a platí

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Gamma := (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \partial\Omega.$$

Společné hranici mezi oblastmi Ω_1 a Ω_2 , značíme ji Γ , říkáme *rozhraní* (interface), nebo také kostra (skelet). V další formulaci předpokládejme, že $\rho(x)$ je konstantní na každé podoblasti, tedy

$$\rho(x) := \begin{cases} \rho_1 > 0, & \text{pro } x \in \Omega_1, \\ \rho_2 > 0, & \text{pro } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

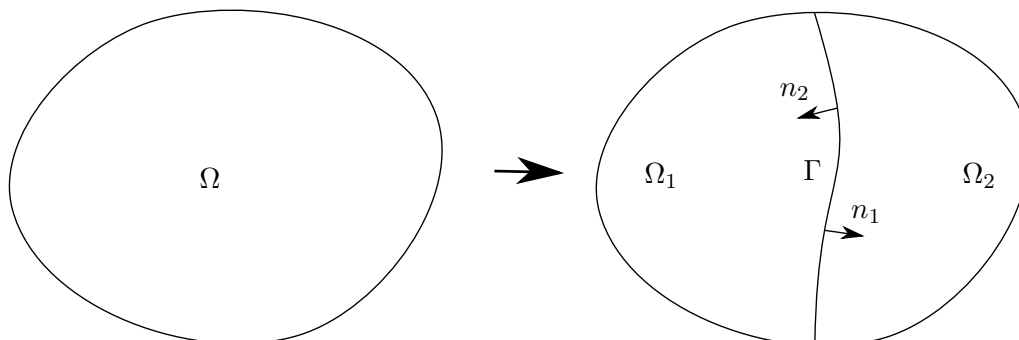
a f je tatáž funkce jako v úloze (1.1). Potom je úloha (1.1) ekvivalentní s následující rozloženou úlohou (dvojice úloh svázaných na rozhraní Γ):

$$\begin{aligned} -\rho_1 \Delta u_1(x) &= f(x) && \text{v } \Omega_1, \\ u_1(x) &= 0 && \text{na } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, \\ u_1(x) &= u_2(x) && \text{na } \Gamma, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1}(x) = -\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2}(x) \quad \text{na } \Gamma, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} -\rho_2 \Delta u_2(x) &= f(x) && \text{v } \Omega_2, \\ u_2(x) &= 0 && \text{na } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma, \end{aligned}$$

kde n_1 je vnější jednotková normála k Ω_1 a n_2 je vnější jednotková normála k Ω_2 , jak je naznačeno na Obrázku 1. Ekvivalence obou úloh se dá ukázat z variační formulace.



Obrázek 1: Rozložení oblasti Ω na 2 podoblasti.

Variační rovnici (1.2) můžeme přepsat do tvaru, kdy oba integrály rozepíšeme na součet integrálů přes jednotlivé oblasti Ω_1 a Ω_2 . Díky vlastnosti materiálové funkce $\rho(x)$, která je po částech konstantní, pak dostaneme

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx + \rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega_1} f(x) v(x) \, dx + \int_{\Omega_2} f(x) v(x) \, dx.$$

Definujme funkce u_1 a u_2 jako restrikce na příslušné podoblasti,

$$u_1(x) := u(x)|_{\Omega_1} \quad \text{a} \quad u_2(x) := u(x)|_{\Omega_2}.$$

Rovnici (1.2) tak můžeme vyjádřit pomocí těchto funkcí jako

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1(x) \nabla v(x) \, dx + \rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2(x) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega_1} f(x)v(x) \, dx + \int_{\Omega_2} f(x)v(x) \, dx.$$

Pokud bychom uvažovali dostatečnou regularitu¹ řešení u , dalo by se ukázat, že funkce u_1 a u_2 splňují všechny podmínky uvedeny v rozložené úloze a jsou tak jejím řešením. Obě úlohy jsou tedy ekvivalentní, funkce u_1 a u_2 jsou restrikcí řešení u na příslušnou podoblast. Podmínkám (1.3) a (1.4) říkáme *podmínky přechodu*, vynucují spojitost řešení a spojitost toku na rozhraní Γ .

Dále se zabýváme touto rozloženou úlohou, uvažujme ovšem obecnější případ, kdy je oblast Ω rozložena na N nepřekrývajících se podoblastí,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \text{pro } i \neq j, \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^N \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega.$$

Úlohu, kterou budeme dále řešit můžeme zapsat takto,

$$\begin{aligned} -\rho_i \Delta u_i(x) &= f(x) && \text{v } \Omega_i, \\ u_i(x) &= 0 && \text{na } \partial\Omega, \\ u_i(x) &= u_j(x) && \text{na } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j, \quad j \neq i, \\ \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial n_i}(x) &= -\rho_j \frac{\partial u_j}{\partial n_j}(x) && \text{na } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j, \quad j \neq i, \end{aligned} \tag{1.5}$$

pro $i = 1, \dots, N$. Navíc dále pro jednoduchost uvažujme pouze oblasti, které jsou *polygonální*. Při diskretizaci takovéto oblasti se nedopustíme žádné chyby v důsledku geometrické nepřesnosti diskretizované oblasti. Taktéž i pro jednotlivé podoblasti předpokládejme, že jsou polygonální.

Nyní zavedme

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \rho(x) \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx, \quad b(v) := \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx,$$

variační formulaci tak můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} &\text{Hledáme } u \in H_0^1(\Omega) \text{ takové, že} \\ &a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Takto definované b je lineární funkcionál a a je *bilineární forma*.

¹Dostatečnou hladkost řešení u , například $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

1.2 Diskretizace oblasti

Abychom mohli danou úlohu řešit numericky, je potřeba oblast Ω diskretizovat, to znamená rozdělit na konečný počet elementů. A následně napočítat řešení v uzlech (vrcholech) této diskretizace.

Z předchozí části máme danou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kterou nyní uvažujeme pouze polygonální². *Elementy* dané *diskretizace* budeme rozumět vždy polygony se stejným počtem vrcholů a podobného tvaru, například trojúhelníky, čtyřúhelníky, atd. Diskretizace oblasti můžou být různě jemné (elementy různě velké), o jemnosti diskretizace vypovídá parametr h . Pochopitelně čím jemnější diskretizaci máme, tím přesnější aproximaci řešení dostaneme, ovšem za cenu vyššího počtu neznámých v následných soustavách rovnic.

Definice 1.1 *Nechť $h > 0$. Diskretizací \mathcal{T}_h oblasti Ω nazýváme takové dělení*

$$\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \dots, T_{n_T}\}$$

oblasti Ω na elementy T_i , pro které platí:

- $\bigcup_{i=1}^{n_T} \bar{T}_i = \bar{\Omega}, \quad T_i \cap T_j = \emptyset, \text{ pro } i \neq j,$
- $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T, \quad h_T = \text{diam}(T).$

h nazýváme diametrem³ diskretizace \mathcal{T}_h .

O diskretizaci \mathcal{T}_h řekneme, že je geometricky konformní (zkráceně, konformní), pokud průnik uzávěrů dvou různých elementů je

1) *prázdná množina, když spolu oba elementy vůbec nesousedí,*

2) *jedno z dvojice*

- *vrchol elementu,*
- *celá strana elementu,*

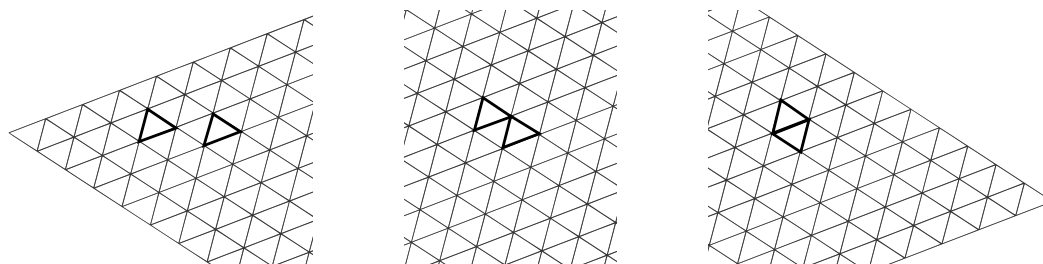
které mají oba elementy společné.

Ukázku takovéto konformní diskretizace vidíme na obrázku 2.

Definice 1.2 *Pokud jsou elementy diskretizace \mathcal{T}_h trojúhelníky, potom takové diskretizaci říkáme triangulace.*

²Tento předpoklad je pouze zjednodušením celé situace, obecně můžeme pracovat pořád s lipschitzovskou oblastí, při diskretizaci bychom ale do řešení zanášeli chybu danou geometrickou nepřesností.

³ $\text{diam}(T) := \sup\{\|x - y\| : x, y \in T\}$... diametr elementu $T \equiv$ největší vzdálenost mezi dvěma body v elementu T .



Obrázek 2: Ukázka konformní triangulace a jednotlivých situací dvou různých elementů. Vlevo: elementy nesdílejí nic, uprostřed: elementy sdílejí vrchol, vpravo: elementy sdílejí celou hranu.

Řešení úlohy, která je uvedena v předchozí části, budeme chtít dále aproximovat funkcí, která bude určena hodnotami v konečném počtu bodů. Jako body, ve kterých budeme aproximované řešení vyčíslovat, uvažujeme vrcholy jednotlivých elementů diskretizace, tzv. *uzly diskretizace*. Uzly diskretizace, které leží na hranici $\partial\Omega$ nebo na rozhraní Γ , nazýváme *hraniční uzly*.

Aby diskretizovaná úloha vůbec konvergovala ke správnému řešení, je třeba po diskretizaci vyžadovat, aby splňovala několik dalších vlastností.

Definice 1.3 Diskretizace \mathcal{T}_h se nazývá tvarově-regulární, pokud existuje kladná konstanta C nezávislá na h taková, že platí

$$h_T \leq C \varrho_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

kde ϱ_T je poloměr kružnice vepsané do T .

Poznámka 1.1 Pokud je diskretizace regulární, pak neobsahuje žádné „degenerované“ elementy, které by byly příliš zploštělé a protažené. U triangulace je tato vlastnost ekvivalentní s tím, že trojúhelníky nemají příliš malé nebo naopak velké vnitřní úhly.

Definice 1.4 Diskretizace \mathcal{T}_h se nazývá kvazi-uniformní, pokud je tvarově-regulární a pokud existuje kladná konstanta C nezávislá na h taková, že platí

$$h_T \geq Ch, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Poznámka 1.2 Pokud je diskretizace kvazi-uniformní, pak nemůže obsahovat elementy, jejichž diametr by se blížil nule. Jedná se tak o diskretizaci, kdy jsou všechny elementy podobně velké. Navíc diametr každého elementu diskretizace musí být vždy odražen od nuly.

Pro naši úlohu budeme nadále uvažovat triangulaci \mathcal{T}_h , která respektuje dělení na jednotlivé podoblasti, tzn. že rozhraní Γ neprotíná žádný element. Navíc předpokládejme, že triangulace

$$\mathcal{T}_h := \{T_1, T_2, \dots, T_{n_T}\}$$

je konformní, tvarově-regulární a kvazi-uniformní. Uzly triangulace \mathcal{T}_h označme \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

1.3 Metoda konečných prvků

V této části zformulujeme diskrétní úlohu nad danou triangulací, která bude aproximovat spojitou úlohu formulovanou v první části kapitoly. Řešení této diskrétní úlohy pak povede na řešení soustavy lineárních rovnic, kdy vektor neznámých odpovídá aproximaci hledané funkce v uzlech diskretizace. Hraníční uzly oblasti Ω jsou ze zadání úlohy nulové a proto je nebudeme ve výsledných soustavách uvažovat. Pokud má tedy diskretizační síť \mathcal{M} celkově n uzlů, soustava bude mít $n - n_D$ neznámých, kde n_D je počet uzlů na nulové Dirichletové hranici oblasti Ω .

Zavedme prostor V jako konečně dimenzionální podprostor prostoru $H_0^1(\Omega)$. Funkce z V jsou dány hodnotami v uzlech diskretizační sítě a na elementech diskretizace jsou lineární.

$$H_0^1(\Omega) \supset V \dots \text{spojité, po částech lineární funkce}$$

Díky Galerkinově aproximaci⁴ budeme nyní hledat přibližné řešení u naší úlohy, značme ho stejně, v prostoru V . Variační formulaci tak můžeme zapsat v diskrétní podobě jako

$$\begin{aligned} &\text{Hledáme } u \in V \text{ takové, že} \\ &a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{1.6}$$

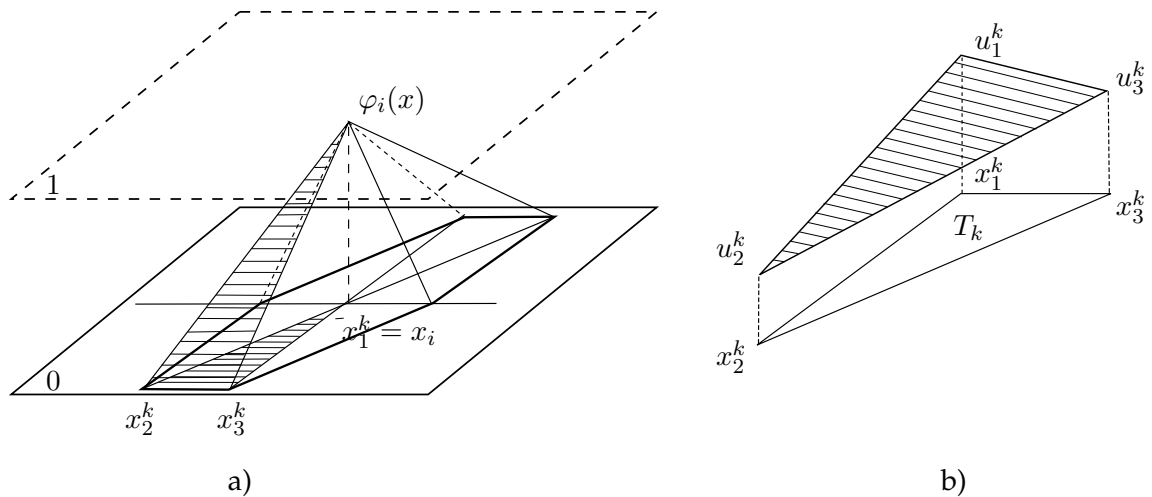
Necht' $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ je báze prostoru V na dané diskretizaci \mathcal{T}_h a síti \mathcal{M} . Jednotlivé bázové funkce definujeme následovně,

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} 1, & x = x_i, \\ 0, & x = x_j \wedge j \neq i, \\ a_k^T x + b_k, & x \in T_k, a_k \in \mathbb{R}^2, b_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n_T, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Bázová funkce $\varphi_i(x)$ je tedy lineární na všech elementech T_k a je nenulová pouze na elementech, které obsahují vrchol x_i (Obrázek 3a). Všechny funkce z V lze vyjádřit jako lineární kombinace prvků báze,

$$\forall v \in V : \quad v(x) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x).$$

⁴Metoda Galerkinovy aproximace je popsána např. v [10]



Obrázek 3: a) Bázová funkce, b) Aproximované řešení nad elementem T_k .

Nyní si prostor V rozložíme na součet podprostorů

$$V = V_1 + \dots + V_N + V_\Gamma,$$

kde

V_i ... spojité, po částech lineární funkce, které jsou nenulové pouze ve vnitřních uzlech oblasti Ω_i a na hranici $\partial\Omega_i$ se nulují (viz obrázek 4),

pro $i = 1, \dots, N$.

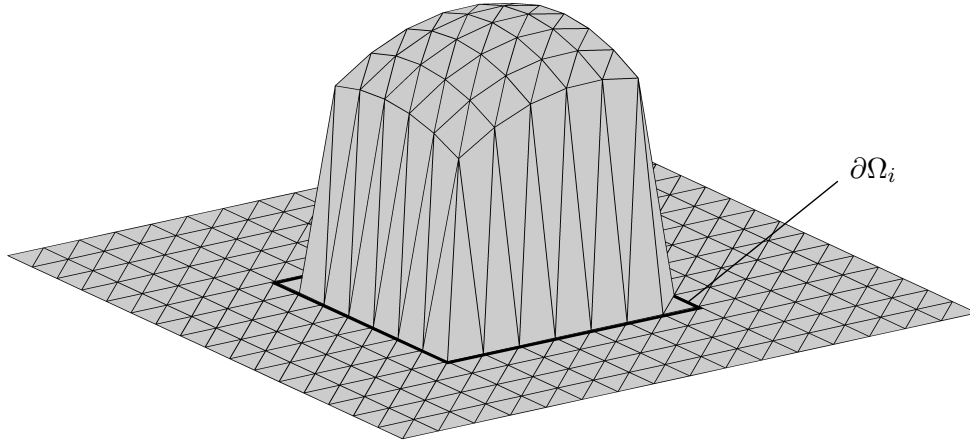
V_Γ ... spojité, po částech lineární funkce, které jsou nenulové pouze v uzlech rozhraní Γ (viz obrázek 5).

Bázové funkce $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ prostoru V můžeme taktéž rozdělit na bázové funkce daných podprostorů V_i a V_Γ .

$$\left\{ \varphi_j^i(x) \right\}_{j=1}^{n^i} \dots \text{ báze prostoru } V_i \text{ pro } i = 1, \dots, N,$$

$$\left\{ \varphi_j^\Gamma(x) \right\}_{j=1}^{n^\Gamma} \dots \text{ báze prostoru } V_\Gamma,$$

kde n^i je počet uzlů diskretizace v oblasti Ω_i a n^Γ je počet uzlů diskretizace na rozhraní Γ . Označme $v^i(x)$ funkci z prostoru V_i pro $i = 1, \dots, N$, a $v^\Gamma(x)$ funkci z prostoru V_Γ . Pak



Obrázek 4: Funkce z prostoru V_i , nenulová pouze uvnitř podoblasti Ω_i .

tyto funkce můžeme vyjádřit pomocí prvků příslušných bází následovně:

$$\forall v^i \in V_i: \quad v^i(x) = \sum_{j=1}^{n^i} v_j^i \varphi_j^i(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.7)$$

$$\forall v^\Gamma \in V_\Gamma: \quad v^\Gamma(x) = \sum_{j=1}^{n^\Gamma} v_j^\Gamma \varphi_j^\Gamma(x). \quad (1.8)$$

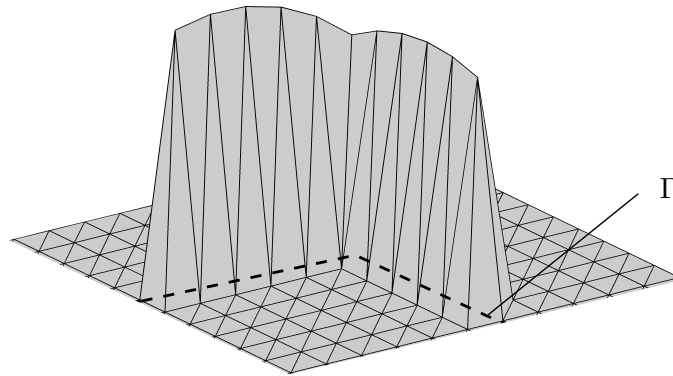
Každou funkci $v(x) \in V$ můžeme zapsat ve tvaru

$$v(x) = v^1(x) + \dots + v^N(x) + v^\Gamma(x) = \sum_{i=1}^N v^i(x) + v^\Gamma(x),$$

kde $v^i \in V_i$ pro $i = 1, \dots, N$ a $v^\Gamma \in V_\Gamma$. Diskrétní variační formulaci (1.6) zapišeme pomocí rozkladu na jednotlivé podprostory ve tvaru

Hledáme $u \in V$, $u = \sum_{i=1}^N u^i + u^\Gamma$ takové, že

$$a \left(\sum_{j=1}^N u^j + u^\Gamma, \sum_{i=1}^N v^i + v^\Gamma \right) = b \left(\sum_{i=1}^N v^i + v^\Gamma \right), \quad \forall v^i \in V_i, i = 1, \dots, N, \forall v^\Gamma \in V_\Gamma.$$



Obrázek 5: Funkce z prostoru V_Γ , nenulové pouze na rozhraní Γ .

A protože navíc platí, že prostory V_i pro $i = 1, \dots, N$ jsou navzájem ortogonální vzhledem k bilineární formě a , což značíme symbolem \oplus_a a zapisujeme jako

$$V = V_1 \oplus_a V_2 \oplus_a \dots \oplus_a V_N + V_\Gamma,$$

můžeme diskrétní variační formulaci dále přepsat jako

Hledám $u^i \in V_i$ pro $i = 1, \dots, N$ a $u^\Gamma \in V_\Gamma$ takové, že

$$a(u^1, v^1) + \dots + 0 + a(u^\Gamma, v^1) = b(v^1), \quad \forall v^1 \in V_1,$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$0 + \dots + a(u^N, v^N) + a(u^\Gamma, v^N) = b(v^N), \quad \forall v^N \in V_N,$$

$$a(u^1, v^\Gamma) + \dots + a(u^N, v^\Gamma) + a(u^\Gamma, v^\Gamma) = b(v^\Gamma), \quad \forall v^\Gamma \in V_\Gamma.$$

Funkce $u^1(x), \dots, u^N(x), u^\Gamma(x)$ hledáme jako lineární kombinace příslušných bázových funkcí podle vztahů (1.7) a (1.8). Uvedená diskrétní variační formulace je tedy ekvivalentní se soustavou lineárních rovnic v maticovém zápise

$$\begin{pmatrix} A^{11} & & & A^{1\Gamma} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & A^{NN} & A^{N\Gamma} \\ A^{\Gamma 1} & \dots & A^{\Gamma N} & A^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ \vdots \\ \bar{u}^N \\ \bar{u}^\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}^1 \\ \vdots \\ \bar{b}^N \\ \bar{b}^\Gamma \end{pmatrix},$$

kde definujeme matice

$$A^{ii}[k, l] := a(\varphi_k^i, \varphi_l^i), \quad A^{i\Gamma}[k, l] = A^{\Gamma i}[l, k] := a(\varphi_k^i, \varphi_l^\Gamma), \quad A^{\Gamma\Gamma}[k, l] := a(\varphi_k^\Gamma, \varphi_l^\Gamma)$$

a vektory

$$\bar{b}^i[k] := b(\varphi_k^i), \quad \bar{b}^\Gamma[k] := b(\varphi_k^\Gamma)$$

pro $i = 1, \dots, N$. A kde vektory $\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^N$ a \bar{u}^Γ odpovídají koeficientům lineární kombinace:

$$\begin{aligned} \bar{u}^i &= (u_1^i, u_2^i, \dots, u_{n_i}^i)^T, \quad \text{pro } i = 1, \dots, N, \\ \bar{u}^\Gamma &= (u_1^\Gamma, u_2^\Gamma, \dots, u_{n_\Gamma}^\Gamma)^T. \end{aligned}$$

Jak sestavit jednotlivé maticové bloky a pravou stranu naleznete např. v [10] (kap. 5) a nebo také v mé bakalářské práci [8]. Matice soustavy je symetrická, pozitivně definitní a díky volbě báze funkcí je také velmi řídká. Celou soustavu budeme zkráceně zapisovat

$$\begin{pmatrix} A^{II} & A^{I\Gamma} \\ A^{\Gamma I} & A^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^I \\ \bar{u}^\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}^I \\ \bar{b}^\Gamma \end{pmatrix},$$

kde I odpovídá všem podoblastem Ω_i pro $i = 1, \dots, N$. Tohoto zjednodušení budeme dále využívat, platí

$$u^I(x) = \sum_{i=1}^N u^i(x), \quad \Rightarrow \quad \bar{u}^I = \begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ \vdots \\ \bar{u}^N \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1.3 Báze jednotlivých prostorů V_i pro $i = 1, \dots, N$ a V_Γ můžeme zapsat i algebraicky. Pro danou soustavu vyjádříme uzlové hodnoty daných báze funkcí ve sloupcích následujících matic,

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times \sum_{i=1}^N n^i} \text{ pro } V_1 + \dots + V_N, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n^\Gamma} \text{ pro } V_\Gamma.$$

1.4 Paralelní řešení soustavy tříkrokovou metodou

Vzniklou soustavu budeme řešit tzv. *tříkrokovou metodou*, která nám umožní části výpočtu provádět pro jednotlivé podoblasti nezávisle a dá se tak snadno paralelizovat. Řešení u rozdělíme na součet homogenního řešení u_H a partikulárního řešení u_P , které je nulové na rozhraní Γ a splňuje zadanou Poissonovu rovnici uvnitř podoblastí:

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x), \quad u(x)|_{\Omega_i} =: u^i(x), \quad u(x)|_\Gamma =: u^\Gamma(x),$$

$$u_P^i(x) := u_P(x)|_{\Omega_i}, \quad u_H^i(x) := u_H(x)|_{\Omega_i}, \quad u_H^\Gamma(x) := u_H(x)|_\Gamma,$$

↓

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_H^I + \bar{u}_P^I \\ \bar{u}_H^\Gamma \end{pmatrix}.$$

Řešíme tedy soustavu

$$\begin{pmatrix} A^{II} & A^{I\Gamma} \\ A^{\Gamma I} & A^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_H^I + \bar{u}_P^I \\ \bar{u}_H^\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}^I \\ \bar{b}^\Gamma \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé části nyní spočteme ve třech krocích:

1. Partikulární řešení u_P^I je konečně-prvkovou aproximací řešení lokální Dirichletovy úlohy na podoblastech Ω_i s nulovými okrajovými podmínkami,

$$\begin{aligned} -\rho_i \Delta u_P^i(x) &= f(x) & \text{v } \Omega_i, \\ u_P^i(x) &= 0 & \text{na } \partial\Omega_i, \end{aligned}$$

pro $i = 1, \dots, N$. Odpovídající vektor \bar{u}_P^I spočteme přímo ze soustavy

$$A^{II} \bar{u}_P^I = \bar{b}^I.$$

2. Homogenní řešení na rozhraní, vektor \bar{u}_H^Γ , vyjádříme po několika úpravách.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A^{II} & A^{I\Gamma} \\ A^{\Gamma I} & A^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_H^I \\ \bar{u}_H^\Gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underbrace{\bar{b}^I - A^{II} \cdot \bar{u}_P^I}_{=0} \\ \bar{b}^\Gamma - A^{\Gamma I} \cdot \bar{u}_P^I \end{pmatrix} - A^{\Gamma I} \cdot (A^{II})^{-1} \cdot \bar{b}^I \\ \begin{pmatrix} A^{II} & A^{I\Gamma} \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_H^I \\ \bar{u}_H^\Gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}^\Gamma - A^{\Gamma I} \cdot \bar{u}_P^I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$S := A^{\Gamma\Gamma} - A^{\Gamma I} (A^{II})^{-1} A^{I\Gamma} \dots$ je tzv. Schurův doplněk

Z (1.9) spočteme \bar{u}_H^Γ přímo jako řešení soustavy

$$S \cdot \bar{u}_H^\Gamma = \bar{b}^\Gamma - A^{\Gamma I} \cdot \bar{u}_P^I.$$

3. Nakonec homogenní řešení u_H^I odpovídá řešení lokální Dirichletovy úlohy na podoblastech Ω_i ,

$$\begin{aligned} -\rho_i \Delta u_H^i(x) &= 0 & \text{v } \Omega_i, \\ u_H^i(x) &= u_H^\Gamma(x) & \text{na } \partial\Omega_i, \end{aligned}$$

pro $i = 1, \dots, N$. Příslušný vektor \bar{u}_H^I tak podle (1.9) spočteme přímo ze soustavy

$$A^{II} \bar{u}_H^I = -A^{I\Gamma} \bar{u}_H^\Gamma.$$

Na této metodě jsou založeny přímé paralelní řešiče. Kroky 1 a 3 se dají snadno paralelizovat, neboť se jedná pouze o lokální úlohy na jednotlivých podoblastech. Krok 2 je ovšem globální úloha a při paralelizaci způsobuje komunikaci mezi procesy, pro vysoký počet podoblastí (vysoké N) a jemnou diskretizaci (malé h) se výpočet v tomto kroku stává velmi náročným. V další kapitole nahradíme krok 2 nepřesným a opět paralelním řešením, které nám dá robustní paralelní předpokmínění.

2 Paralelní předpodmínění

V této kapitole se podíváme na předpodmínění pro úlohu, kterou jsme se zabývali v úvodní kapitole, a sestavíme tzv. vertex-based předpodmiňovač. Vhodným předpodmíněním získáme rychlejší konvergenci iteračních metod, které používáme pro řešení soustavy lineárních rovnic. Obecně je cílem využívat předpodmínění, která jsou relativně levná na konstrukci, jsou robustní a škálovatelná, a řešení úlohy za jejich využití konverguje v malém počtu iterací.

Pro danou soustavu

$$A\bar{u} = \bar{b}$$

hledáme takové předpodmínění \tilde{A} , aby pro předpodmíněnou úlohu platilo

$$\tilde{A}^{-1}A \approx I,$$

tedy aby číslo podmíněnosti matice soustavy bylo co nejbližší jedné. Právě číslo podmíněnosti má vliv na konvergenci iteračních metod.

V našem případě můžeme matici A po LDL^T rozkladu zapsat ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A^{\Gamma I} & (A^{II})^{-1} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{II} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (A^{II})^{-1} A^{\Gamma I} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

odtud vyjádříme její inverzi jako

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} I & -(A^{II})^{-1} A^{\Gamma I} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{II})^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A^{\Gamma I} (A^{II})^{-1} & I \end{pmatrix},$$

kde pro první a poslední člen platí

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A^{\Gamma I} (A^{II})^{-1} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -(A^{II})^{-1} A^{\Gamma I} \\ 0 & I \end{pmatrix}^T.$$

Tento rozklad je ekvivalentní s tříkrokovou metodou popsanou v předchozí části.

Předpodmiňovač, který zde popíšeme a sestavíme, bude ve tvaru

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -(A^{II})^{-1} A^{\Gamma I} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{II})^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{S}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A^{\Gamma I} (A^{II})^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

Všechny části ponecháme přesné, jediné co budeme aproximovat je Schurův doplněk.

V dalším textu, stejně jako v úvodu, budeme pro jednoduchost označovat stejnými symboly slabé řešení $u(x)$ a jeho konečně-prvkovou aproximaci $u^h(x)$. Také u jednotlivých konečně-dimenzionálních podprostorů vynecháme index h .

2.1 Konstrukce předpokmínění

Uvažujme úlohu, která byla uvedena v první části textu, tzn. uvažujme Poissonovu úlohu ve dvou dimenzích na polygonální oblasti Ω , která je rozdělena do N podoblastí tak, že dělení tvoří tzv. *hrubou diskretizaci* s diametrem H . Na jednotlivých podoblastech je materiálová funkce $\rho(x)$ konstantní. Stejně jako v úvodu uvažujme jemnou diskretizaci \mathcal{T}_h , s diametrem h , oblasti Ω takovou, aby respektovala geometrii úlohy a dělení na podoblasti.

Vyjděme z diskrétní variační formulace dané úlohy,

$$\begin{aligned} & \text{Hledáme } u \in V \text{ takové, že} \\ & a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde V je prostor po částech lineárních spojitych funkcích, které jsou dány hodnotami v uzlech diskretizace. K prostoru V mějme uzlovou bázi $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^n$ takovou, jak jsme definovali v kapitole 1.3.

$$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^n : \quad v(x) = \sum_{j=1}^n v_j \varphi_j(x), \quad v \in V.$$

Stejným způsobem jako v kapitole 1.3 zavedme i rozklad prostoru V na jednotlivé podprostory pro všechny podoblasti Ω_i a pro rozhraní Γ ,

$$V = V_1 \oplus_a V_2 \oplus_a \dots \oplus_a V_N + V_\Gamma.$$

K jednotlivým prostorům uvažujme opět jejich uzlové báze $\{\varphi_j^i(x)\}_{j=1}^{n^i}$ pro $i = 1, \dots, N$ a $\{\varphi_j^\Gamma(x)\}_{j=1}^{n^\Gamma}$,

$$\begin{aligned} \{\varphi_j^i(x)\}_{j=1}^{n^i} : \quad v^i(x) &= \sum_{j=1}^{n^i} v_j^i \varphi_j^i(x), \quad v^i \in V_i, i = 1, \dots, N, \\ \{\varphi_j^\Gamma(x)\}_{j=1}^{n^\Gamma} : \quad v^\Gamma(x) &= \sum_{j=1}^{n^\Gamma} v_j^\Gamma \varphi_j^\Gamma(x), \quad v^\Gamma \in V_\Gamma. \end{aligned}$$

Řešení $u \in V$ můžeme jednoznačně vyjádřit jako součet funkcí z jednotlivých podprostorů pomocí příslušných bází, potom diskrétní variační formulace (2.1) je po Galerkinově aproximaci ekvivalentní se soustavou lineárních rovnic ve tvaru

$$\begin{pmatrix} A^{11} & & & A^{1\Gamma} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & A^{NN} & A^{N\Gamma} \\ A^{\Gamma 1} & \dots & A^{\Gamma N} & A^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ \vdots \\ \bar{u}^N \\ \bar{u}^\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}^1 \\ \vdots \\ \bar{b}^N \\ \bar{b}^\Gamma \end{pmatrix},$$

nebo ve zkráceném zápise

$$\begin{pmatrix} A^{II} & A^{I\Gamma} \\ A^{\Gamma I} & A^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^I \\ \bar{u}^\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}^I \\ \bar{b}^\Gamma \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Diskrétní harmonické rozšíření

Připomeňme, že rozhraní $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$. Nyní uvažujme lokálně rozhraní $\Gamma_i := \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$ pro jednotlivé podoblasti, tedy pro $i = 1, \dots, N$, a k nim uvažujme prostory V_{Γ_i} obdobně jako jsme dříve uvažovali prostor V_{Γ} , tedy spojité, po částech lineární funkce, které jsou nenulové pouze na rozhraní Γ_i .

Definujme nejdříve spojité lokální harmonické rozšíření

$$\tilde{\mathcal{H}}^i : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \mapsto H^1(\Omega_i),$$

kde⁵

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) := \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \text{supp } v \subset \Gamma_i \right\},$$

tak, že každé funkci $u^{\Gamma_i} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ jednoznačně přiřadí funkci $\tilde{u}^{\Gamma_i} = \tilde{\mathcal{H}}^i(u^{\Gamma_i}) \in H^1(\Omega_i)$, která je slabým řešením úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u}^{\Gamma_i} &= 0 & \text{v } \Omega_i, \\ \tilde{u}^{\Gamma_i} &= u^{\Gamma_i} & \text{na } \Gamma_i, \\ \tilde{u}^{\Gamma_i} &= 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.2}$$

pro $i = 1, \dots, N$. Dále definujme diskrétní lokální harmonické rozšíření

$$\mathcal{H}^i : V_{\Gamma_i} \mapsto V_{\Gamma_i} + V_i,$$

které každé funkci $u^{\Gamma_i} \in V_{\Gamma_i}$ jednoznačně přiřadí funkci $\mathcal{H}^i(u^{\Gamma_i}) \in V_{\Gamma_i} + V_i$ jako konečně-prvkovou aproximaci úlohy (2.2) rozšířenou nulou do zbytku Ω . Takto definované funkce $\mathcal{H}^i(u^{\Gamma_i})$ jsou jednoznačně určeny hodnotami funkcí u^{Γ_i} na Γ_i , ve všech uzlech mimo $\bar{\Omega}_i$ jsou nulové a jsou také ortogonální ke všem funkcím z V_i vzhledem k bilineární formě a , neboť diskrétní slabou formulaci pro úlohu (2.2) můžeme zapsat jako

$$a(\mathcal{H}^i(u^{\Gamma_i}), v^i) = 0, \quad \forall v^i \in V_i. \tag{2.3}$$

Nyní definujme harmonické rozšíření globálně tak, že lokální harmonické rozšíření provedeme najednou pro celé rozhraní Γ do všech podoblastí. Opět uvažujme nejdříve spojité globální harmonické rozšíření jako

$$\tilde{\mathcal{H}} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \mapsto H_0^1(\Omega),$$

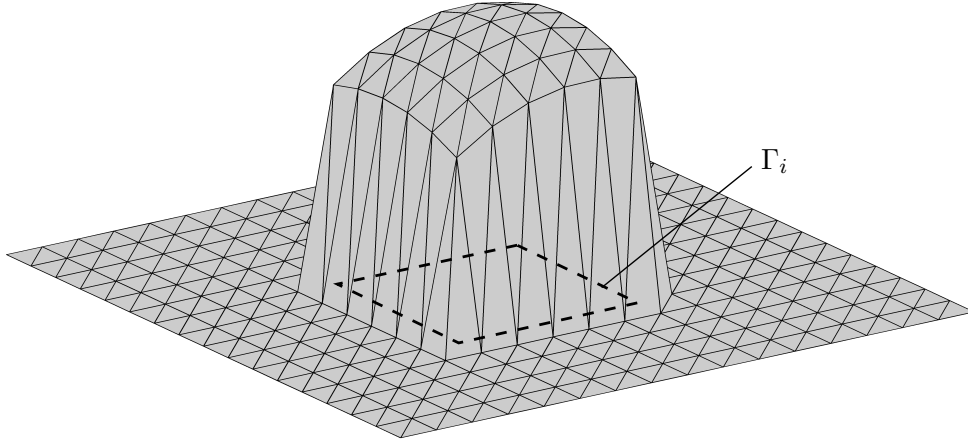
kde

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \left\{ v \in L^2(\Gamma \cup \partial\Omega) : v|_{\Gamma_i} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \text{ pro } i = 1, \dots, N \right\},$$

které splňuje úlohu (2.2) na všech podoblastech současně. Diskrétní globální harmonické rozšíření

$$\mathcal{H} : V_{\Gamma} \mapsto V_{\Gamma} + (V_I)^{\perp_a} =: V_{\mathcal{H}}, \quad V_I := V_1 \oplus_a \dots \oplus_a V_N,$$

⁵supp v ... nosič funkce v , $\text{supp } v := \{x \in Dv : v(x) \neq 0\}$, taková část definičního oboru, na kterém je $v(x)$ nenulová.



Obrázek 6: Diskrétní lokální harmonické rozšíření \mathcal{H}^i na oblasti Ω_i .

definujeme opět jako konečně-prvkovou aproximaci spojitého harmonického rozšíření $\tilde{\mathcal{H}}$ tak, že každé funkci $u^\Gamma \in V_\Gamma$ jednoznačně přiřadí funkci $\mathcal{H}(u^\Gamma) := u^I + u^\Gamma \in V_{\mathcal{H}}$, jako řešení úlohy (podle (2.3))

$$\begin{aligned} & \text{Hledáme } u^I \in V_I \text{ takové, že} \\ & a(u^I + u^{u^\Gamma}, v^I) = 0 \quad \forall v^I \in V_I, \end{aligned}$$

což odpovídá soustavě rovnic

$$\begin{pmatrix} A^{II} & A^{I\Gamma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}^I \\ \bar{u}^\Gamma \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{II}\bar{u}^I = -A^{I\Gamma}\bar{u}^\Gamma. \quad (2.4)$$

Takto definované funkce $\mathcal{H}(u^\Gamma) \in V_{\mathcal{H}}$ jsou jednoznačně určeny hodnotami funkce u^Γ na rozhraní Γ a jsou obecně nenulové na celé oblasti Ω . Díky jejich ortogonalitě ke všem funkcím z prostorů V_i pro $i = 1, \dots, N$ dostáváme rozklad

$$V = V_1 \oplus_a \dots \oplus_a V_N \oplus_a V_{\mathcal{H}}.$$

Bázi prostoru $V_{\mathcal{H}}$ získáme, pokud aplikujeme diskrétní harmonické rozšíření na báze funkce původní prostoru V_Γ :

$$\{\varphi_j^\Gamma(x)\}_{j=1}^{n^\Gamma} \rightarrow \{\varphi_j^{\mathcal{H}}(x)\}_{j=1}^{n^\Gamma}, \quad \varphi_j^{\mathcal{H}}(x) := \mathcal{H}(\varphi_j^\Gamma(x)).$$

Jednotlivé báze funkce $\varphi_j^{\mathcal{H}}$ jsou konečně-prvkovou aproximací úlohy pro $\tilde{\varphi}_j^{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(\varphi_j^{\Gamma})$:

$$\varphi_j^{\mathcal{H}} \approx \begin{cases} -\Delta \tilde{\varphi}_j^{\mathcal{H}}(x) = 0 & \text{v } \bigcup_{i=1}^N \Omega_i, \\ \tilde{\varphi}_j^{\mathcal{H}}(x) = \varphi_j^{\Gamma}(x) & \text{na } \Gamma, \\ \tilde{\varphi}_j^{\mathcal{H}}(x) = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{pro } j = 1, \dots, n^{\Gamma}.$$

Každou funkci $v \in V$ můžeme nově díky harmonickému rozšíření jednoznačně zapsat jako

$$v(x) = \tilde{v}^1(x) + \dots + \tilde{v}^N(x) + \mathcal{H}(v^{\Gamma}) = \sum_{i=1}^N \tilde{v}^i(x) + \mathcal{H}(v^{\Gamma}),$$

kde $\tilde{v}^i \in V_i$ pro $i = 1, \dots, N$ a $v^{\Gamma} \in V_{\Gamma}$. Funkce \tilde{v}^i vyjádříme z původních funkcí jako

$$\tilde{v}^i(x) = v^i(x) - (\mathcal{H}(v^{\Gamma^i}(x)) - v^{\Gamma^i}(x)), \quad i = 1, \dots, N.$$

V dalším textu tyto nové funkce značme stejně jako ty původní. Diskrétní variační formulaci (2.1) tak přeformulujme do tvaru

Hledáme $u \in V$, $u = \sum_{i=1}^N u^i + \mathcal{H}(u^{\Gamma})$ takové, že

$$\begin{array}{ccccccc} a(u^1, v^1) & + & \dots & + & 0 & + & 0 & = & b(v^1), & \forall v^1 \in V_1, \\ & & \ddots & & & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & + & \dots & + & a(u^N, v^N) & + & 0 & = & b(v^N), & \forall v^N \in V_N, \\ 0 & + & \dots & + & 0 & + & a(\mathcal{H}(u^{\Gamma}), \mathcal{H}(v^{\Gamma})) & = & b(\mathcal{H}(v^{\Gamma})), & \forall v^{\Gamma} \in V_{\Gamma}. \end{array}$$

Označme

$$a(\mathcal{H}(u^{\Gamma}), \mathcal{H}(v^{\Gamma})) =: s(u^{\Gamma}, v^{\Gamma}), \quad b(\mathcal{H}(v^{\Gamma})) =: c(v^{\Gamma}),$$

pak je uvedená úloha ekvivalentní s řešením soustavy lineárních rovnic v maticovém zápise

$$\begin{pmatrix} A^{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & A^{NN} & \\ & & & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ \vdots \\ \bar{u}^N \\ \bar{u}^{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}^1 \\ \vdots \\ \bar{b}^N \\ \bar{c} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

kde

$$S := A^{\Gamma\Gamma} - A^{\Gamma I} (A^{II})^{-1} A^{I\Gamma}, \quad \bar{c} := \bar{b}^{\Gamma} - A^{\Gamma I} (A^{II})^{-1} \bar{b}^I.$$

Budeme používat zkrácený zápis

$$\begin{pmatrix} A^{II} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^I \\ \bar{u}^{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}^I \\ \bar{c} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 2.1 Tuto změnu báze můžeme popsat také algebraicky stejně jako v Poznámce 1.3. Po diskrétním rozšíření, viz (2.4), dostaneme uzlové hodnoty báзовých funkcí prostoru $V_{\mathcal{H}}$ ve sloupcích matice

$$\begin{pmatrix} -(A^{II})^{-1}A^{I\Gamma} \\ I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n^\Gamma}.$$

S bázeми zbývajících prostorů V_i se při harmonickém rozšíření nic neděje. Celou transformaci danou harmonickým rozšířením tak můžeme popsat přenásobením

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A^{\Gamma I}(A^{II})^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{II} & A^{I\Gamma} \\ A^{\Gamma I} & A^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -(A^{II})^{-1}A^{I\Gamma} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{II} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

výsledná matice odpovídá matici soustavy (2.5). Tímto jsme ukázali, že harmonickým rozšířením definovaný Schurův doplněk odpovídá Schurovu doplňku tak, jak jsme ho měli algebraicky definovaný v kapitole 1.4.

Při konstrukci předpokmínění můžeme dále postupovat zvlášť pro vnitřní lokální úlohy a pro Schurův doplněk. V našem případě ponecháme řešení vnitřní úlohy přesné a dále budeme aproximovat pouze Schurův doplněk. Podívejme se tedy odděleně na úlohu

$$\begin{aligned} & \text{Hledáme } u^\Gamma \in V_\Gamma \text{ takové, že} \\ & a(\mathcal{H}(u^\Gamma), \mathcal{H}(v^\Gamma)) = b(\mathcal{H}(v^\Gamma)), \quad \forall v^\Gamma \in V_\Gamma, \\ & \text{neboli} \\ & s(u^\Gamma, v^\Gamma) = c(v^\Gamma), \quad \forall v^\Gamma \in V_\Gamma, \end{aligned} \tag{2.6}$$

která odpovídá soustavě lineárních rovnic

$$S\bar{u}^\Gamma = \bar{c}.$$

2.1.2 Rozklad rozhraní na hrany a vrcholy

Rozhraní Γ se skládá z jednotlivých hran, které označíme \mathcal{E}_i , a množiny vrcholů, tu označíme \mathcal{V} . Platí, že

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^M \mathcal{E}_i \cup \mathcal{V},$$

kde teda

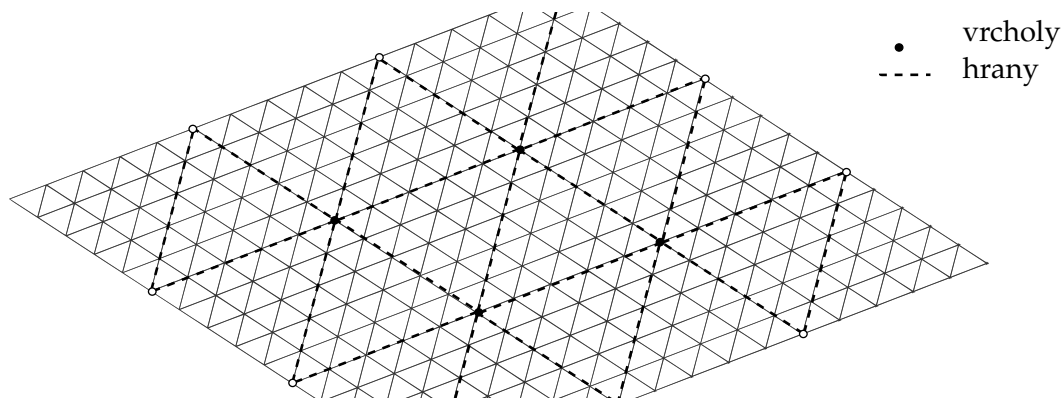
\mathcal{E}_i ... hrana, body příslušící hraně leží na hranici právě dvou podoblastí,

pro $i = 1, \dots, M$, M je celkový počet hran.

\mathcal{V} ... množina všech vrcholů (rožních bodů hrubé sítě), vrcholy jsou body ležící na hranici alespoň tří podoblastí.

Rozložme prostor V_Γ na součet podprostorů tak, aby odpovídaly jednotlivým hranám a vrcholům na

$$V_\Gamma = V_{\mathcal{E}_1} + \dots + V_{\mathcal{E}_M} + V_{\mathcal{V}},$$



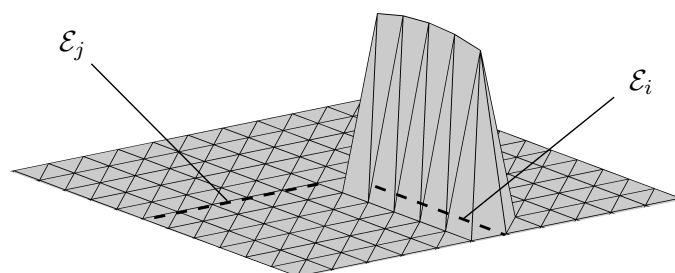
Obrázek 7: Rozklad rozhraní Γ na jednotlivé hrany \mathcal{E}_i a vrcholy \mathcal{V} .

kde

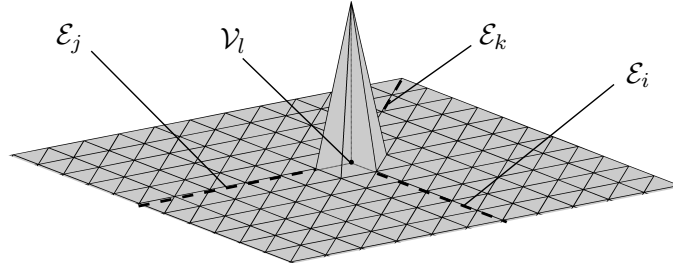
$V_{\mathcal{E}_i}$... spojitě, po částech lineární funkce, které jsou nenulové pouze na hraně \mathcal{E}_i ,

pro $i = 1, \dots, M$.

$V_{\mathcal{V}}$... spojitě, po částech lineární funkce, které jsou nenulové ve všech vrcholových uzlech, body množiny \mathcal{V} , všude jinde jsou nulové.



Obrázek 8: Funkce z prostoru $V_{\mathcal{E}_i}$, nenulové pouze na hraně \mathcal{E}_i .



Obrázek 9: Funkce z prostoru $V_{\mathcal{V}}$, nenulové pouze ve vrcholech \mathcal{V} .

Bázové funkce $\{\varphi_j^\Gamma(x)\}_{j=1}^{n^\Gamma}$ prostoru V_Γ můžeme taktéž rozdělit na bázové funkce daných podprostorů $V_{\mathcal{E}_i}$ a $V_{\mathcal{V}}$.

$$\begin{aligned} \{\varphi_j^{\mathcal{E}_i}(x)\}_{j=1}^{n^{\mathcal{E}_i}} & \dots \text{ báze prostoru } V_{\mathcal{E}_i} \text{ pro } i = 1, \dots, M, \\ \{\varphi_j^{\mathcal{V}}(x)\}_{j=1}^{n^{\mathcal{V}}} & \dots \text{ báze prostoru } V_{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

kde $n^{\mathcal{E}_i}$ je počet uzlů diskretizace na hraně \mathcal{E}_i a $n^{\mathcal{V}}$ je počet vrcholů, tedy počet uzlů hrubé diskretizace.

Každou funkci $z v^\Gamma \in V_\Gamma$ potom zapíšeme ve tvaru

$$v^\Gamma(x) = v^{\mathcal{E}_1}(x) + \dots + v^{\mathcal{E}_M}(x) + v^{\mathcal{V}}(x) = \sum_{i=1}^M v^{\mathcal{E}_i}(x) + v^{\mathcal{V}}(x),$$

kde $v^{\mathcal{E}_i} \in V_{\mathcal{E}_i}$ pro $i = 1, \dots, M$ a $v^{\mathcal{V}} \in V_{\mathcal{V}}$. Diskrétní variační formulaci (2.6) pro Schurův doplněk můžeme přeformulovat na

Hledáme $u^\Gamma \in V_\Gamma$, $u^\Gamma = \sum_{i=1}^M u^{\mathcal{E}_i} + u^{\mathcal{V}}$ takové, že

$$\begin{aligned} s(u^{\mathcal{E}_1}, v^{\mathcal{E}_1}) & + \dots + s(u^{\mathcal{E}_M}, v^{\mathcal{E}_1}) + s(u^{\mathcal{V}}, v^{\mathcal{E}_1}) = c(v^{\mathcal{E}_1}), & \forall v^{\mathcal{E}_1} \in V_{\mathcal{E}_1}, \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ s(u^{\mathcal{E}_1}, v^{\mathcal{E}_M}) & + \dots + s(u^{\mathcal{E}_M}, v^{\mathcal{E}_M}) + s(u^{\mathcal{V}}, v^{\mathcal{E}_M}) = c(v^{\mathcal{E}_M}), & \forall v^{\mathcal{E}_M} \in V_{\mathcal{E}_M}, \\ s(u^{\mathcal{E}_1}, v^{\mathcal{V}}) & + \dots + s(u^{\mathcal{E}_M}, v^{\mathcal{V}}) + s(u^{\mathcal{V}}, v^{\mathcal{V}}) = c(v^{\mathcal{V}}), & \forall v^{\mathcal{V}} \in V_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Při vyjádření jednotlivých funkcí pomocí uvedených bázových funkcí dostáváme opět ekvivalentní soustavu lineárních rovnic v maticovém zápise,

$$\begin{pmatrix} S^{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_1} & \dots & S^{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_M} & S^{\mathcal{E}_1\mathcal{V}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S^{\mathcal{E}_M\mathcal{E}_1} & \dots & S^{\mathcal{E}_M\mathcal{E}_M} & S^{\mathcal{E}_M\mathcal{V}} \\ S^{\mathcal{V}\mathcal{E}_1} & \dots & S^{\mathcal{V}\mathcal{E}_M} & S^{\mathcal{V}\mathcal{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^{\mathcal{E}_1} \\ \vdots \\ \bar{u}^{\mathcal{E}_M} \\ \bar{u}^{\mathcal{V}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}^{\mathcal{E}_1} \\ \vdots \\ \bar{c}^{\mathcal{E}_M} \\ \bar{c}^{\mathcal{V}} \end{pmatrix}.$$

Soustavu budeme zkráceně zapisovat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} S^{\mathcal{E}\mathcal{E}} & S^{\mathcal{E}\mathcal{V}} \\ S^{\mathcal{V}\mathcal{E}} & S^{\mathcal{V}\mathcal{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^{\mathcal{E}} \\ \bar{u}^{\mathcal{V}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}^{\mathcal{E}} \\ \bar{c}^{\mathcal{V}} \end{pmatrix},$$

kde \mathcal{E} odpovídá všem hranám \mathcal{E}_i pro $i = 1, \dots, M$.

2.1.3 Interpolace na hrubý prostor

Nyní definujme lineární interpolaci z vrcholů na přilehlé hrany,

$$I^H : V_{\mathcal{V}} \mapsto \tilde{V}_{\mathcal{V}},$$

kteřá každé funkci $v^{\mathcal{V}} \in V_{\mathcal{V}}$ přiřadí funkci $I^H v^{\mathcal{V}} \in \tilde{V}_{\mathcal{V}}$ tak, že pro všechny vrcholy provede lineární interpolaci na hrany (znázorněno na obrázku 10).

$\tilde{V}_{\mathcal{V}}$... spojitě, po částech lineární funkce, které jsou nenulové pouze na rozhraních Γ a na každé hraně \mathcal{E}_i , pro $i = 1, \dots, M$, jsou lineární.

Bázi prostoru $\tilde{V}_{\mathcal{V}}$ dostaneme z původní báze prostoru $V_{\mathcal{V}}$ aplikací lineární interpolace I^H :

$$\{\varphi_j^{\mathcal{V}}(x)\}_{j=1}^{n^{\mathcal{V}}} \rightarrow \{\tilde{\varphi}_j^{\mathcal{V}}(x)\}_{j=1}^{n^{\mathcal{V}}}, \quad \tilde{\varphi}_j^{\mathcal{V}}(x) := I^H \varphi_j^{\mathcal{V}}(x).$$

Každou funkci z $v^{\Gamma} \in V_{\Gamma}$ můžeme pomocí této lineární interpolace nově vyjádřit ve tvaru

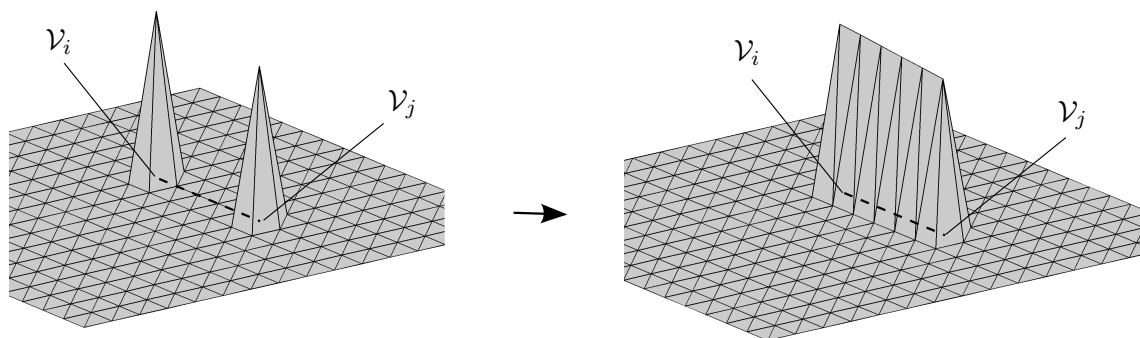
$$v^{\Gamma}(x) = \tilde{v}^{\mathcal{E}_1}(x) + \dots + \tilde{v}^{\mathcal{E}_M}(x) + I^H v^{\mathcal{V}}(x) = \sum_{i=1}^M \tilde{v}^{\mathcal{E}_i}(x) + I^H v^{\mathcal{V}}(x),$$

kde $\tilde{v}^{\mathcal{E}_i} \in V_{\mathcal{E}_i}$ pro $i = 1, \dots, M$ a $v^{\mathcal{V}} \in V_{\mathcal{V}}$. Funkce $\tilde{v}^{\mathcal{E}_i}$ vyjádříme z původních funkcí jako⁶

$$\tilde{v}^{\mathcal{E}_i} = v^{\mathcal{E}_i} - (I^H v^{\mathcal{V}})|_{\mathcal{E}_i}, \quad i = 1, \dots, M.$$

V dalším textu tyto nové funkce značme stejně jako ty původní. Znovu tak můžeme zformulovat úlohu (2.6) v podobě

⁶Nové hranové funkce dané lineární interpolací dostaneme odečtením $I^H v^{\mathcal{V}}$ od těch původních na příslušné hraně. Uvedená restrikce je zde myšlena ve smyslu restrikce na prostor $V_{\mathcal{E}_i}$ a znamená ponechání hodnot na příslušné hraně \mathcal{E}_i a doplnění nulou do celé oblasti Ω , tak aby výsledná funkce stále příslušela prostoru $V_{\mathcal{E}_i}$.



Obrázek 10: Znáornění lineární interpolace I^H nad jednou hranou mezi dvěma vrcholy. Vlevo znázorněna funkce z V_V , vpravo funkce z \tilde{V}_V .

Hledáme $u^\Gamma \in V_\Gamma$, $u^\Gamma = \sum_{i=1}^M v^{\mathcal{E}_i} + I^H v^\mathcal{V}$ takové, že

$$\begin{aligned} s(u^{\mathcal{E}_1}, v^{\mathcal{E}_1}) &+ \dots + s(u^{\mathcal{E}_M}, v^{\mathcal{E}_1}) + s(I^H u^\mathcal{V}, v^{\mathcal{E}_1}) = c(v^{\mathcal{E}_1}), & \forall v^{\mathcal{E}_1} \in V_{\mathcal{E}_1}, \\ \vdots & & \vdots \\ s(u^{\mathcal{E}_1}, v^{\mathcal{E}_M}) &+ \dots + s(u^{\mathcal{E}_M}, v^{\mathcal{E}_M}) + s(I^H u^\mathcal{V}, v^{\mathcal{E}_M}) = c(v^{\mathcal{E}_M}), & \forall v^{\mathcal{E}_M} \in V_{\mathcal{E}_M}, \\ s(u^{\mathcal{E}_1}, I^H v^\mathcal{V}) &+ \dots + s(u^{\mathcal{E}_M}, I^H v^\mathcal{V}) + s(I^H u^\mathcal{V}, I^H v^\mathcal{V}) = c(I^H v^\mathcal{V}), & \forall v^\mathcal{V} \in V_V. \end{aligned}$$

Ekvivalentní soustava lineárních rovnic pro tuto úlohu se od předchozí uvedené liší. Matice soustavy se liší v blocích označených vlnovkou, díky změny báze. Dále se liší také pravá strana a vektor neznámých koeficientů na pozicích odpovídajících uzlům na hranách, ty ovšem značíme stejně, dostáváme tak

$$\begin{pmatrix} S^{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1} & \dots & S^{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_M} & \tilde{S}^{\mathcal{E}_1 \mathcal{V}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S^{\mathcal{E}_M \mathcal{E}_1} & \dots & S^{\mathcal{E}_M \mathcal{E}_M} & \tilde{S}^{\mathcal{E}_M \mathcal{V}} \\ \tilde{S}^{\mathcal{V} \mathcal{E}_1} & \dots & \tilde{S}^{\mathcal{V} \mathcal{E}_M} & \tilde{S}^{\mathcal{V} \mathcal{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^{\mathcal{E}_1} \\ \vdots \\ \bar{u}^{\mathcal{E}_M} \\ \bar{u}^\mathcal{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}^{\mathcal{E}_1} \\ \vdots \\ \bar{c}^{\mathcal{E}_M} \\ \bar{c}^\mathcal{V} \end{pmatrix}$$

a ve zkráceném zápise

$$\begin{pmatrix} S^{\mathcal{E} \mathcal{E}} & \tilde{S}^{\mathcal{E} \mathcal{V}} \\ \tilde{S}^{\mathcal{V} \mathcal{E}} & \tilde{S}^{\mathcal{V} \mathcal{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^\mathcal{E} \\ \bar{u}^\mathcal{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}^\mathcal{E} \\ \bar{c}^\mathcal{V} \end{pmatrix}.$$

Stejně jako v poznámce 2.1 můžeme i lineární transformaci, která mění bázi prostoru V_V , popsat algebraicky. Uvažujme matici R_E^T jako matici lineární interpolace z vrcholů na hrany, pak bázi prostoru \tilde{V}_V algebraicky odpovídá

$$\begin{pmatrix} R_E^T \\ I \end{pmatrix},$$

báze ostatních hranových prostorů se nemění a všem hranám dohromady tak odpovídá matice

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Změnu báze danou příslušnou lineární interpolací tak vyjádříme přenásobením

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ R_E & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{\varepsilon\varepsilon} & S^{\varepsilon\nu} \\ S^{\nu\varepsilon} & S^{\nu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & R_E^T \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{\varepsilon\varepsilon} & \tilde{S}^{\varepsilon\nu} \\ \tilde{S}^{\nu\varepsilon} & \tilde{S}^{\nu\nu} \end{pmatrix}.$$

Dá se ukázat, že matice $\tilde{S}^{\nu\nu}$ vzniklá lineární interpolací odpovídá matici globální Dirichletovy úlohy na hrubé síti A^H , tzn. matici, kterou sestavíme pokud vezmeme jednotlivé podoblasti jako elementy a na nich odpovídající globální bazové funkce.

Uvažujme tedy úlohu na hrubé síti, necht' jsou všechny podoblasti trojúhelníky a tvoří tak elementy diskretizace. Uvažujme klasickou konečně-prvkovou bázi jako v kapitole 1.3. Matici A^H odpovídající této bázi pro danou úlohu můžeme vyjádřit pomocí naší matice A pro jemnou diskretizaci, když příslušně změníme bázi vrcholových funkcí tak, že ji lineárně interpolujeme na hrany a následně harmonicky rozšíříme do všech podoblastí, což zapíšeme následovně,

$$\begin{aligned} A^H &= \begin{pmatrix} R_I & R_E & I \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} R_I^T \\ R_E^T \\ I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_I & R_E & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A^{\Gamma I} (A^{II})^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{II} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (A^{II})^{-1} A^{I\Gamma} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_I^T \\ R_E^T \\ I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde R_I^T je matice diskrétního harmonického rozšíření do jednotlivých podoblastí pro lineární interpolaci z vrcholů na hrany,

$$R_I^T = -(A^{II})^{-1} A^{I\Gamma} \begin{pmatrix} R_E^T \\ I \end{pmatrix}.$$

Pro součin posledních dvou matic ve vyjádření A^H dostáváme

$$\begin{pmatrix} I & (A^{II})^{-1} A^{I\Gamma} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_I^T \\ R_E^T \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_E^T \\ I \end{pmatrix},$$

a proto můžeme dále A^H vyjádřit jako

$$\begin{aligned} A^H &= \begin{pmatrix} R_E & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{\mathcal{E}\mathcal{E}} & S^{\mathcal{E}\mathcal{V}} \\ S^{\mathcal{V}\mathcal{E}} & S^{\mathcal{V}\mathcal{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_E^T \\ I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_E & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -R_E & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{\mathcal{E}\mathcal{E}} & \tilde{S}^{\mathcal{E}\mathcal{V}} \\ \tilde{S}^{\mathcal{V}\mathcal{E}} & \tilde{S}^{\mathcal{V}\mathcal{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -R_E^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_E^T \\ I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{\mathcal{E}\mathcal{E}} & \tilde{S}^{\mathcal{E}\mathcal{V}} \\ \tilde{S}^{\mathcal{V}\mathcal{E}} & \tilde{S}^{\mathcal{V}\mathcal{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} = \tilde{S}^{\mathcal{V}\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

2.1.4 Sestavení předpodmiňovače

Ukázali jsme, že úloha pro Schurův doplněk má po lineární interpolaci následující podobu,

$$s(u^\Gamma, v^\Gamma) = s\left(\sum_{i=1}^M u^{\mathcal{E}_i}, \sum_{i=j}^M v^{\mathcal{E}_j}\right) + s\left(\sum_{i=1}^M u^{\mathcal{E}_i}, v^\mathcal{V}\right) + s\left(u^\mathcal{V}, \sum_{i=j}^M v^{\mathcal{E}_j}\right) + s(u^\mathcal{V}, v^\mathcal{V}),$$

kde poslední člen odpovídá Dirichletově úloze na hrubé síti

$$s(u^\mathcal{V}, v^\mathcal{V}) =: a(u^H, v^H), \quad u^H := \mathcal{H}(I^H u^\mathcal{V}), \quad v^H := \mathcal{H}(I^H v^\mathcal{V}).$$

Pro předpodmínění uvažujme aproximaci Schurova doplňku, kdy zanedbáme oba smíšené členy, druhý a třetí sčítanec, a také mimodiagonální členy v prvním sčítanci,

$$\tilde{s}(u^\Gamma, v^\Gamma) = \sum_{i=1}^M s(u^{\mathcal{E}_i}, v^{\mathcal{E}_i}) + a(u^H, v^H).$$

Tomuto odpovídá matice

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \bar{S}^{\mathcal{E}\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & A^H \end{pmatrix}, \quad \bar{S}^{\mathcal{E}\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} S^{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{\mathcal{E}_M\mathcal{E}_M} \end{pmatrix}.$$

Nakonec nám tedy zbývá vypořádat se s poslední částí předpodmínění, a to s úlohou

$$\begin{aligned} &\text{Hledáme } u^{\mathcal{E}_i} \in V_{\mathcal{E}_i} \text{ takové, že} \\ &s(u^{\mathcal{E}_i}, v^{\mathcal{E}_i}) = c(v^{\mathcal{E}_i}), \quad \forall v^{\mathcal{E}_i} \in V_{\mathcal{E}_i}, \end{aligned}$$

pro $i = 1, \dots, M$. Tato slabá diskrétní formulace odpovídá lokální Dirichletově úloze kolem hrany \mathcal{E}_i :

$$\begin{aligned} -\rho_j \Delta u_j(x) &= 0 && \text{v } \Omega_j, \\ u_j(x) &= 0 && \text{na } \partial\Omega_j \setminus \mathcal{E}_i, \\ -\rho_k \Delta u_k(x) &= 0 && \text{v } \Omega_k, \\ u_k(x) &= 0 && \text{na } \partial\Omega_k \setminus \mathcal{E}_i, \\ u_j(x) = u_k(x) &= u_{\mathcal{E}_i}(x) && \text{na } \mathcal{E}_i, \\ \rho_j \frac{\partial u_j}{\partial n}(x) - \rho_k \frac{\partial u_k}{\partial n}(x) &= c_{\mathcal{E}_i}(x) && \text{na } \mathcal{E}_i, \end{aligned}$$

pro $i = 1, \dots, M$, kde n je normála k hraně \mathcal{E}_i , oblasti Ω_j a Ω_k sousedí přes hranu \mathcal{E}_i . Tato úloha po diskretizaci konečnými prvky odpovídá soustavě

$$\begin{pmatrix} A^{jj} & & A^{j\mathcal{E}_i} \\ & A^{kk} & A^{k\mathcal{E}_i} \\ A^{\mathcal{E}_i j} & A^{\mathcal{E}_i k} & A^{\mathcal{E}_i \mathcal{E}_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{u}_k \\ \bar{u}_{\mathcal{E}_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{c}_{\mathcal{E}_i} \end{pmatrix},$$

která je ekvivalentní se soustavou Schurova doplňku

$$S^{\mathcal{E}_i \mathcal{E}_i} \bar{u}_{\mathcal{E}_i} = \bar{c}_{\mathcal{E}_i},$$

pro $i = 1, \dots, M$.

Definujme výsledné předpodmínění v podobě

$$\tilde{a}(u, v) := \sum_{i=1}^N a(u^i, v^i) + \tilde{s}(u^\Gamma, v^\Gamma) = \sum_{i=1}^N a(u^i, v^i) + \sum_{i=1}^M s(u^{\mathcal{E}_i}, v^{\mathcal{E}_i}) + a(u^H, v^H), \quad (2.7)$$

$$s(u^{\mathcal{E}_i}, v^{\mathcal{E}_i}) = a(\mathcal{H}(u^{\mathcal{E}_i}), \mathcal{H}(v^{\mathcal{E}_i})), \quad a(u^H, v^H) = a(\mathcal{H}(I^H u^V), \mathcal{H}(I^H v^V)),$$

kterému odpovídá matice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A^{\Gamma I} (A^{II})^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{II} & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (A^{II})^{-1} A^{\Gamma I} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Předpodmínění se skládá ze tří částí:

1. Lokální úloha na podoblastech Ω_i pro $i = 1, \dots, N$, čemuž odpovídá matice A^{II} .
2. Lokální úloha na hranách \mathcal{E}_i pro $i = 1, \dots, M$, které odpovídá matice $\hat{S}^{\mathcal{E}\mathcal{E}}$.
3. Globální úloha na hrubé síti, té odpovídá matice A^H .

První dvě části jsou lokální úlohy, které můžeme řešit paralelně nezávisle na sobě. Třetí úloha je globální a řeší se pro celou oblast Ω najednou. Ovšem dimenze této úlohy odpovídá pouze počtu vrcholů dané dekompozice, nejedná se tak o nikterak náročnou úlohu na výpočet.

2.2 Analýza předpodmínění

Pokud budeme chtít toto předpodmínění aplikovat při výpočtech, je dobré jej nejdříve analyzovat a ověřit konvergenci. Bude nás tedy zajímat číslo podmíněnosti matice soustavy

$$\kappa(\tilde{A}^{-1} \cdot A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}.$$

Toto je ekvivalentní s nalezením čísel $\lambda_{max}, \lambda_{min} > 0$ takových, pro které platí

$$\forall u \in V : \quad \lambda_{min} \tilde{a}(u, u) \leq a(u, u) \leq \lambda_{max} \tilde{a}(u, u).$$

V předchozí části textu jsme si ukázali jak můžeme každou funkci

$$u = u^I + u^{\mathcal{E}} + u^{\mathcal{V}} \in V$$

jednoznačně zapsat pomocí lineární interpolace a harmonického rozšíření ve tvaru

$$u = \tilde{u}^I \oplus_a (\tilde{u}^{\mathcal{E}} + u^H),$$

kde

$$u^H := \mathcal{H}(I^H u^{\mathcal{V}}), \quad \tilde{u}^{\mathcal{E}} := \mathcal{H}(u - u^H), \quad \tilde{u}^I := u - u^H - \tilde{u}^{\mathcal{E}}.$$

Bilineární formy jimž odpovídají matice úlohy A a matice předpodmínění \tilde{A} pak můžete zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \sum_{i=1}^N a(\tilde{u}_i^I, \tilde{u}_i^I) + a(\tilde{u}^{\mathcal{E}}, \tilde{u}^{\mathcal{E}}) + 2a(\tilde{u}^{\mathcal{E}}, u^H) + a(u^H, u^H), \\ \tilde{a}(u, u) &= \sum_{i=1}^N a(\tilde{u}_i^I, \tilde{u}_i^I) + \sum_{i=1}^M a(\tilde{u}_i^{\mathcal{E}}, \tilde{u}_i^{\mathcal{E}}) + a(u^H, u^H), \end{aligned}$$

kde

$$\tilde{u}_i^I := u^I|_{\Omega_i}, \quad \tilde{u}^{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^M \tilde{u}_i^{\mathcal{E}}, \quad \tilde{u}_i^{\mathcal{E}} := \mathcal{H}((u - u^H)|_{\mathcal{E}_i}).$$

Cílem je tedy provést odhady pro jednotlivé členy předpodmínění jak shora tak zdola. Jednotlivé odhady zde nebudeme konstruovat, pouze si uvedeme výsledné věty, bez důkazů, které jsou důsledkem práce autoři Bramble, Pasciak, Schatz v [2], dále pak Dryja, Widlund v [4] a Toselli, Widlund v [16].

Pokud budeme uvažovat danou úlohu na polygonální oblasti Ω , jejíž rozklad na podoblasti tvoří regulární triangulaci (hrubá síť), a nad kterou máme konformní, regulární a kvazi-uniformní triangulaci (jemnou síť), pak může díky informacím z uvedené literatury zformulovat následující dvě věty pro horní a dolní odhad.

Věta 2.1 (*Horní odhad*)

$$(\exists \lambda_{max} > 0) (\forall u \in V) : \quad a(u, u) \leq \lambda_{max} \tilde{a}(u, u).$$

Pro horní odhad, větu 2.1 se dá ukázat, že platí s konstantou $\lambda_{max} = 10$.

Věta 2.2 (*Dolní odhad*)

Existuje konstanta $C > 0$ nezávislá na H a h , která splňuje

$$(\forall u \in V) : \quad \tilde{a}(u, u) \leq C \cdot \left(1 + \ln \frac{H}{h}\right)^2 \cdot a(u, u).$$

Důsledkem těchto vět dostáváme také odhad pro číslo podmíněnosti matice úlohy a tak i odhad pro počet iterací metody sdružených gradientů, kterou budeme úlohu nakonec řešit. Dostáváme tedy

$$\kappa\left(\tilde{A}^{-1} \cdot A\right) \leq 10 \cdot C \cdot \left(1 + \ln \frac{H}{h}\right)^2,$$

kde $C > 0$ je konstanta nezávislá na diskretizačních parametrech H a h . Toto chování se budeme snažit ověřit při numerických experimentech v kapitole 4.

3 Aplikace hraničních prvků

Při konstrukci předpodmínění potřebujeme v jednom kroku sestavit matici globální Dirichletovy úlohy na hrubé síti dané jednotlivými podoblastmi, matici A^H . Jak sestavit takovou matici pro podoblasti, které jsou všechny trojúhelníkového tvaru je jednoduché, stačí použít klasický konečně-prvkový přístup s vhodnou bází. Tímto se dokážeme vypořádat ještě i se obdélníkovými podoblastmi, když bychom vzali bilineární bázové funkce. Ovšem pro složitější tvary podoblastí už je nejasné, jak by se dala matice A^H sestavit přímo. V této kapitole si ukážeme hraniční řešení dané úlohy na jednotlivých podoblastech, což nám dá návod jak aproximovat matici A^H pro nejrůznější složité tvary podoblastí.

Sestavíme hraniční integrální formulaci a reprezentační formuli pro Poissonovu rovnici. Poté z reprezentační formule pro řešení v objemu přejdeme na hranici a představíme operátor, který zobrazí Dirichletovu stopu na Neumannovu stopu, tzv. Steklov-Poincarého operátor. Následně si ukážeme jak by se dal tento operátor aproximovat a numericky napočítat pro danou úlohu. Nakonec si ukážeme jak tento hraniční operátor souvisí s bilineární formou pro úlohu v objemu. Dobrý úvodem pro metodu hraničních prvků a pro tuto kapitolu by mohla být [1] nebo [13], detailněji a v obecnějších prostorech se této problematice věnují také [14, 15].

Pro celou tuto kapitolu uvažujme omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s lipschitzovskou hranicí. Zavedme si operátor stopy pro funkční hodnoty, tzv. *Dirichletovu stopu*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \mapsto H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

splňující

$$\gamma_0 u(x) = u(x)|_{\partial\Omega} \quad \text{pro všechny } u \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

a operátor stopy pro normálové derivace, tzv. *Neumannovu stopu*

$$\gamma_1 : H_\Delta^1(\Omega) \mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

splňující

$$\gamma_1 u(x) = \frac{\partial u}{\partial n}(x) \Big|_{\partial\Omega} \quad \text{pro všechny } u \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

kde n je jednotkový vektor vnější normály definovaný pro skoro všechna $x \in \partial\Omega$. Prostor $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je prostor stop funkcí z $H^1(\Omega)$, tedy

$$\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Symbollem $H_\Delta^1(\Omega)$ označujeme prostor definovaný jako

$$H_\Delta^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : -\Delta v \in L^2(\Omega)\}.$$

Prostor $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je duální prostor k prostoru $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, tedy prostor všech spojitých lineárních funkcí v $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$,

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^*.$$

Operátory γ_0 a γ_1 jsou spojité a lineární, viz [3].

Věta 3.1 *Existuje lineární a spojité zobrazení*

$$\varepsilon : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^1(\Omega),$$

kteří je pravou inverzí operátoru Dirichletovy stopy, tzn.

$$\forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \quad \gamma_0(\varepsilon\varphi) = \varphi.$$

Prostor $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je duální prostor, jeho prvky jsou lineární funkcionály. Hodnotu funkcionálu $\gamma_1 u$ v bodě $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ odpovídající skalárnímu součinu v $L^2(\partial\Omega)$ definujeme jako

$$\langle \gamma_1 u, \varphi \rangle := \int_{\Omega} \nabla u \nabla(\varepsilon\varphi) \, dx - \int_{\Omega} (-\Delta u) \varepsilon\varphi \, dx, \quad (3.1)$$

kde ε je zobrazení z věty 3.1.

3.1 Hraniční integrální formulace

Nyní na oblasti Ω uvažujme Poissonovu rovnici

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad x \in \Omega,$$

kde $f \in L^2(\Omega)$, a pokusme se sestavit hraniční integrální formulaci pro řešení u , prozatím bez ohledu na okrajové (hraniční) podmínky, které mohou být Dirichletovy, Neumannovy nebo smíšené.

Řešení u hledáme obecně v prostoru $H^1(\Omega)$, ovšem za daného předpokladu na pravou stranu f a podle definice musí být z prostoru $H_{\Delta}^1(\Omega)$. Derivace v těchto prostorech myslíme ve smyslu distribucí. Poissonovu rovnici přenásobíme funkcí $v \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ a zintegrujme přes oblast Ω , dostaneme⁷

$$\int_{\Omega} -\Delta u(y)v(y) \, dy = \int_{\Omega} f(y)v(y) \, dy.$$

Pro dané prostory můžeme zobecnit první a druhou Greenovu identitu do následujících vět.

Věta 3.2 (*První Greenova identita*) *Pro všechny $u \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ a $v \in H^1(\Omega)$ platí*

$$\int_{\Omega} -\Delta u(y)v(y) \, dy = \int_{\Omega} \nabla u(y) \nabla v(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y) \gamma_0 v(y) \, ds_y.$$

Věta 3.3 (*Druhá Greenova identita*) *Pro všechny $u, v \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ platí*

$$\int_{\Omega} \Delta u(y)v(y) - u(y)\Delta v(y) \, dy = \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y) \gamma_0 v(y) - \gamma_0 u(y) \gamma_1 v(y) \, ds_y.$$

⁷Z praktických důvodů zde použijeme jako proměnnou y .

Využitím těchto Greenových identit dostaneme

$$\int_{\Omega} u(y) (-\Delta v(y)) \, dy = \int_{\Omega} f(y)v(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y)\gamma_0 v(y) \, ds_y - \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y)\gamma_1 v(y) \, ds_y.$$

Nyní definujeme funkci $G(x, y) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ jako

$$G(x, y) := -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\|,$$

kterou nazýváme *fundamentální řešení pro Laplaceovu rovnici*. Dá se ukázat, viz [13], že funkce G splňuje

$$-\Delta_y G(x, y) = \delta_x(y) \quad (\text{ve smyslu distribucí})^8.$$

S využitím této funkce dostaneme následující reprezentační formuli pro $u \in H_{\Delta}^1$,

$$\forall x \in \Omega : u(x) = \int_{\Omega} f(y)G(x, y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y)\gamma_0 G(x, y) \, ds_y - \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y)\gamma_{1,y} G(x, y) \, ds_y, \quad (3.2)$$

která je zobecněním věty o třech potenciálech, viz [13, 1]. Pomocí jednotlivých integrálů můžeme pro $x \in \Omega$ definovat operátory

$$\begin{aligned} [N(f)](x) &:= \int_{\Omega} f(y)G(x, y) \, dy, & N : L^2(\Omega) &\mapsto H^1(\Omega), \\ [\tilde{V}(\gamma_1 u)](x) &:= \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y)\gamma_0 G(x, y) \, ds_y, & \tilde{V} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\mapsto H^1(\Omega), \\ [W(\gamma_0 u)](x) &:= \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y)\gamma_{1,y} G(x, y) \, ds_y, & W : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\mapsto H^1(\Omega), \end{aligned}$$

N se říká Newtonův, nebo taky objemový, potenciál, \tilde{V} je potenciál jednoduché vrstvy a W je potenciál dvojvrstvy.

3.2 Steklov-Poincarého operátor

Steklov-Poincarého operátor

$$S : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

je zobrazení, které Dirichletově stopě $\gamma_0 u$ přiřadí Neumannovu stopu $\gamma_1 u$, kde $u \in H^1(\Omega)$ je řešení homogenní úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0 & x \in \Omega, \\ u(x) &= g & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.3)$$

pro funkce $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. V souvislosti s touto úlohou jej můžeme odvodit z reprezentační formule (3.2) přechodem na hranici $\partial\Omega$ aplikací Dirichletovy a Neumannovy stopy.

⁸ $\delta_x(y)$ je Diracova distribuce centrována do bodu x .

Vraťme se tedy k reprezentační formuli (3.2) odpovídající homogenní úloze (3.3), objemový člen je zde nulový. Provedeme-li limitní přechod na hranici, $\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \partial\Omega$, tedy aplikujeme-li operátory γ_0 a γ_1 , dostaneme díky vlastnostem jednotlivých potenciálů ([13, 1]) vztah pro Dirichletovu stopu

$$\frac{1}{2}\gamma_0 u(x) = \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y) \gamma_0 G(x, y) \, ds_y - \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} G(x, y) \, ds_y \quad (3.4)$$

a vztah pro Neumannovu stopu

$$\frac{1}{2}\gamma_1 u(x) = \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y) \gamma_{1,x} G(x, y) \, ds_y - \gamma_{1,x} \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} G(x, y) \, ds_y. \quad (3.5)$$

Pro $x \in \partial\Omega$ tak můžeme definovat operátor potenciálu jednoduché vrstvy

$$[V(\gamma_1 u)](x) := \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y) \gamma_0 G(x, y) \, ds_y, \quad V : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

operátor potenciálu dvojvrstvy

$$[K(\gamma_0 u)](x) := \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} G(x, y) \, ds_y, \quad K : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

adjungovaný operátor k operátoru potenciálu dvojvrstvy

$$[K'(\gamma_1 u)](x) := \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y) \gamma_{1,x} G(x, y) \, ds_y, \quad K' : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

a hypersingulární operátor

$$[D(\gamma_0 u)](x) := -\gamma_{1,x} \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} G(x, y) \, ds_y, \quad D : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Vlastnosti jednotlivých operátorů jsou uvedeny v [9, 3]. Operátory V , K , K' a D jsou lineární a spojité. Operátor V je navíc symetrický a pro $\text{diam}(\Omega) < 1$ také $H^{-\frac{1}{2}}$ -eliptický. Operátor D je také symetrický a $H^{\frac{1}{2}}$ -semieliptický. Vztahy (3.4) a (3.5) tak můžeme zapsat ve tvaru

$$\forall x \in \partial\Omega : \frac{1}{2}\gamma_0 u(x) = [V(\gamma_1 u)](x) - [K(\gamma_0 u)](x), \quad (3.6)$$

$$\forall x \in \partial\Omega : \frac{1}{2}\gamma_1 u(x) = [K'(\gamma_1 u)](x) + [D(\gamma_0 u)](x). \quad (3.7)$$

Z elipticity operátoru V plyne existence jeho inverze V^{-1} . Z rovnice (3.6) tak můžeme přímo vyjádřit Steklov-Poincarého operátor

$$\gamma_1 u = V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) (\gamma_0 u),$$

který ovšem po diskretizaci vede na nesymetrickou matici. Proto dále přičteme $\frac{1}{2}\gamma_1 u$ k rovnici (3.7),

$$\gamma_1 u = \left(\frac{1}{2}I + K' \right) (\gamma_1 u) + D(\gamma_0 u),$$

a dosadíme za $\gamma_1 u$ na pravé straně, dostaneme opět vztah pro Steklov-Poincarého operátor

$$\gamma_1 u = \left[\left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} \left(\frac{1}{2} + K \right) + D \right] (\gamma_0 u),$$

který zůstane i po diskretizaci symetrický. Definujme tedy *Steklov-Poincarého operátor* jako

$$S := \left[\left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} \left(\frac{1}{2} + K \right) + D \right],$$

ten splňuje

$$\forall x \in \partial\Omega : \quad \gamma_1 u(x) = [S(\gamma_0 u)](x).$$

Operátor je lineární, spojitý, symetrický a pro $\text{diam}(\Omega) < 1$ je také $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ -semieliptický, viz [14].

Uvažujme nyní operátor harmonického rozšíření

$$\tilde{\mathcal{H}} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^1(\Omega),$$

který každé funkci $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ přiřadí $\tilde{\mathcal{H}}u \in H^1(\Omega)$ jako slabé řešení Dirichletovy úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{\mathcal{H}}u(x) &= 0 & \text{v } \Omega, \\ \tilde{\mathcal{H}}u(x) &= u(x) & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Operátor $\tilde{\mathcal{H}}$ je lineární a spojitý. Podle definice (3.1) a věty 3.1 tak pro všechna $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ platí

$$\langle Su, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla(\tilde{\mathcal{H}}u)(x) \nabla(\tilde{\mathcal{H}}v)(x) dx. \quad (3.8)$$

3.3 Diskretizace a Galerkinova aproximace Steklov-Poincarého operátoru

Úlohu (3.3) pro Steklov-Poincarého operátor můžeme zapsat jako slabou hraniční formulaci s využitím vztahů (3.6) a (3.7) následovně,

Hledáme $\gamma_1 u \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ takové, že současně platí

$$\begin{aligned} \forall w \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \quad \frac{1}{2} \langle w, \gamma_0 u \rangle &= \langle w, V(\gamma_1 u) \rangle - \langle w, K(\gamma_0 u) \rangle, \\ \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \quad \frac{1}{2} \langle \gamma_1 u, v \rangle &= \langle K'(\gamma_1 u), v \rangle + \langle D(\gamma_0 u), v \rangle. \end{aligned}$$

Dále předpokládejme v souladu s předchozími kapitolami, že oblast Ω je polygonální. Hranici $\partial\Omega$ rozložíme na N úseček tak, že každá strana polygonu odpovídá právě jedné úsečce,

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{S}_i.$$

Množinu uzlů, krajních bodů úseček, označíme

$$\{x_j\}_{j=1}^N$$

Definujme nespojitě po částech konstantní funkce

$$\psi_i(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{S}_i, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

pro $i = 1, \dots, N$ a spojitě po částech afinní funkce

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} 1 & x = x_j, \\ 0 & x = x_{j-1}, x = x_{j+1}, \\ 0 & x \notin \{\mathcal{S}_{j-1}, \mathcal{S}_j\}, \end{cases} \quad \varphi(x) \text{ je lineární na každém segmentu } \mathcal{S}_i$$

pro $j = 1, \dots, N$.

Příslušné prostory ze slabé formulace úlohy nahradíme jejich konečně-dimenzionálními aproximacemi, které sestavíme jako lineární obaly právě definovaných bází,

$$\begin{aligned} H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \quad \mathcal{W}_h &:= \text{Lin} \{\psi_i\}_{i=1}^N \subset H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \\ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \quad \mathcal{V}_h &:= \text{Lin} \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Index h značí diametr diskretizovaných elementů. Galerkinova aproximace hraniční úlohy pak vypadá následovně

$$\begin{aligned} \forall w_h \in \mathcal{W}_h : \quad \frac{1}{2} \langle w_h, u_h \rangle &= \langle w_h, V(t_h) \rangle - \langle w_h, K(u_h) \rangle, \\ \forall v_h \in \mathcal{V}_h : \quad \frac{1}{2} \langle t_h, v_h \rangle &= \langle K'(t_h), v_h \rangle + \langle D(u_h), v_h \rangle, \end{aligned}$$

kde $u_h \in \mathcal{V}_h$ aproximuje $\gamma_0 u$ a $t_h \in \mathcal{W}_h$ aproximuje $\gamma_1 u$. Pokud budeme dané funkce hledat jako lineární kombinaci příslušných bázových funkcí,

$$\begin{aligned} \forall u_h \in \mathcal{V}_h : \quad u_h(x) &= \sum_{j=1}^N u_h^j \varphi_j(x), \\ \forall t_h \in \mathcal{W}_h : \quad t_h(x) &= \sum_{j=1}^N t_h^j \psi_j(x), \end{aligned}$$

pak je úloha ekvivalentní s následujícími soustavami lineárních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_h \cdot \bar{u}_h &= V_h \cdot \bar{t}_h - K_h \cdot \bar{u}_h, \\ \frac{1}{2}M_h^T \cdot \bar{t}_h &= K_h^T \cdot \bar{t}_h + D_h \cdot \bar{u}_h,\end{aligned}$$

kde vektory \bar{u}_h a \bar{t}_h odpovídají koeficientům lineární kombinace,

$$\bar{u}_h = (u_h^1, u_h^2, \dots, u_h^N)^T, \quad \bar{t}_h = (t_h^1, t_h^2, \dots, t_h^N)^T.$$

Stejnou manipulací jako ve spojitě podobě můžeme i teď vyjádřit aproximaci Steklov-Poincarého operátoru $S_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ v diskrétní podobě

$$S_h := \left(\frac{1}{2}M_h^T + K_h^T \right) V_h^{-1} \left(\frac{1}{2}M_h + K_h \right) + D_h,$$

dostaneme tak výslednou soustavu

$$S_h \bar{u}_h = M_h^T \bar{t}_h.$$

Jednotlivé matice ve vyjádření S_h jsou:

- Diskrétní operátor jednoduché vrstvy $V_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$, definován jako

$$\begin{aligned}V_h[i, j] &:= \langle \psi_i, V(\psi_j) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \psi_i(x) \int_{\partial\Omega} \psi_j(y) \log \|x - y\| \, ds_y \, ds_x \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}_i} \int_{\mathcal{S}_j} \log \|x - y\| \, ds_y \, ds_x,\end{aligned}$$

pro $i, j = 1, \dots, N$, který je symetrický a pozitivně definitní.

- Diskrétní operátor dvojevrstvy $K_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ definujeme

$$\begin{aligned}K_h[i, j] &:= \langle \psi_i, K(\varphi_j) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \psi_i(x) \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y) \frac{(x - y, n(y))}{\|x - y\|^2} \, ds_y \, ds_x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}_i} \int_{\mathcal{S}_{j-1} \cup \mathcal{S}_j} \varphi_j(y) \frac{(x - y, n(y))}{\|x - y\|^2} \, ds_y \, ds_x,\end{aligned}$$

pro $i, j = 1, \dots, N$.

- Diskrétní adjungovaný operátor k operátoru dvojevrstvy $K'_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ je transpozicí diskrétního operátoru dvojevrstvy:

$$K'_h := K_h^T.$$

- Diskrétní hypersingulární operátor $D_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ definovaný

$$\begin{aligned} D_h[i, j] &:= \langle D(\varphi_i), \varphi_j \rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{d\varphi_j}{dt}(x) \int_{\partial\Omega} \log \|x - y\| \frac{d\varphi_i}{dt}(y) ds_y ds_x, \end{aligned}$$

pro $i, j = 1, \dots, N$, kde

$$\frac{d\varphi_j}{dt}(x)$$

je derivace podle tečny, tzv. tangenciální derivace. Vyčíslení matice D_h tak provedeme přenásobením matice V_h maticí těchto tangenciálních derivací

$$D_h = T_h^T V_h T_h,$$

kde

$$T_h[i, j] := \frac{d\varphi_j}{dt}(x), \quad x \in \mathcal{S}_j$$

pro $i, j = 1, \dots, N$.

- Matice hmotnosti $M_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ dána

$$M_h[i, j] := \langle \psi_i, \varphi_j \rangle = \int_{\partial\Omega} \psi_i(x) \varphi_j(x) ds_x = \int_{\mathcal{S}_i} \varphi_j(x) ds_x$$

pro $i, j = 1, \dots, N$.

Matice Steklov-Poincarého operátoru S_h sestavená z těchto matic je symetrická a pozitivně definitní.

Vyčíslení jednotlivých integrálů je dále ještě poměrně pracné, mnohé z nich obsahují nepříjemné singularity, se kterými je třeba zacházet velmi opatrně. Na integrály, které singularity neobsahují můžeme použít Gaussovu kvadraturu. Jak se vypořádat s jednotlivými případy naleznete v [15, 7]. Všechny tyto hraničně-prvkové matice jsou plné, což má za následek nepříjemnou manipulaci s nimi a poměrně velké omezení z hlediska paměťových nároků pro rozsáhlejší úlohy.

3.4 Kombinace FEM a BEM matic

Vraťme se zpět do situace z kapitoly 2, tedy uvažujme polygonální oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je rozložena na N nepřekrývajících se podoblastí, elementů T_i , které jsou polygony a tvoří hrubou diskretizaci \mathcal{T}_H této oblasti,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{T}_i, \quad \mathcal{T}_H = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}, \quad T_i \dots \text{polygon.}$$

Nad touto diskretizací máme konečně-dimenzionální prostor, ve kterém hledáme aproximaci řešení globální Dirichletovy úlohy. V tomto prostoru uvažujme spojitou konečně-prvkovou bázi, jejíž prvky jsou jednoznačně určeny hodnotami v uzlech diskretizace.

Bázová funkce $\tilde{\varphi}_i(x)$ nabývá hodnoty jedna v i -tém uzlu diskretizace a ve všech ostatních uzlech má hodnotu nula. Na hranách každého elementu je funkce $\tilde{\varphi}_i(x)$ lineární a uvnitř každého elementu je harmonická, standardně pro trojúhelníkové elementy je lineární a pro obdélníkové elementy je bilineární.

Pro tuto úlohu máme definovanou bilineární formu, podle které sestavujeme příslušnou matici bilineární formy (matici tuhosti), což provádíme po jednotlivých elementech T_k ,

$$A[i, j] = \int_{\Omega} \nabla \tilde{\varphi}_i(x) \nabla \tilde{\varphi}_j(x) dx = \sum_{T \in T_k} \int_T \nabla \tilde{\varphi}_i(x) \nabla \tilde{\varphi}_j(x) dx.$$

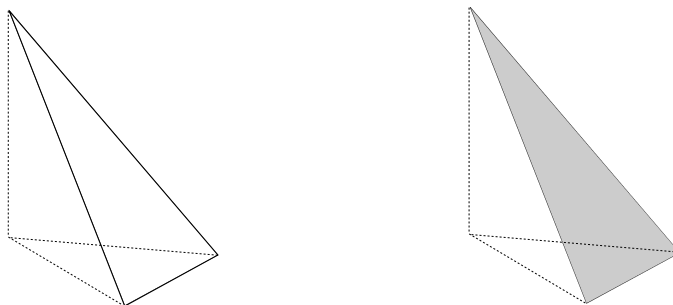
Lokálně si tedy na každém elementem $T \in T_k$ můžeme úlohu pro takovéto bázové funkce, tzn. harmonické na každém elementu a jednoznačně určené hodnotami na hranici, resp. ve vrcholech, napsat jako

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{\varphi}_i(x) &= 0 && \text{v } T, \\ \tilde{\varphi}_i(x) &= \varphi_i(x) && \text{na } \partial T, \end{aligned}$$

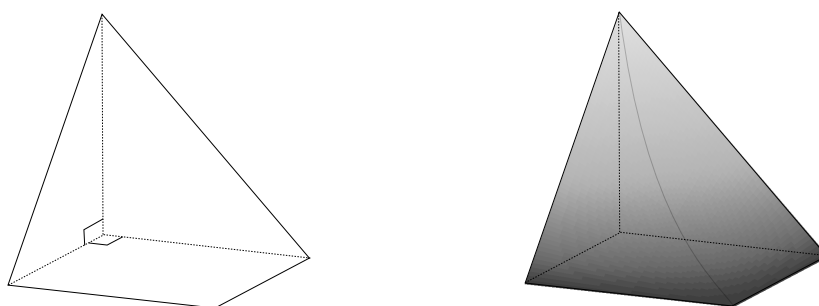
pro $i = 1, \dots, n$, kde n je počet uzlů diskretizace \mathcal{T}_H a φ_i je příslušná bázová funkce odpovídající i -tému uzlu pro hraniční úlohu na elementu T . Taková bázová funkce, která je spojitá, po částech lineární, v i -tém uzlu nabývá hodnoty jedna a ve všech ostatních uzlech elementu T je nulová. Podle vztahu (3.8) je pak lokální matice bilineární formy na elementu T ekvivalentní matici Steklov-Poincarého operátoru,

$$A[i, j] = \int_T \nabla \tilde{\varphi}_i \nabla \tilde{\varphi}_j dx = \langle S(\varphi_i), \varphi_j \rangle \approx \langle S_h(\varphi_i), \varphi_j \rangle.$$

Více o kombinaci FEM a BEM přístupu můžete najít v [5].



Obrázek 11: Ekvivalentní bázová funkce na hranici a v objemu pro trojúhelníkový element.



Obrázek 12: Ekvivalentní bázová funkce na hranici a v objemu pro obdélníkový element.

4 Numerické experimenty

V této kapitole otestujeme představenou metodu řešení na modelové úloze pro několik různých případů. Nejdříve si ve zkratce naznačíme jak postupovat při řešení modelové úlohy a jak sestavit odpovídající matici úlohy s předpokládáním, kterou budeme následně řešit metodou sdružených gradientů. U jednotlivých numerických experimentů budeme sledovat počty iterací pro danou úlohu v závislosti na hrubé a jemné diskretizaci, které jsou dány parametry H a h . V kapitole 2.2 jsme zkonstruovali odhad pro danou metodu řešenou na trojúhelníkové hrubé síti. Tento odhad srovnáme s napočítanými výsledky a uvidíme jak, a jestli vůbec, se konvergence zhorší při využití hraničně-prvkového přístupu na konstrukci matice globální úlohy na hrubé síti. Také nás bude zajímat chování metody v případě, kdy dekompozicí budou složitější tvary. Otestujeme to na tzv. L-shape, tedy tvary písmene L, kde by se mohlo projevit zhoršení v důsledku nekonvexity polygonu.

Uvažujme nyní modelovou 2D úlohu

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla u(x)) &= 1 & \text{v } \Omega := \langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle \times \langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle, \\ u(x) &= 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\rho(x)$ je po částech konstantní funkce, kterou budeme později při konkrétních testech blíže specifikovat. Oblast Ω zde schválně volíme tak, aby její diametr byl menší než 1, což potřebujeme pro využití hraničně-prvkových matic (kapitola 3). Zadaná oblast Ω je tedy čtverec se středem v počátku souřadnicového systému, stranami rovnoběžnými s osami a délkou strany

$$d = \frac{1}{2}.$$

Oblast Ω vždy rozdělíme na N stejných podoblastí s diametrem H . Tímto dostaneme hrubou diskretizační síť. Definujeme rozhraní Γ tak jak jsme to udělali v kapitole 1, tedy jako všechny hranice jednotlivých podoblastí bez globální Dirichletovy hranice $\partial\Omega$. Pro každou podoblast pak dále sestavíme jemnou triangulaci s diametrem h . Nad těmito triangulacemi budeme aproximovat řešení $u(x)$ pomocí spojitých po částech lineárních básových funkcí viz obrázky 3. Dále při řešení budeme postupovat podle kapitol 1 a 2. Nejdříve sestavíme lokální matice A^{ii} a vektory b^i pro $i = 1, \dots, N$. Z nich poté sestavíme globální matici a vektor

$$A = \begin{pmatrix} A^{II} & A^{I\Gamma} \\ A^{\Gamma I} & A^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}^I \\ \bar{b}^\Gamma \end{pmatrix}.$$

Dalším krokem je sestavení matice předpokládání \tilde{A} podle (2.8), což provedeme po jednotlivých částech. Matici A^{II} již máme vytvořenou, zbývá tedy zkonstruovat aproximaci Schurova doplnku, matici \tilde{S} . Sestrojíme matici lineární interpolace R_E , dále pak matici lokální Dirichletovy úlohy kolem každé hrany $\bar{S}^{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ a nakonec matici matice globální Dirichletovy úlohy A^H . Jakmile máme k dispozici matici úlohy, matici předpokládání a příslušnou pravou stranu, můžeme úlohu vyřešit metodou předpokládání sdružených gradientů, algoritmus nalezneme např. v [10] (kap. 10.4) nebo [12] (kap. 6.7). Při

řešení se vyhneme sestavení inverze předpodmínění, což je náročná operace. Aplikaci předpodmínění v metodě sdružených gradientů provádíme po částech, viz algoritmus 1.

```

1:  $r := [r^I, r^\Gamma]^T$  {Residuum z předchozího kroku}
2:  $s = z := 0$ 
3: for  $i = 1, \dots, N$  do
4:    $z^i = A^{ii} \setminus r^i$ 
5:    $s^\Gamma = s^\Gamma + A^{\Gamma i} \cdot z^i$ 
6: end for
7:  $q := r^\Gamma - s^\Gamma$ 
8:  $z^\Gamma = \tilde{S} \setminus q$ 
9: for  $i = 1, \dots, N$  do
10:   $z^i = z^i + A^{ii} \setminus (-A^{i\Gamma} \cdot z^\Gamma)$ 
11: end for
12: return  $z = [z^I, z^\Gamma]^T$ 

```

Algoritmus 1: Aplikace předpodmínění v metodě sdružených gradientů

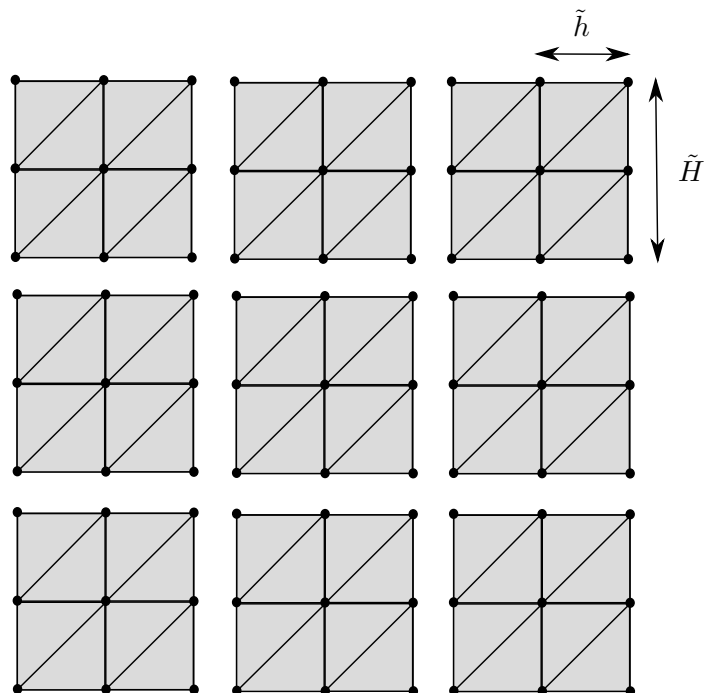
Co nás nakonec zajímá je počet iterací uvedené metody pro jednotlivé řešené případy v závislosti na celkovém počtu podoblastí pro různé poměry hrubé a jemné diskretizace H/h . Oblast Ω z modelové úlohy budeme rozkládat v prvním případě na čtverce a budeme srovnávat výsledky pro variantu, kdy matici A^H sestavíme metodou konečných prvků, s variantou, kdy ji sestavíme pomocí hraničních prvků. V dalším příkladu budeme rozkládat oblast Ω na podoblasti tvaru písmene L (L-shape). V tomto případě již nebudeme mít k dispozici možnost srovnání hraničně-prvkového přístupu s tím konečně-prvkovým, neboť pomocí klasické metody konečných prvků matici A^H nelze sestavit. Všechny testy budeme provádět ve dvou variantách, jednou bez skoků v koeficientech a podruhé se skoky v koeficientech, kdy jednotlivé skoky budou vždy o tisíc. Z odhadů v kapitole 2.2 budeme očekávat následující,

$$\text{počet iterací} = O\left(1 + \ln \frac{H}{h}\right)^2. \quad (4.1)$$

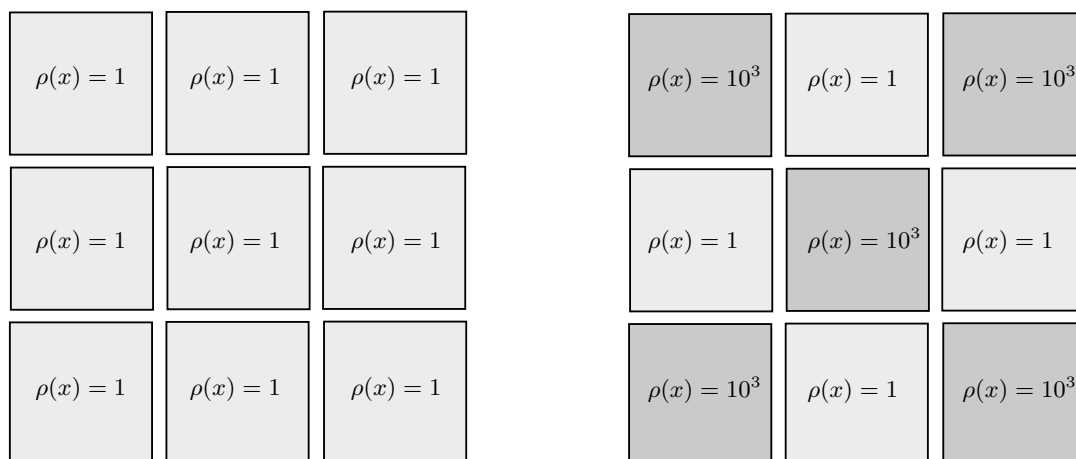
4.1 Dekompozice na čtverce

První testovanou úlohou je dělení čtvercové oblasti Ω na N stejných čtverců. Oblast Ω rozdělíme v obou směrech rovnoměrně na N_i částí s krokem \tilde{H} , výsledná čtvercová mřížka má $N = N_i^2$ částí. Každá podoblast je pak rovnoměrně diskretizována s krokem \tilde{h} na malé čtverce a dále na trojúhelníky, které jsou elementy diskretizace. Dekompozice je znázorněna na obrázku 13.

Pro tuto uvedenou geometrii úlohy testujeme dva případy rozmístění koeficientů $\rho(x)$, viz obrázek 14. V prvním případě uvažujeme funkci $\rho(x) \equiv 1$, tedy bez skoků



Obrázek 13: Dekompozice čtvercové oblasti Ω na menší čtverce.



Obrázek 14: Rozložení funkce $\rho(x)$, vlevo je konstantní na celé oblasti Ω a nabývá hodnoty 1, vpravo nabývá střídavě hodnot 1 a 1000.

v koeficientech. V druhém případě uvažujme funkci $\rho(x)$, která nabývá střídavě hodnot 1 a 1000 na jednotlivých podoblastech (šachovnice). Pro oba níže uvedené případy testujeme úlohu pro N rovno 4, 16, 64, 256 a 1024, s poměry H/h rovny 4, 8, 16, 32 a 64. Poměr H/h , kde H je diametr podoblasti a h je diametr diskretizace, odpovídá pro čtvercové podoblasti a trojúhelníkové elementy poměru dělení \tilde{H}/\tilde{h} znázorněném na obrázku 13. Relativní přesnost v metodě sdružených gradientů je $\varepsilon = 1e-4$. Při konstrukci hraničních operátorů jsou některé integrály počítány numericky pomocí Gaussových kvadraturních vzorců čtvrtého řádu.

4.1.1 Globální úloha pomocí FEM

Matici A^H sestavíme jako matici globální Dirichletovy úlohy na hrubé síti metodou konečných prvků. Elementy sítě jsou v tomto případě čtverce, konečně-prvková báze funkce na čtverci je bilineární funkce s předpisem

$$\varphi(x) = b_1 + b_2x_1 + b_3x_2 + b_4x_1x_2, \quad b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, x_2),$$

kteřá nabývá hodnoty jedna v jediném rohu čtverce a ve všech ostatních rozích je nulová. Nad stranami čtverce je funkce lineární, viz obrázek 12 vpravo.

H/h	N				
	4	16	64	256	1 024
4	49	225	961	3 969	16 129
	13	81	385	1 665	6 913
	4/4	12/12	13/13	13/13	13/13
8	225	961	3 969	16 129	65 025
	29	177	833	3 585	14 849
	5/5	14/14	15/15	17/17	17/17
16	961	3 969	16 129	65 025	261 121
	61	369	1 729	7 425	30 721
	5/5	16/16	20/20	21/21	21/21
32	3 969	16 129	65 025	261 121	
	125	753	3 521	15 105	
	6/6	19/19	25/25	25/25	-/-
64	16 129	65 025	261 121	1 046 529	
	253	1 521	7 105	30 465	
	7/7	22/22	29/29	29/29	-/-

Tabulka 1: Výsledky pro různé kombinace dekompozice a diskretizace, dělení na čtverce, A^H - FEM.

Výsledky testování uvedené metody pro danou situaci jsou zaznamenány v tabulce 1. Čísla uvedená v každé buňce tabulky mají následující význam, v horním řádku je dimenze úlohy⁹, respektive celkový počet neznámých matice A , v prostředním řádku je dimenze rozhraní Γ , neboli počet neznámých odpovídající matici \tilde{S} , a v posledním řádku je uvedena dvojice čísel odpovídající počtu iterací bez skoků v koeficientech / počet iterací se skoky v koeficientech.

Z výsledků vidíme, že použitá metoda je pro daný případ dokonale robustní, počty iterací vůbec nezávisí na skocích v koeficientech materiálové funkce $\rho(x)$. Dále je patrné, že počty iterací asymptoticky¹⁰ nezávisí na počtu podoblastí, ale pouze na poměru H/h . Takovéto chování jsme očekávali z uvedených odhadů. Ovšem v tomto případě se zdá, že metoda konverguje lépe. V očekávaném odhadu (4.1) figuruje druhá mocnina logaritmu, výsledky však ukazují na chování v podobě

$$\text{počet iterací} = O\left(1 + \ln \frac{H}{h}\right).$$

Poznámka 4.1 V uvedených tabulkách jsou vždy poslední dvě buňky prázdné, to je dáno rozměry příslušné úlohy, která se již nepovedla napočítat na běžném stolním PC bez použití paralelní implementace.

4.1.2 Globální úloha pomocí BEM

Předchozí úloha je zde uvedena pouze pro srovnání, hlavním cílem této práce je právě nahradit matici A^H maticí Steklov-Poincarého operátoru, což nám umožní řešit úlohu pro obecnější tvar podoblastí. Nyní se tedy podívejme na chování metody pro dělení na čtverce v případě, kdy matici A^H aproximujeme maticí Steklov-Poincarého operátoru. Jako bázové funkce v hraničně-prvkovém úloze uvažujeme funkce popsané v kapitole 3.4, viz obrázek 12 vlevo.

Tabulka 2 opět zaznamenává totéž jako tabulka 1, počty neznámých celé soustavy a počty neznámých na hranici zůstávají stejné, neboť se jedná stále o stejnou geometrii úlohy. Nové údaje jsou zde pouze počty iterací, ty ovšem vyšly i v tomto případě téměř stejné. Liší se pouze na pár místech kde je v tomto případě o jednu iteraci více. I po nahrazení matice A^H hraničně prvkovou maticí tak dostáváme velmi uspokojivé, víceméně totožné, výsledky pro konvergenci představené metody.

⁹V soustavách neuvažujeme uzly odpovídající nulové Dirichletové hranici.

¹⁰Počet iterací se pro velká N ustálí na nějaké hodnotě a dále již na N nezávisí.

H/h	N				
	4	16	64	256	1 024
4	49	225	961	3 969	16 129
	13	81	385	1 665	6 913
	4/4	12/12	13/13	13/13	13/13
8	225	961	3 969	16 129	65 025
	29	177	833	3 585	14 849
	5/5	14/14	15/15	17/17	17/17
16	961	3 969	16 129	65 025	261 121
	61	369	1 729	7 425	30 721
	5/5	17/17	21/21	21/21	21/21
32	3 969	16 129	65 025	261 121	
	125	753	3 521	15 105	
	6/6	19/19	25/25	25/25	-/-
64	16 129	65 025	261 121	1 046 529	
	253	1 521	7 105	30 465	
	7/7	22/22	29/29	29/29	-/-

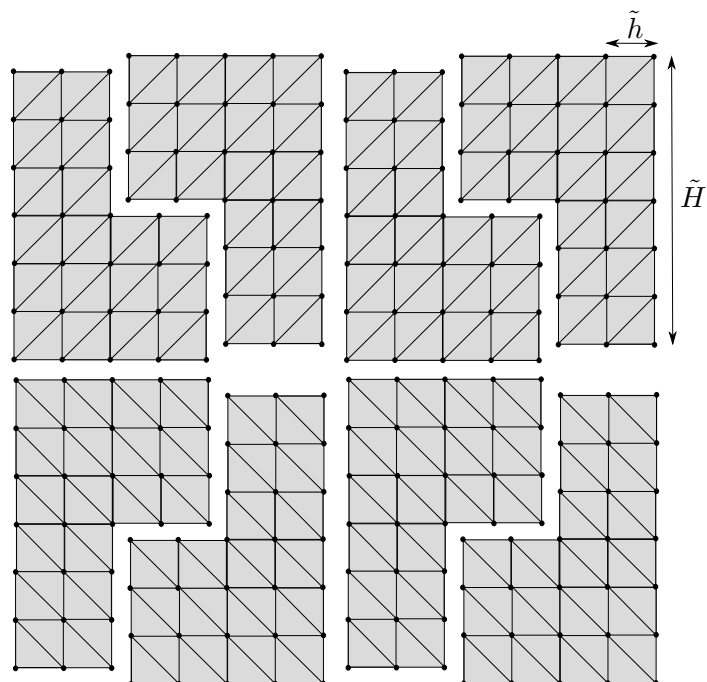
Tabulka 2: Výsledky pro různé kombinace dekompozice a diskretizace, dělení na čtverce, A^H - BEM.

4.2 Dekompozice na L-Shape

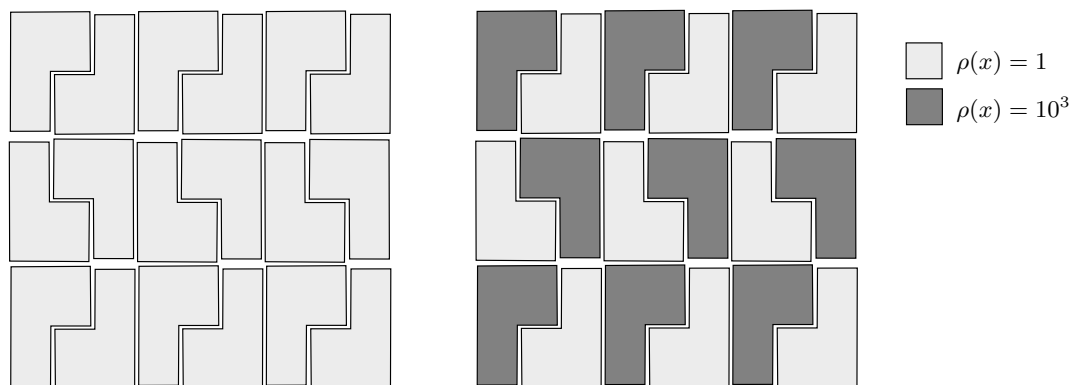
Druhou testovanou úlohou je dělení zadané čtvercové oblasti Ω na N stejných částí tvaru písmene L, tzv. L-shape. Oblast rozdělíme v obou směrech rovnoměrně na N_i částí s krokem \tilde{H} , čímž vznikne čtvercová mřížka. Každý čtverec potom dále rozdělíme na dvě části tvaru L, dostáváme tak celkem $N = 2 \cdot N_i^2$ podoblastí. Každá takováto podoblast tvaru L je pak rovnoměrně diskretizována s krokem \tilde{h} na trojúhelníky stejně jako tomu bylo v předchozím příkladě. Dekompozice je znázorněna na obrázku 15.

Pro tuto geometrii úlohy testujeme opět dva případy rozmístění koeficientů $\rho(x)$. V prvním případě budeme uvažovat konstantní funkci $\rho(x) \equiv 1$ na celém Ω a v druhém případě bude $\rho(x)$ nabývat střídavě hodnot 1 a 1000, jak je naznačeno na obrázku 16. Úlohu otestujeme pro N rovno 8, 32, 128, 512 a 2048 s poměry \tilde{H}/\tilde{h} rovny 6, 12, 24, 48, 96 což po řadě odpovídá poměrům¹¹ H/h rovným přibližně 5, 10, 21, 41 a 82. Relativní přesnost v metodě sdružených gradientů je $\varepsilon = 1e - 4$. Při konstrukci hraničních operátorů jsou některé integrály počítány numericky pomocí Gaussových kvadraturních vzorců čtvrtého řádu.

¹¹Podle definice H a h jako diametrů množin platí, že $H/h \doteq 0,86 \cdot \tilde{H}/\tilde{h}$.



Obrázek 15: Dekompozice čtvercové oblasti Ω na L-shape.



Obrázek 16: Rozložení funkce $\rho(x)$, vlevo je konstantní na celé oblasti Ω a nabývá hodnoty 1, vpravo nabývá střídavě hodnot 1 a 1000.

Pro takovýto tvar podoblastí již nejsme schopni rozumně zkonstruovat matici globální Dirichletovy úlohy A^H na hrubé síti pomocí konečně-prvkové báze. Proto zde již nemáme

k dispozici žádné srovnání a pro výpočet budeme uvažovat pouze situaci, kdy matici aproximujeme pomocí hraničně-prvkového přístupu Steklov-Poincarého operátorem.

\bar{H}/\bar{h}	N				
	8	32	128	512	2048
6	121	529	2 209	9 025	36 481
	49	241	1 057	4 417	18 049
	11/14	14/19	16/20	16/21	16/22
12	529	2 209	9 025	36 481	146 689
	105	513	2 241	9 345	38 145
	13/17	16/23	19/24	19/25	19/27
24	2 209	9 025	36 481	146 689	588 289
	217	1 057	4 609	19 201	78 337
	16/20	20/27	22/29	22/31	22/32
48	9 025	36 481	146 689	588 289	
	441	2 145	9 345	38 913	
	18/23	23/33	26/35	26/36	-/-
96	36 481	146 689	588 289	2 356 225	
	889	4 321	18 817	78 337	
	21/28	27/38	30/41	30/42	-/-

Tabulka 3: Výsledky pro různé kombinace dekompozice a diskretizace, dělení na L-shape, A^H - BEM.

Výsledky testování jsou uvedeny v tabulce 3. Jednotlivá čísla v tabulce mají stejný význam jako v předchozích dvou, tedy číslo v prvním řádku buňky je dimenze úlohy, respektive počet neznámých matice A , v druhém řádku je dimenze úlohy pro Schurův doplněk, neboli počet neznámých matice \tilde{S} , a dvojice čísel v poslední řádku uvádí počet iterací bez skoků v koeficientech / se skoky v koeficientech. Můžeme vidět, že úloha po dekompozici na podoblasti tvaru L (L-shape) již není tak robustní a dochází k malým rozdílům v počtech iterací v závislosti na skocích v koeficientech. Konvergence pro případ se skoky v koeficientech je o něco horší, stále však relativně dobrá a pro naše potřeby uspokojivá. Výsledky opět odpovídají podobnému chování jako v předchozím příkladě pouze se zhoršenými konstantami.

5 Závěr

V této práci jsme si ukázali principy primární metody rozložení oblasti a jeden ze způsobů jak pomocí této metody řešit parciální diferenciální rovnice. Speciálně jsme se zaměřili na metodu řešení Poissonovy úlohy ve dvou dimenzích s předpokládáním. Hlavním tématem práce byla konstrukce předpokládání pro úlohu ve dvou dimenzích, jeho analýza a následná implementace metody hraničních prvků. Odhady pro trojúhelníkové podoblasti a pro použití metody konečných prvků deklarují číslo podmíněnosti dané úlohy $O((1 + \log(H/h))^2)$ nezávisle na skocích v koeficientech, kde H je maximální průměr podoblasti a h je diskretizační parametr. Tomuto by tedy měly odpovídat počty iterací. Při numerických experimentech jsme ověřili, že zvolená metoda funguje velmi dobře. Očekávané analytické odhady se ukázaly jako nadhodnocené a ukázalo se, že počty iterací odpovídají spíše $O(1 + \log(H/h))$. Nahrazení řešení globální úlohy pro předpokládání metodou hraničních prvků se osvědčilo, konvergence metody zůstala stejná, v případě se L-shape se sice zhoršila, ne však nijak výrazně. Využití hraničních prvků v této metodě nám umožňuje se v praxi vypořádávat s obecnějšími tvary podoblastí než bylo doposud možné s využitím metody konečných prvků.

Dalším tématem ke zpracování se nabízí přenést tento předpokládavač do 3D, kde by se změnil poměr prvků uvnitř podoblasti vůči těm hraničním a jednotlivé části předpokládání by tak mohly mít ve výsledku jiný význam než ve 2D. Pro uvedenou metodu ve 3D (bez použití hraničních prvků) jsou již známy analytické odhady, které jsou $O(H/h)$, což je horší, než jak je tomu ve 2D. Proto bychom tuto metodu ve třech dimenzích nahradili tzv. wire-basket metodou, ve které se dá obdobně aplikovat metoda hraničních prvků.

Dále by bylo vhodné vyzkoušet aplikaci hraničních prvků i na další části předpokládání. Pro úlohu na rozhraní se tato možnost přímo nabízí a řešení metodou hraničních prvků by mohlo být přirozenější a efektivnější než jak je to doposud při použití konečných prvků. Poslední úlohou, která se týká konstrukce předpokládání jsou lokální úlohy na podoblastech, které mohou být taky řešeny metodou hraničních prvků. Bylo by určitě zajímavé toto vyzkoušet a otestovat ve 2D a poté případně používat ve 3D, kde by aplikace hraničních prvků měla výraznější význam pro ušetření nároků na výpočet.

Lukáš Malý

6 Reference

- [1] J. Bouchala, *Úvod do BEM*, přednáška pro Seminář Numerické Analýzy, VŠB-TU Ostrava, 2007. Dostupné na <http://homel.vsb.cz/bou10/archiv/archiv.html>.
- [2] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, A.H. Schatz, *The construction of preconditioners of elliptic problems by substructuring I*, *Mathematics of Computation* 47 (175): 103-134, 1986.
- [3] M. Costabel, *Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results*, *SIAM*, 19(3): 613-626, 1988.
- [4] M. Dryja, O.B. Widlund, *Some Domain Decomposition Algorithms for Elliptic Problems*, In *Iterative Methods for Large Linear Systems*, 273-292. Academic Press, 1998.
- [5] C. Hofreither, *A Non-Standard Finite Element Method using Boundary Integral Operators*, disertační práce, vedoucí U. Langer, S. Rjasanow, Linz, 2012.
- [6] W. Cheney, *Analysis for Applied Mathematics*. New York: Springer-Verlang, 2001.
- [7] D. Lukáš, *Efficient Numerics for Boundary Integral Equations*, přednáška pro Seminář Numerické Analýzy, VŠB-TU Ostrava, 2013. Dostupné na <http://www.ugn.cas.cz/events/2013/sna/sna-sbornik.pdf>, strana 119-133.
- [8] L. Malý, *Metody rozložení oblasti s předpokmáněním*, bakalářská práce, vedoucí D. Lukáš, VŠB-TU Ostrava, 2011.
- [9] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, 2000.
- [10] Míka S., Příkryl P., Brandner M., *Speciální numerické metody: Numerické metody řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice*, Vydavatelský servis, Plzeň, 2006.
- [11] K. Rektorys, *Variční metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. Academia Praha, 1999.
- [12] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Second edition, SIAM, Philadelphia, 2003.
- [13] M. Sadowská, *Řešení variačních nerovnic pomocí hraničních integrálních rovnic*, diplomová práce, vedoucí J. Bouchala, VŠB-TU Ostrava, 2005.
- [14] M. Sadowská, *Scalable Total BETI for 2D and 3D Contact Problems*, disertační práce, vedoucí J. Bouchala, VŠB-TU Ostrava, 2008.
- [15] O. Steinbach, S Rjasanow, *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Springer, 2007.
- [16] A. Toselli, O.B. Widlund, *Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory*. Berlin: Springer-Verlang, 2005.