VŠB - Technická univerzita Ostrava

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Katedra aplikované matematiky

Diskretizace 2-dimenzionálních oblastí level-set metodou

Discretization of 2-Dimensional Domains using the Level-Set Method

2009 Jiří Lippa

Prohlášení o autorství:

„Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.“

Datum: ……. **Podpis:** ……

Abstrakt:

V této práci pojednáváme o problematice diskretizace 2-dimenzionálních oblastí pomocí metody level-setů. Výhodou toho přístupu je, že oblast máme definovanou implicitně. Cílem je jednak hlouběji vysvětlit principy metody level-setů a také nastínit 2 metody řešení parciálních-diferenciálních rovnic: metodu konečných prvků a metodu hraničních prvků. Výsledky ukážeme na příkladech několika jednoduchých i složitějších oblastí.

Abstract:

In this thesis we discuss problems of discretization of 2-Dimensional domains using the level-set method. The advantage of this approach is that the domain is defined implicitly. The aim of the thesis is partly to more deeply explain principals of the level-set methods and to outline 2 methods to solve partial differential equations: the finite element method and the boundary element method. We will show the results on a sample of elementary and more complicated domains.

Klíčová slova:

Generátor sítí, metoda level-setů, Hamilton-Jacobiho rovnice, metoda konečných prvků, metoda hraničních prvků

Key words:

Mesh generator, level-set method, Hamilton-Jacobi equation, finite element method, boundary element method

Poděkování:

Chtěl bych tímto poděkovat vedoucímu mé diplomové práce Ing. Daliboru Lukášovi, Ph.D. za odbornou pomoc, trpělivost při sepisování práce a v neposlední řadě i za časná ranní vstávání na naše konzultace.

Seznam použitých symbolů a zkratek:

1D	1-dimenzionální
2D	2-dimenzionální
3D	3-dimenzionální
MHP	Metoda hraničních prvků
MKP	Metoda konečných prvků
$\mathbb{R}$	Množina reálných čísel

Obsah:

1. Úvod 2
2. Metody typu level-set 3
   2.1. Implicitní funkce 3
   2.2. Distantní funkce 4
   2.3. Hamilton-Jacobiho rovnice 5
   2.4. Eulerova metoda 5
   2.5. Vyhlazení difuzním členem 6
   2.6. Rozšíření normály z hranice dovnitř oblasti 6
3. Matematický aparát 7
   3.1. Sobolevovy prostory 7
   3.2. Stopy funkce 9
   3.3. Slabé řešení smíšené úlohy 9
   3.4. Gaussova kvadratura 10
4. Rozšíření normály metodou konečných prvků (MKP) 13
   4.1. Metoda konečných prvků 13
   4.2. Diskretizace oblasti Ω a aproximace V_h 13
   4.3. Diskretizace křivky Γ a aproximace Q_h 14
   4.4. Maticový zápis úlohy (♠) 15
   4.5. Výpočet jednotlivých integrálů 16
   4.6. Příklady oblastí 20
   4.7. Výhody a nevýhody MKP 21
5. Rozšíření normály metodou hraničních prvků (MHP) 22
   5.1. Metoda hraničních prvků 22
   5.2. Kolokace 23
   5.3. Příklady 26
   5.4. Výhody a nevýhody kolokační MHP 27
6. Generace sítí level-set metodami 28
   6.1. Algoritmus výpočtu 28
   6.2. Numerické experimenty 28
      6.2.1. MKP 28
      6.2.2. MHP 32
7. Závěr 35
8. Reference 36
9. Seznam příloh 37

1. Úvod

Metody level-setů mají dnes celou řadu využití v numerické matematice. Je možné je použít k modelování šíření požárů v lesních porostech, modelování přílivových vln oceánů, dále také v různých algoritmech při zpracování obrazu a v dalších oblastech matematiky jako například při hledání nejlepší cesty v grafových algoritmech, viz [6]. My jej použijeme na generátor 2-dimenzionální sítě.

V metodách level-setů máme na vstupu obvykle implicitně zadanou oblast umístěnou ve vektorovém poli, které na ní necháme působit. Bude nás zajímat vývoj hranice oblasti v průběhu času a jednotlivé časové snímky pak zaznamenáme. Tento vývoj popisuje tzv. Hamilton-Jacobiho rovnice.

V našem případě působí vektorové pole ve směru vnitřní normály k hranici oblasti a tím zadanou oblast v každém časovém kroku smršťujeme. Je ovšem možné mít i jiná vektorová pole, která oblast například roztáčí, roztahují nebo se jedná o kombinaci všech vlivů. Pro další příklady rovnic, které takováto pole popisují, viz [5].

Konkrétní implementace naší metody bude zahrnovat tyto 3 kroky. Nejdříve vypočteme hranici zadané oblasti a její normálu. Druhým krokem bude rozšířit normálu z hranice oblasti i mimo tuto hranici. Tento krok provedeme za pomocí dvou metod – metody konečných prvků (MKP) a metody hraničních prvků (MHP). Výsledky dosažené oběma metodami pak porovnáme a vyhodnotíme, která metoda je výhodnější. Jakmile známe hodnoty vektorového pole i mimo hranici, můžeme provést poslední krok a určit hranici v dalším časovém okamžiku.

Samotný text bude rozdělen do těchto částí: Ve druhé kapitole detailněji představíme metodu level-setů a její konkrétní formulaci pro naši úlohu. Uvedeme znění Hamilton-Jacobiho rovnice a její numerickou aproximaci, kterou použijeme. V kapitole 3 se pak hlouběji seznámíme s matematickým aparátem, který je potřeba znát, abychom mohli dále používat MKP a MHP k rozšíření vektorového pole i mimo hranici zadané oblasti.

Kapitola 4 se pak věnuje MKP, některým základním matematickým operacím, které provádíme a také implementaci MKP, kterou jsme použili v našem výpočtu. Kapitola 5 se zabývá MHP. Na rozdíl od MKP metodu nepředstavíme až do takových detailů. Pro naše výpočty budeme používat jednu z možných aproximací MHP – kolokační MHP.

V 6. kapitole pak uvedeme konkrétní znění algoritmu, kterým vypočteme jednotlivé časové iterace hranice (budeme je označovat jako vrstevnice). Nakonec vyhodnotíme výsledky, které dával generátor s využitím jak MKP, tak i MHP.

2. Metody typu level-set

Následující kapitoly pojednávají o tzv. metodách typu level-set. Čerpali jsme z prací [5] a [6], které ukazují i jiná využití, než náš konkrétní případ. Nejdříve nadefinujeme implicitní a distantní funkce a poté ukážeme, jak za pomocí těchto funkcí můžeme sledovat evoluci křivky ve vektorovém poli.

2.1. Implicitní funkce

Mějme v $\mathbb{R}^2$ kružnici *K* se středem v bodě $(0,0)$ a poloměrem r. Tato kružnice nám prostor $\mathbb{R}^2$ rozděluje na tři oblasti - vnitřek kružnice ($int\ K$), hranici kružnice (∂K) a vnějšek kružnice ($ext\ K$).

Máme dvě možnosti, jak vyjádřit hranici kružnice - buď *explicitní*, nebo *implicitní*. V případě explicitního vyjmenujeme všechny body, které hranice obsahuje. Pro hranici kružnice je jednou z možností explicitního vyjádření:

$$\partial K = \left\{\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \bar{x} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\ t \\ r \cdot \sin\ t \end{pmatrix} : t \in \langle -\pi, \pi \rangle\right\}.$$

Pro vnitřek:

$$int\ K = \{\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : |\bar{x}| < r\}$$

a pro vnějšek:

$$ext\ K = \{\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : |\bar{x}| > r\}.$$

Pro kružnici není tak velký problém vyjádřit její hranici explicitně, ale v případě komplikovanějších křivek by už tento úkol nemusel být tak jednoduchý. Křivku bychom museli nejdříve diskretizovat na menší úseky, a poté bychom si ji v každém úseku vyjádřili parametricky.

Druhý přístup vychází z toho, že všechny body na hranici lze vyjádřit pomocí jednoduché rovnice. Pro kružnici K je rovnice následující:

$$\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 - r^2.$$

Funkci $\varphi(\bar{x})$ označme jako *implicitní funkci*.

Pro hranici pak platí:

$$\varphi(\bar{x}) = 0,$$

pro vnějšek K:

$$\varphi(\bar{x}) > 0,$$

pro vnitřek K:

$$\varphi(\bar{x}) < 0.$$

Implicitní funkce spíše než explicitní je výhodnější používat k vyjádření oblastí. Jednoduše se s nimi dají spočítat množinové operace (průnik, sjednocení, doplněk), viz [5]. Lze také rychle spočítat normálu $\bar{n}(\bar{x})$ k hranici zadané oblasti.

Pokud známe gradient $\varphi(\bar{x})$:

$$\nabla\varphi(\bar{x}) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right),$$

pak pro normálu platí:

$$\bar{n}(\bar{x}) = \frac{\nabla\varphi(\bar{x})}{|\nabla\varphi(\bar{x})|}.$$

2.2. Distantní funkce

Představme si opět naši kružnici K, pak *distantní funkci* definujeme jako:

$$d(\bar{x}) = \begin{cases} -\min\limits_{\overline{x_K}\in\partial K} |\bar{x} - \overline{x_K}|, & \bar{x} \in int\ K \cup \partial K \\ \min\limits_{\overline{x_K}\in\partial K} |\bar{x} - \overline{x_K}|, & \bar{x} \in ext\ K. \end{cases}$$

Funkce $d(\bar{x})$ vyjadřuje vzdálenost bodu $\bar{x}$ od kružnice *K*. Pokud leží bod uvnitř kružnice, pak je vzdálenost záporná. Pokud leží ve vnějšku, je kladná. Je zřetelné, že takto definovaná funkce patří i mezi implicitní funkce.

Mějme oblast ω s polygonální hranicí Γ. Označme si jednotlivé úsečky hranice postupně Γ_1 až Γ_n. Distantní funkci spočítáme:

$$d(\bar{x}) = \begin{cases} -\min\limits_{\Gamma_i}(dist(\bar{x}, \Gamma_i)), & \bar{x} \in int\ \omega \cup \Gamma \\ \min\limits_{\Gamma_i}(dist(\bar{x}, \Gamma_i)), & \bar{x} \in ext\ \omega. \end{cases}$$

Označením $dist(\bar{x}, \Gamma_i)$ rozumíme vzdálenost bodu $\bar{x}$ od úsečky Γ_i.

Uvedené vzorce jsou založeny na předpokladu, že známe polohu bodu ve vztahu ke kružnici. Tento úkol není úplně triviální, proto uvedeme postup, jak polohu určit.

Mějme bod $\bar{x}$. Z něj veďme libovolným směrem polopřímku. Postupně procházíme jednotlivé úseky Γ_i a počítáme, kolikrát je naše polopřímka protne. Pokud je počet průsečíků sudý, pak bod leží v $ext\ K$. Pokud je počet lichý, pak bod leží v $int\ K$.

2.3. Hamilton-Jacobiho rovnice

Už máme nadefinovanou oblast ω a její hranici Γ jsme schopni popsat za pomocí rovnice

$$\varphi(\bar{x}) = 0.$$

Nyní se věnujme případu, kdy je oblast vložena do vektorového pole $\bar{F}(\bar{x})$. Bude nás zajímat, jaký účinek má v průběhu času toto pole na hranici oblasti ω. Do hry nám vstoupí nová proměnná – čas. Označíme ji *t*. V každém časovém okamžiku pro body na hranici platí:

$$\varphi(t, \bar{x}(t)) = 0.$$

Jelikož na jednotlivé body působí vektorové pole $\bar{F}(t, \bar{x}(t))$, pak pro jejich pohyb platí tento vztah:

$$(1) \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = \bar{F}\big(t, \bar{x}(t)\big).$$

Vyžadujeme, aby

$$(2) \quad \frac{d\varphi(t, \bar{x}(t))}{dt} = 0.$$

Zderivujeme-li (2) za pomocí pravidla o derivaci složené funkce a dosadíme-li do výsledku (1), pak časový průběh hranice se dá vyjádřit vztahem, který se označuje jako *Hamilton-Jacobiho rovnice*:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t, \bar{x}(t)) + \bar{F}(t, \bar{x}(\mathrm{t})) \cdot \nabla\varphi\big(t, \bar{x}(t)\big) = 0.$$

2.4. Eulerova metoda

Přistoupíme teď k evoluci naši hranice v čase. Začneme v čase $t = 0$ a za pomocí Hamilton-Jacobiho rovnice spočítáme hodnoty $\varphi(t, \bar{x}(t))$ v dalších časových okamžicích. Pro větší přehlednost už neuvádíme $\bar{x}$ jako funkci času.

Pro výpočet derivace v čase použijeme *dopředné diference*. Pro čas t_{n+1} a t_n $(t_{n+1} - t_n = \Delta t)$ bude platit:

$$\frac{\varphi(t_{n+1}, \bar{x}) - \varphi(t_n, \bar{x})}{\Delta t} + \bar{F}(t_n, \bar{x}) \cdot \nabla\varphi(t_n, \bar{x}) = 0.$$

Derivace podle prostorových proměnných budeme počítat přesněji než časové, a to *centrálními diferencemi*. Platí tedy:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, \bar{x_i}) \approx \frac{\varphi(t, \overline{x_{i+1}}) - \varphi(t, \overline{x_{i-1}})}{2\Delta\bar{x}},$$

Pokud dosadíme za jednotlivé derivace, dostáváme:

$$(*)\colon \varphi(t_n + \Delta t, \bar{x}) = \varphi(t_n, \bar{x}) - \Delta t \cdot \bar{F}(t_n, \bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\varphi\big(t,(x_1+\Delta x_1, x_2)\big) - \varphi\big(t,(x_1-\Delta x_1, x_2)\big)}{2\Delta x_1} \\ \frac{\varphi\big(t,(x_1, x_2+\Delta x_2)\big) - \varphi\big(t,(x_1, x_2-\Delta x_2)\big)}{2\Delta x_2} \end{pmatrix}.$$

2.5. Vyhlazení difuzním členem

Při rostoucích časových iteracích dochází k oscilacím funkce $\varphi(t, \bar{x})$ a tím pádem k relativně velkým nepřesnostem. Vliv těchto oscilací jsme se rozhodli zmírnit přidáním tzv. *difuzního členu* do Hamilton-Jacobiho rovnice:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \bar{x}) + \bar{F}(t, \bar{x}) \cdot \nabla \varphi(t, \bar{x}) = \varepsilon \Delta \varphi(t, \bar{x}).$$

Od ε vyžadujeme, ať $\varepsilon \sim \Delta \bar{x}$, aby pro $\Delta \bar{x} \to 0$ difúzní člen vypadnul a naše metoda tak zůstala konzistentní. Numerickými experimenty se nejvíce osvědčila hodnota $\varepsilon \cong \frac{\Delta \bar{x}}{10}$, ale pro různé oblasti může být výhodnější použít jinou hodnotu.

2.6. Rozšíření normály z hranice dovnitř oblasti

Již víme, jak spočítat $\varphi(t, \bar{x})$, jak odhadnout ε a jako poslední nám zbývá vektorové pole $\bar{F}(t, \bar{x})$. V každém časovém okamžiku budeme mít nejdříve definované vektorové pole pouze na hranici Γ. Z této hranice pak rozšíříme pole na celou sledovanou oblast.

Toto odpovídá předpisu:

$$\forall t > 0\colon \bar{F}(t, \bar{x})\colon \Gamma(t) \to \mathbb{R}^2.$$

Rozšíříme na:

$$\tilde{F}(t, \bar{x})\colon \Omega(t) \to \mathbb{R}^2\colon \tilde{F}(t, \bar{x})|_{\Gamma(t)} = \bar{F}(t, \bar{x})|_{\Gamma(t)},$$

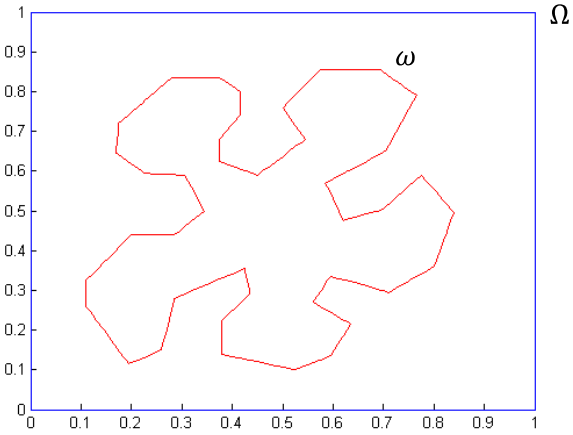
kde Ω je oblast, do které je vložená Γ.

Od $\tilde{F}(t, \bar{x})$ očekáváme, že je dostatečně regulární, alespoň spojitá na Ω. Ve skutečnosti, viz $(*)$, nám stačí rozšířit $\bar{F}(t, \bar{x})$ pouze do malého Δx – okolí za účelem výpočtu $\bar{F}(t, \bar{x}) \cdot \nabla \varphi(t, \bar{x})$.

Vybrali jsme si dva způsoby, jak vektorové pole rozšířit na celou oblast – metodu hraničních prvků a metodu konečných prvků. Podrobněji je probereme v následujících kapitolách. Pro tyto potřeby se ale nejdříve hlouběji věnujme některým matematickým pojmům.

3. Matematický aparát

Mějme uzavřenou čtvercovou oblast $\Omega \coloneqq (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$, uvnitř které je definovaná oblast ω. Hranici ω pak označme Γ. Na obrázku je hranice $\Omega \coloneqq (0,0) \times (1,1)$ znázorněna modře a příklad Γ je znázorněn červeně.



Obrázek 1 - Oblast ω uvnitř oblasti **Ω**

Dále mějme zadanou funkci $\bar{F}(x_1,x_2)\colon \Gamma \to \mathbb{R}^2$, pro kterou platí: $\bar{F}(x_1,x_2) = \bar{n}(x_1,x_2)$, kde $\bar{n}(x_1,x_2)$ je vnější jednotková normála ke křivce Γ v bodě (x_1,x_2). Našim cílem bude rozšířit funkci $\bar{F}(x_1,x_2)$ na celou oblast Ω. Řešíme tedy tuto Dirichletovu úlohu, označme ji (●):

$$(\bullet)\begin{cases} -\Delta\bar{F}(x_1,x_2) = 0 \text{ na } \Omega \\ \bar{F}(x_1,x_2) = 0 \text{ na } \partial\Omega \\ \bar{F}(x_1,x_2) = -\bar{n}(x_1,x_2) \text{ na } \Gamma. \end{cases}$$

Nebudeme hledat klasické řešení naší úlohy, což by mohlo být výpočetně příliš komplikované, ale spokojíme se s tzv. slabým řešením. Kvůli tomu bude třeba přepsat zadání úlohy (●) do slabé formulace. Co přesně pojem slabá formulace znamená, jaký bude mít vliv na výsledné řešení a jaké vlastnosti takového řešení můžeme očekávat, probereme v této kapitole.

Pro hlubší pohled do dané problematiky, důkazy některých tvrzení a další aplikace viz [1].

3.1. Sobolevovy prostory

Nejprve je třeba nadefinovat si několik druhů prostorů a jejich vlastností, které nám napomohou s konstrukcí slabé formulace. Jako první uveďme vlastnost prostoru – tzv. úplnost.

Metrický prostor (X,ϱ) nazveme *úplným*, pokud je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní. Jako příklad úplných prostorů nám postačí $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$. Každá cauchyovská posloupnost v nich má svou limitu.

Jako protipříklad uveďme prostor $\mathbb{R}-\{3\}$, kde například tato posloupnost $\{x_n\}=\frac{3n^2-1}{n^2}$ nemá limitu.

Nyní k samotným prostorům, jako první uveďme následující třídy prostorů: Mějme $1 \leq p < \infty$ a Ω buď podmnožinou systému lebesguovsky měřitelných množin, pak definujme:

$$L^p(\Omega)=\left\{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*\colon f \text{ je měřitelná}, \int_\Omega |f|^p d\lambda < \infty\right\}.$$

Symbolem $\mathbb{R}^*$ rozumíme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Všechny integrály budeme uvažovat v Lebesgueově smyslu (viz [1]). Tyto prostory označme $L^p(\Omega)$.

Zadefinujme si také *nosič* funkce $f(\bar{x})$. Značíme $\operatorname{supp}\varphi$ a platí pro něj:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n\colon f(\bar{x}) \neq 0\}}.$$

Prostory $C_0^\infty(\Omega)$ za pomocí nosiče definujeme:

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega)\colon \operatorname{supp} f \subset \Omega \wedge \operatorname{supp} f \text{ je kompakt}\}.$$

Symbolem $C^\infty(\overline{\Omega})$ označujeme množinu těch funkcí, které mají na oblasti $\overline{\Omega}$ spojité všechny derivace.

Jako poslední uvedeme definici *Sobolevových* prostorů. Jsou pro nás nejdůležitější, protože v nich budeme hledat řešení. Buď tedy $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p < \infty$ a α buď multiindex (viz [1]). Definujme na prostoru $C^\infty(\overline{\Omega})$ normu:

$$\|u\|_{k,p}=\left(\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

kde $D^\alpha u$ je obecný symbol pro parciální derivace libovolného řádu. *Sobolevovým prostorem* $W^{k,p}(\Omega)$ pak rozumíme zúplnění $\left(C^\infty(\overline{\Omega}), \|u\|_{k,p}\right)$.

Sobolevovým prostorem $W_0^{k,p}(\Omega)$ označíme uzávěr $C_0^\infty(\Omega)$ v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$. Pro naše potřeby si vystačíme s prostory $W_0^{1,2}(\Omega)$ a $W^{1,2}(\Omega)$. Budeme je pro jednoduchost značit $H_0^1(\Omega)$ a $H^1(\Omega)$. Značení vychází z toho, že se jedná o *Hilbertovy* prostory, tedy úplné prostory v metrice indukované skalárním součinem. Skalární součin na prostorech $H_0^1(\Omega)$ a $H^1(\Omega)$ definujeme:

$$(u,v)=\int_\Omega u'(x)v'(x)dx.$$

3.2. Stopy funkce

Pokud máme funkci z prostoru $H^1(\Omega)$, tak se budeme také zajímat o chování funkce na hranici množiny Ω. Objasní nám to následující věty:

Věta o stopách

Existuje *právě jedno* spojité, lineární zobrazení $T: H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ takové, že pro každé $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ je $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Kde Tu je *stopa funkce* u.

Pro přesnou definici prostoru $L^p(\partial\Omega)$ opět odkážeme na [1].

Greenova věta

$$\forall u, v \in H^1(\Omega):$$

$$\int_\Omega u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} d\bar{x} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v d\bar{x} + \int_{\partial\Omega} Tu \cdot Tv \cdot n_i ds,$$

kde n_i je i-tá složka jednotkového vektoru vnější normály k $\partial\Omega$ v bodě $\bar{x}$; Tu a Tv jsou stopy funkcí u a v. Všechny derivace jsou ve smyslu distribucí (opět [1]).

Greenovu větu použijeme k „přesunutí“ druhých derivací na tzv. testovací funkce ve slabé formulaci (●).

3.3. Slabé řešení smíšené úlohy

Mějme úlohu (●):

$$-\Delta\overline{F}(x_1, x_2) = 0 \text{ na } \Omega$$
$$\overline{F}(x_1, x_2) = 0 \text{ na } \partial\Omega$$
$$\overline{F}(x_1, x_2) = -\overline{n}(x_1, x_2) \text{ na } \Gamma.$$

Definujme tyto prostory:

$$V_0 = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$
$$Q = L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega).$$

Přejděme z klasické formulace na variační. Pro $\forall \bar{v} \in V_0$ a $\forall \bar{q} \in Q$ nechť platí následující:

$$\text{(i)} \int_\Omega -\Delta\overline{F}(x_1, x_2)\bar{v}(x_1, x_2)\mathrm{dS} + \int_\Gamma \bar{\lambda}(x_1, x_2)\bar{v}(x_1, x_2)\mathrm{ds} = 0,$$

$$\text{(ii)} \int_\Gamma \overline{F}(x_1, x_2)\bar{q}(x_1, x_2)\mathrm{ds} = -\int_\Gamma \overline{n}(x_1, x_2)\bar{q}(x_1, x_2)\mathrm{ds},$$

kde $\bar{\lambda}(x_1, x_2)$ jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory (viz např. [3]).

Pomocí Greenovy věty a faktu, že $\bar{F}(x_1, x_2) \in V_0$ (její stopa na $\partial\Omega$ je rovna 0) můžeme rovnici (i) přepsat do tvaru:

$$\int_{\Omega} \nabla\bar{F}(x_1, x_2)\nabla\bar{v}(x_1, x_2)\mathrm{dS} + \int_{\Gamma} \bar{\lambda}(x_1, x_2)\bar{v}(x_1, x_2)\mathrm{ds} = 0.$$

Dospěli jsme tedy ke *slabé formulaci* naší původní úlohy. Budeme hledat $(\bar{F}, \bar{\lambda}) \in V_0 \times Q$. Označíme následující úlohu (♠):

$$(\spadesuit)\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla\bar{F}(x_1, x_2)\nabla\bar{v}(x_1, x_2)\mathrm{dS} + \int_{\Gamma} \bar{\lambda}(x_1, x_2)\bar{v}(x_1, x_2)\mathrm{ds} = 0 & \forall\bar{v} \in V_0 \\ \int_{\Gamma} \bar{F}(x_1, x_2)\bar{q}(x_1, x_2)\mathrm{ds} = -\int_{\Gamma} \bar{n}(x_1, x_2)\bar{q}(x_1, x_2)\mathrm{ds} & \forall\bar{q} \in Q. \end{cases}$$

Dvojici $\left(\bar{F}(x_1, x_2), \bar{\lambda}(x_1, x_2)\right)$ pak nazveme *slabým řešením* (♠) a příslušnými Lagrangeovými multiplikátory.

3.4. Gaussova kvadratura

Během našich výpočtů se budeme setkávat se složitými integrály, které není jednoduché řešit analyticky. Probereme proto jednu z možností, jak takovéto integrály řešit numericky – Gaussovu kvadraturu.

Máme funkci $f(x)$: $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, kterou dokážeme přibližně aproximovat za pomocí polynomiální funkce $P_n(x)$: $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, kde n označuje stupeň polynomu.

$$P_n(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n \quad p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$$

Hledáme w_i a x_i, aby platilo následující:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{k} w_i f(x_i),$$

w_i jsou váhy příslušné dané kvadratuře a x_i jsou její kořeny.

Uveďme způsob, jak spočítat w_i a x_i, pro $n = 3$. Funkci $f(x)$ tedy odhadneme polynomem stupně 3. Položme:

$$P_3(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$$

Pak platí:

$$\int_a^b P_3(x)dx = \left[p_0 x + \frac{p_1 x^2}{2} + \frac{p_2 x^3}{3} + \frac{p_3 x^4}{4}\right]_a^b,$$

$$(1) \qquad \int_a^b P_3(x)dx = p_0(b-a) + p_1\frac{b^2-a^2}{2} + p_2\frac{b^3-a^3}{3} + p_3\frac{b^4-a^4}{4}.$$

Hledáme k, aby platilo, že $n = 2k-1$, tedy $k = 2$:

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Za $f(x_1)$ a $f(x_2)$ dosadíme $P_3(x_1)$ a $P_3(x_2)$:

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1(p_0 + p_1x_1 + p_2x_1^2 + p_3x_1^3) + w_2(p_0 + p_1x_2 + p_2x_2^2 + p_3x_2^3).$$

Přeuspořádáme pravou stranu:

$$(2) \quad \int_a^b f(x)dx \cong p_0(w_1 + w_2) + p_1(w_1x_1 + w_2x_2) + p_2(w_1x_1^2 + w_2x_2^2) + p_3(w_1x_1^3 + w_2x_2^3).$$

Porovnáním (1) a (2) dostáváme tuto soustavu rovnic:

$$w_1 + w_2 = b - a$$
$$w_1x_1 + w_2x_2 = \frac{b^2-a^2}{2}$$
$$w_1x_1^2 + w_2x_2^2 = \frac{b^3-a^3}{3}$$
$$w_1x_1^3 + w_2x_2^3 = \frac{b^4-a^4}{4}$$

Jako řešení pak dostáváme:

$$w_1 = w_2 = \frac{b-a}{2}$$
$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}$$

Jestliže chceme vyjádřit váhy a kořeny pro polynomy většího stupně, pak je postup obdobný. Spočítáme k, aby $n = 2k-1$ a pak už zbývá jen vyřešit soustavu $2k-1$ rovnic o $2k-1$ neznámých.

Abychom nemuseli v každém kroku počítat s intervalem $\langle a, b\rangle$, je výhodné provést substituci na integrál z intervalu $\langle 0,1\rangle$. Platí totiž:

$$\int_a^b f(x)dx = \left|\begin{matrix} x = a + (b-a)t \\ dx = (b-a)dt \end{matrix}\right| = (b-a)\int_0^1 \hat{f}(t)dt,$$

$$\hat{f}(t) = f(a + (b-a)t).$$

Pro více informací o Gaussově kvadratuře doporučujeme nahlédnout do práce [4], ze které jsme také čerpali při sepisování této kapitoly.

4. Rozšíření normály metodou konečných prvků (MKP)

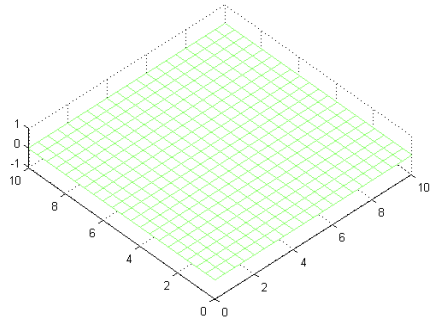
4.1. Metoda konečných prvků

MKP je jedna z numerických technik, jak řešit parciální diferenciální nebo integrální rovnice na různých oblastech. Její podstatou je rozdělení sledované oblasti, často příliš komplikované na provedení výpočtů nebo nepříjemného tvaru, na menší podoblasti, na kterých se výpočty značně zjednoduší. V praktických případech jsou danými podoblastmi například úsečky (v 1D), trojúhelníky, či čtverce (ve 2D) nebo čtyřstěny, případně krychle (ve 3D).

V průběhu metody nejdříve nalezneme slabou formulace zadané úlohy (což jsme provedli v předchozí kapitole). V dalším kroku pak diskretizujeme zadanou oblast na menší podoblasti (našimi podoblastmi budou čtverce). Cílem této diskretizace je převést úlohu (♠) z nekonečně dimenzionálního prostoru V_0 do jeho konečně dimenzionální aproximace V_h. V této aproximaci pak provedeme naše výpočty.

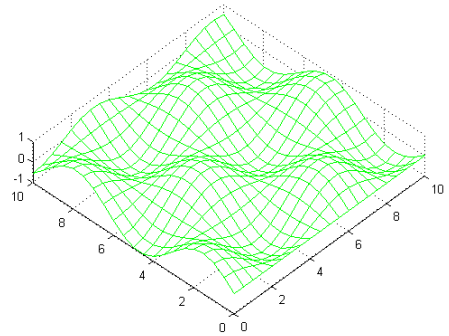
4.2. Diskretizace oblasti Ω a aproximace V_h

Mějme čtvercovou oblast Ω a její diskretizaci na čtverce. Na obrázku 2 je vidět diskretizace oblasti $\Omega \coloneqq (0,0) \times (10,10)$, s krokem diskretizace 0.5.



Obrázek 2 - Diskretizace oblasti Ω

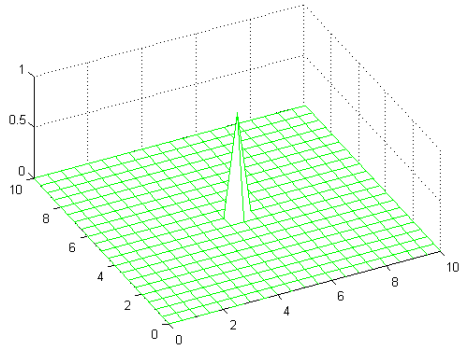
Na oblasti Ω definujme spojitou funkci $f(x_1, x_2): \Omega \to \mathbb{R}$. Našim cílem bude aproximovat funkci $f(x_1, x_2)$ za pomocí uzlů naši diskretizace. Ilustrujme příklad obrázkem 3. Je na něm aproximace funkce $f(x_1, x_2) = sin(x_1) \cdot cos(x_2)$ na naší diskretizaci.



Obrázek 3 – Funkce $\boldsymbol{f(x_1, x_2) = sin(x_1) \cdot cos(x_2)}$

V i-tém uzlu (x_{1i}, x_{2i}) diskretizace si představme následující po částech bilineární funkci:

$$\Phi_i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \text{ v } (x_{1i}, x_{2i}) \\ 0 \quad \text{jinde} \end{cases}$$



Obrázek 4 - Funkce $\boldsymbol{\Phi_i}\ (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$

Není těžké si rozmyslet, že za pomocí lineárních kombinací podobných funkcí $\Phi_i(x_1, x_2)$ můžeme aproximovat funkci $f(x_1, x_2)$ na naši oblasti Ω. Tyto funkce $\Phi_i(x_1, x_2)$ tvoří bázi prostoru, který si označíme jako $\widetilde{V_h}$. Prostor $\widetilde{V_h} = \langle \Phi_1, \cdots, \Phi_n \rangle$ je tedy lineárním obalem funkcí Φ_1 až Φ_n.

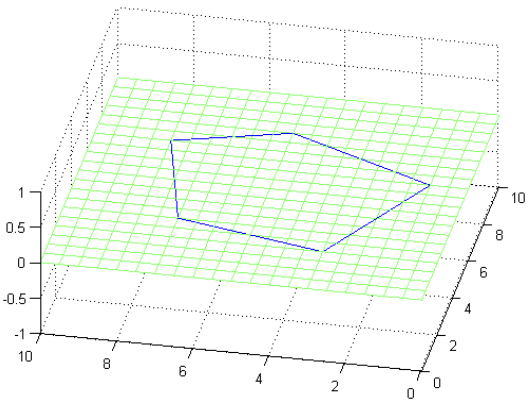
Aproximaci V_h pak definujme $V_h = \widetilde{V_h} \times \widetilde{V_h}$.

Hledanou aproximaci funkce $\bar{F}(x_1, x_2): \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\bar{F}(x_1, x_2) \in V_h$ pak zapíšeme pomocí funkcí $\Phi_i(x_1, x_2)$:

$$\bar{F}(x_1, x_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i^1 \Phi_i(x_1, x_2), \sum_{j=1}^{n} F_j^2 \Phi_j(x_1, x_2) \right) \in V_h$$

4.3. Diskretizace křivky Γ a aproximace Q_h

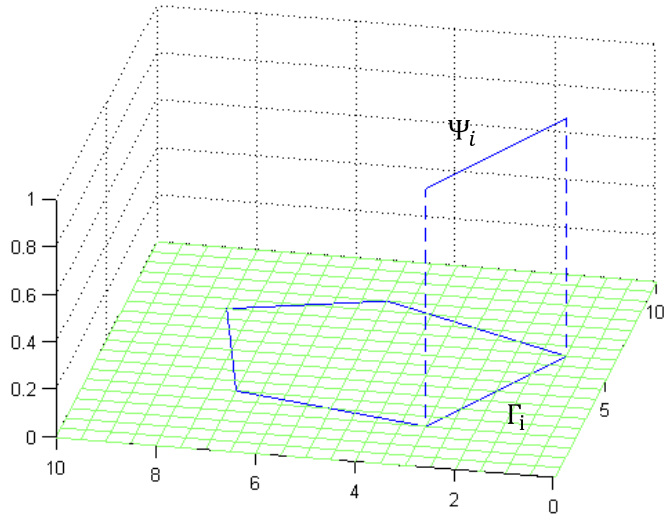
Očekáváme, že křivka Γ je polygonální. Počet úseček, ze kterých ji lze sestavit, označme m. Na obrázku 5 je uveden příklad takové křivky, kde $m = 5$:



Obrázek 5 - Diskretizace křivky Γ

Úseky označme postupně Γ_1 až Γ_m. Dále máme funkce, které jsou po částech konstantní na jednotlivých úsecích Γ_i. Platí:

$$\Psi_i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{na } \Gamma_\mathrm{i} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Obrázek 6 - Bázová funkce $\boldsymbol{\Psi_i(x_1, x_2)}$

Provedeme podobný postup jako v předchozí kapitole. Každou funkci, která by byla definovaná na křivce Γ, vyjádříme pomocí lineární kombinace funkcí $\Psi_i(x_1, x_2)$. Funkce $\Psi_i(x_1, x_2)$ tvoří bázi prostoru $\widetilde{Q_h}$. Aproximaci prostoru Q_h, pak definujme:

$$Q_h = \widetilde{Q_h} \times \widetilde{Q_h}$$

Po částech konstantní funkci $\bar{q}(x_1, x_2)\colon \Gamma \to \mathbb{R}^2$, $\bar{q}(x_1, x_2) \in Q_h$, pak vyjádříme:

$$\bar{q}(x_1, x_2) = \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i^1 \Psi_i(x_1, x_2), \sum_{j=1}^{m} \mu_j^2(x_1, x_2) \Psi_j(x_1, x_2) \right) \in Q_h$$

4.4. Maticový zápis úlohy (♠)

Uvažujme úlohu (♠). Předpokládejme, že funkce $\bar{F}(x_1, x_2) \in V_h$ a $\bar{v}(x_1, x_2) \in V_h$, pak můžeme naši úlohu přepsat do tohoto maticového tvaru:

$$\begin{bmatrix} A_{x_1} & 0 & B_{x_1} & 0 \\ 0 & A_{x_2} & 0 & B_{x_2} \\ B_{x_1}^T & 0 & 0 & \\ 0 & B_{x_2}^T & & \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{F_{x_1}} \\ \overline{F_{x_2}} \\ \overline{\lambda_{x_1}} \\ \overline{\lambda_{x_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{x_1} \\ N_{x_2} \end{pmatrix},$$

kde $A_{x_1} = A_{x_2} = A$ a $B_{x_1} = B_{x_2} = B$.

Pro prvky matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla\Phi_i \nabla\Phi_j \, \mathrm{dS}.$$

Pro prvky matice $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ platí:

$$B_{ik} = \int_{\Omega} \Phi_i \, \Psi_k \mathrm{ds} = \int_{\Gamma_k} \Phi_i \mathrm{ds}.$$

Pro prvky vektorů $N_{x_1}, N_{x_2} \in \mathbb{R}^m$ platí:

$$N_{x_{1k}} = -\int_{\Gamma_k} \bar{n}_{x_{1k}} \Psi_k \mathrm{ds} = -\int_{\Gamma_k} \bar{n}_{x_{1k}} \mathrm{ds},$$

$$N_{x_{2k}} = -\int_{\Gamma_k} \bar{n}_{x_{2k}} \Psi_k \mathrm{ds} = -\int_{\Gamma_k} \bar{n}_{x_{2k}} \mathrm{ds}.$$

Funkce Φ_i jsou již zmiňované bázové funkce prostoru $\widetilde{V_h}$ a Ψ_i bázové funkce $\widetilde{Q_h}$.

Aby soustava dávala jednoznačné a stabilní řešení, které nezačne oscilovat na zjemňujících se sítích, je nutno dodržet *inf-sup podmínku*, viz [3]. Je totiž nutné, aby prostor V_h byl „bohatší“ než prostor Q_h.

4.5. Výpočet jednotlivých integrálů

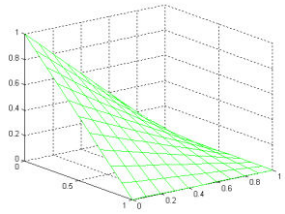
Nejprve se budeme věnovat vyjádření prvků v matici A. Jsou dvě možnosti, jak k tomu to problému přistupovat. Buď sestavíme matici A po jednotlivých uzlech nebo půjdeme po jednotlivých čtvercích naší diskretizace.

První přístup odpovídá zhruba tomuto integrálu:

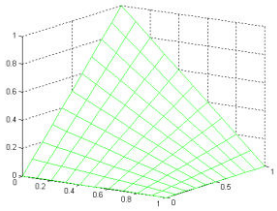
$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla\Phi_i \nabla\Phi_j \, \mathrm{dS} = \sum_{e=1}^{m} \int_{T_e} \nabla\Phi_i|_{T_e} \nabla\Phi_j|_{T_e} \, \mathrm{dS}$$

Kde T_e jsou jednotlivé čtverce diskretizace. Tento postup je výpočetně příliš zdlouhavý a proto se věnujme druhému postupu.

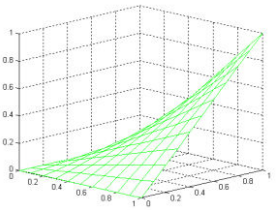
Představme si referenční čtverec $\langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$. Na něm nadefinujme následující bilineární funkce:



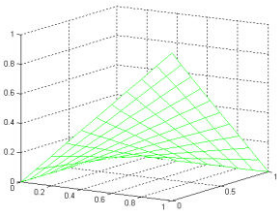
$\widehat{\Phi}_1(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) = (1-\widehat{x_1})(1-\widehat{x_2})$



$\widehat{\Phi}_2(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) = \widehat{x_1}(1-\widehat{x_2})$



$\widehat{\Phi}_3(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) = \widehat{x_1}\widehat{x_2}$



$\widehat{\Phi}_4(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) = (1-\widehat{x_1})\widehat{x_2}$

Obrázek 7 - Bázové funkce $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{1}}$ až $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{4}}$

V e-tém čtverci, pak definujme podobné funkce Φ_1^e až Φ_4^e. Od funkcí $\widehat{\Phi}_1$ až $\widehat{\Phi}_4$ se liší se pouze posunutím a jiným měřítkem. Není těžké vidět, že se jedná o „části“ našich bázových funkcí $\Phi_i(x_1,x_2)$.

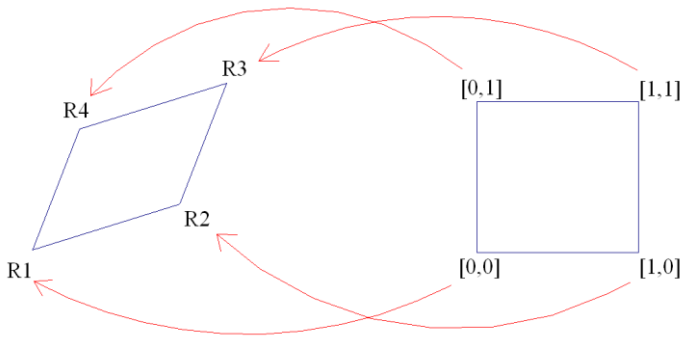
Přikročme k vyjádření příspěvku čtverce T_e do matice A. Zapsáno pomocí integrálu, vypadá příspěvek čtverce takto:

$$A_l = \int_{T_e} \nabla\Phi_i^e \nabla\Phi_j^e \,\mathrm{dS},$$

kde $i = 1,\dots,4$ a $j = 1,\dots,4$.

K výpočtu tohoto příspěvku vždy provedeme substituci z referenčního čtverce $\langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$ na čtverec T_e. Převedeme tedy funkce $\widehat{\Phi}_1$ až $\widehat{\Phi}_4$ na funkce Φ_1^e až Φ_4^e.

Na obrázku 8 je zobrazen převod referenčního čtverce na obecný rovnoběžník:



Obrázek 8 - Převod z referenčního čtverce

Můžeme jej popsat za pomocí následující rovnice:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{pmatrix} + \overline{r}.$$

Za R volíme $R = (\overline{R_2} - \overline{R_1}, \overline{R_4} - \overline{R_1})$ a za $\overline{r} = \overline{R_1}$

Nyní vyjádřeme gradient funkci Φ_i^e za pomocí funkce $\widehat{\Phi}_k$. a souřadnic $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$. Substituujme tedy:

$$\Phi_i^e(x_1, x_2) = \widehat{\Phi}_k(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}),$$
$$\frac{\partial \Phi_i^e}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial \widehat{\Phi}_k}{\partial \widehat{x_1}} \cdot \frac{\partial \widehat{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \widehat{\Phi}_k}{\partial \widehat{x_2}} \cdot \frac{\partial \widehat{x_2}}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial \Phi_i^e}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial \widehat{\Phi}_k}{\partial \widehat{x_1}} \cdot \frac{\partial \widehat{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \widehat{\Phi}_k}{\partial \widehat{x_2}} \cdot \frac{\partial \widehat{x_2}}{\partial x_2}.$$

Prvky $\frac{\partial \widehat{x_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial \widehat{x_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial \widehat{x_1}}{\partial x_2}$ a $\frac{\partial \widehat{x_2}}{\partial x_2}$ odpovídají matici R^{-1}. Stačí zderivovat rovnici, která definuje přechod na referenční čtverec.

Gradienty funkcí $\widehat{\Phi}_1$ až $\widehat{\Phi}_4$ vypadají následovně:

$$\nabla\widehat{\Phi}_1(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \begin{pmatrix} -(1 - \widehat{x_2}) \\ -(1 - \widehat{x_1}) \end{pmatrix},$$
$$\nabla\widehat{\Phi}_2(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \begin{pmatrix} 1 - \widehat{x_2} \\ -\widehat{x_1} \end{pmatrix},$$
$$\nabla\widehat{\Phi}_3(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \begin{pmatrix} \widehat{x_2} \\ \widehat{x_1} \end{pmatrix},$$
$$\nabla\widehat{\Phi}_4(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \begin{pmatrix} -\widehat{x_2} \\ 1 - \widehat{x_1} \end{pmatrix}.$$

Pro i-tý a j-tý uzel diskretizace pak můžeme tedy psát:

$$A_l = \int_{T_e} \nabla\Phi_i^e \nabla\Phi_j^e \, \mathrm{dS} = \int_0^1 \int_0^1 \left(R^{-T}\nabla\widehat{\Phi}_i(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})\right)^T \left(R^{-T}\nabla\widehat{\Phi}_j(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})\right) |\det R| \, \mathrm{d}\widehat{x_1}\mathrm{d}\widehat{x_2}.$$

Spočítat tento dvojný integrál je výpočetně příliš složité, použijeme proto Gaussovu kvadraturu.

Označme

$$S_l(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = R^{-T} \begin{bmatrix} -(1 - \widehat{x_2}) & 1 - \widehat{x_2} & \widehat{x_2} & -\widehat{x_2} \\ -(1 - \widehat{x_1}) & -\widehat{x_1} & \widehat{x_1} & 1 - \widehat{x_1} \end{bmatrix}.$$

Za pomocí Gaussovy kvadratury můžeme vypočítat matici A_l:

$$A_l = w \sum_{u=1}^{2} \sum_{v=1}^{2} S_l(p_u, p_v)^T S_l(p_u, p_v) \, |\det R|,$$

w je váha pro danou kvadraturu: $w = 0.25$
p_1 a p_2 jsou kořeny a jejich hodnoty jsou:

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad p_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

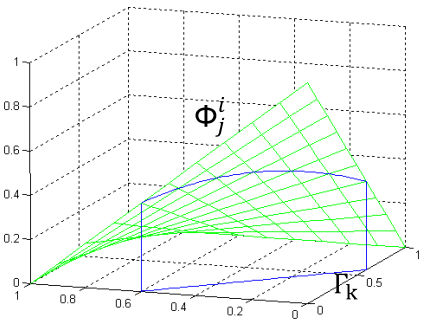
Výsledná matice A_l bude mít tedy rozměry 4x4.

Pro výpočet lokálního vektoru B_{ik} na čtverci T_e použijeme jednoduchou aproximaci funkcí v těžišti (x_k^s) k-té úsečky aproximace křivky Γ. Jde nám o vliv úsečky na bázové funkce v daném čtverci:

$$B_{ik} = \int_{T_e} \Phi_j^i \Psi_k = \int_{T_e \cap \mathrm{supp}\Psi_k} \Phi_j^i \, \Psi_k = \Phi_j^i(x_k^s) \cdot 1 \cdot |T_e \cap \mathrm{supp}\Psi_k|$$

$j = 1, \ldots, 4$, Φ_j^i je bázová funkce příslušná j-tému vrcholu i-tého čtverce.

Co přesně počítá integrál, je vidět na dalším obrázku.



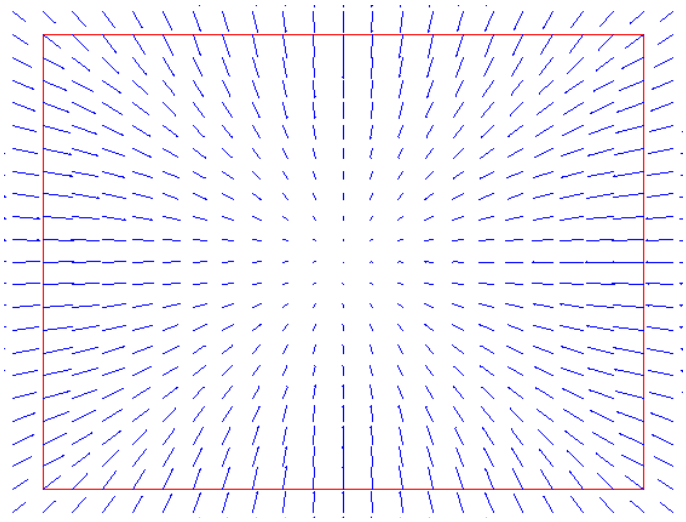
Obrázek 9 - Intergál pro prvek B_{ik}

Zeleně je zobrazena funkce Φ_j^i, modře je ohraničená plocha nad k-tou úsečkou z aproximace naši křivky Γ.

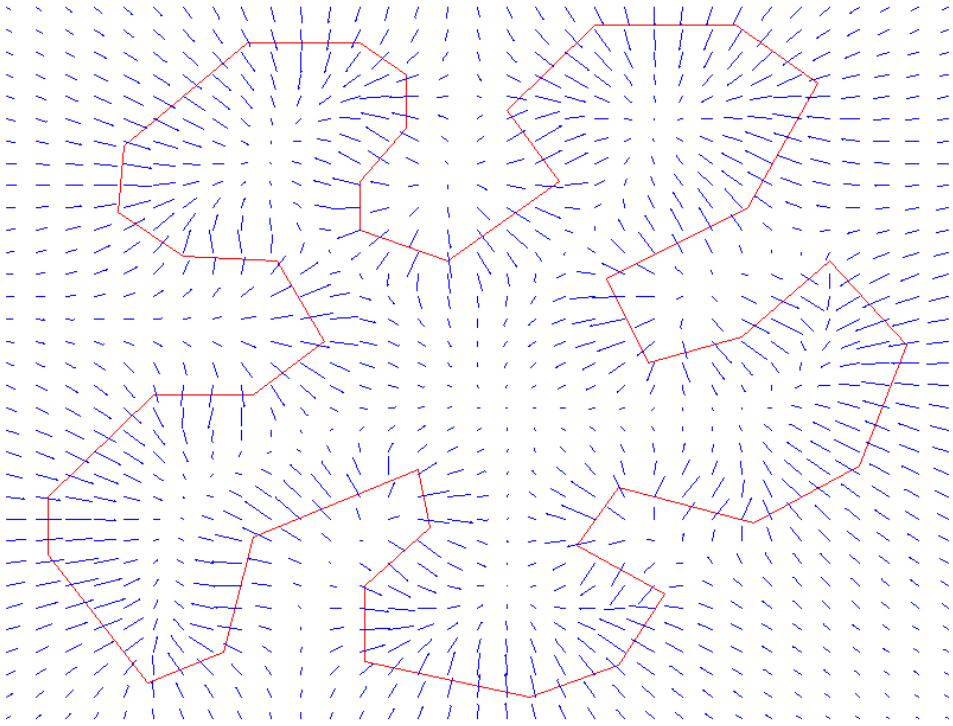
Výsledný vektor bude tedy mít rozměry 1x4.

4.6. Příklady oblastí

Zde uveďme dva příklady oblastí, na kterých jsme chtěli rozšířit funkci $\bar{F}(x_1, x_2)$. První je jednoduchý čtverec a druhá je již mnohem komplikovanější – obsahuje i konkávní úhly. Obrázky jsou větších rozměrů, ať jsou směry vektorů více čitelné.



Obrázek 10 - Vektorové pole MKP - př.1



Obrázek 11 - Vektorové pole MKP - př.2

Jak je vidět, tak vektorové pole, vzniklé pomocí MKP rozšířením normály mimo hranici Γ, odpovídá tomu, co bychom intuitivně očekávali.

4.7. Výhody a nevýhody MKP

V této kapitole se věnujme souhrnu vlastností MKP, které se projevily při řešení úlohy na výše uvedených křivkách.

Jako hlavní nevýhoda MKP je *časová náročnost*. Stručně řečeno výpočet trvá příliš dlouho. Dobu výpočtu nám negativně ovlivňuje počet uzlů, ve kterých funkci $\bar{F}(x_1, x_2)$ chceme počítat. Musíme ji počítat na celé oblasti Ω, což je v příliš mnoho bodech a docela zbytečné, jelikož nás zajímají pouze body blízko křivky Γ. Navíc počet takových bodů se s časem snižuje, jak se naše oblast bude zmenšovat.

Pokud bychom chtěli ještě přesnější aproximaci Ω, tak doba výpočtu opět několikanásobně stoupne, nehledě na paměťovou náročnost celé operace.

Naopak hlavní výhoda MKP v porovnání s kolokační MHP je její *přesnost*. Není zapotřebí mít až tak přesnou aproximaci Ω, abychom dosáhli i tak uspokojivých výsledků.

Jako další nevýhoda je fakt, že během výpočtu může docházet k tomu, že matice A se stává *singulární*.

Rozmysleme si nyní, na jakých maticích počítáme naši funkci $\bar{F}(x_1, x_2)$.

Nechť:

$$\text{Å} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix},$$

kde $A = \begin{pmatrix} A_{x_1} & 0 \\ 0 & A_{x_2} \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} B_{x_1} & 0 \\ 0 & B_{x_2} \end{pmatrix}$. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $\text{Å} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$. m reprezentuje počet úseček a n počet uzlů.

Platí, že $h(A) = n$, $h(B) = \min(m, n)$ a $h(\text{Å}) \leq n + m$. Pokud $m > n$, pak $h(B) = n$ a z toho plyne, že $h(\text{Å}) \leq 2n \leq n + m$. Čili matice Å je singulární.

Můžeme tedy dojít k nepřesným výsledkům, pokud je naše hranice rozdělena na příliš mnoho úseček. V praxi se tak ovšem děje až těsně před koncem našeho algoritmu a i tak dávají výpočty uspokojivá řešení.

Další výhodou MKP je určitě i to, že můžeme jednodušším způsobem generovat vrstevnice i směrem *ven od křivky* Γ. Stačí jen změnit znaménko u normály.

5. Rozšíření normály metodou hraničních prvků (MHP)

5.1. Metoda hraničních prvků

Cílem této části není popsat MHP, ale pouze ji hrubě nastínit. Obsah této kapitoly jsme čerpali z prezentace [2], proto pokud máme větší zájem pochopit danou problematiku, doporučujeme do ní nahlédnout.

Metoda hraničních prvků je další z metod, jak řešit parciální diferenciální rovnice. Obrovskou výhodou, je že nám stačí znát hodnoty funkce pouze na hranici sledované oblasti a pak za pomocí *harmonických* funkcí můžeme určit, jak se bude funkce chovat uvnitř oblasti.

Nejprve si nadefinujme *harmonickou* funkci. (Upozorňujeme, že značení uváděné v této kapitole nemusí odpovídat tomu z kapitoly o MKP.) Buď $\omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast a na ní mějme definovanou funkci $\bar{F}(\bar{x}) \in C^2(\omega)$, tzn. má spojité derivace až do druhého řádu. Funkci $\bar{F}(\bar{x})$ nazveme *harmonickou na* Ω, pokud platí:

$$\Delta\bar{F} = 0 \text{ (tzv. } \textit{Laplaceova} \text{ rovnice).}$$

Pro naši funkci $\bar{F}(\bar{x})$ definujme *elementární řešení Laplaceovy rovnice* $\Delta F = 0$. Bude jím funkce $v(\bar{x}, \bar{y})$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$v(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\|\bar{x} - \bar{y}\|}\right).$$

Za pomocí elementárního řešení Laplaceovy rovnice si ve větě o třech potenciálech vyjádříme, jak se naše funkce $\bar{F}(\bar{x})$ bude chovat uvnitř oblasti ω.

Věta o třech potenciálech:

Buď $\omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $v(\bar{x}, \bar{y})$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ elementárním řešením Laplaceovy rovnice a $\bar{F}(\bar{x}) \in C^2(\bar{\omega})$. Pak $\forall \bar{x} \in \omega$ platí:

$$\bar{F}(\bar{x}) = -\int_{\omega} \Delta\bar{F}(\bar{y}) v(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} + \int_{\partial\omega} v(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial\bar{F}}{\partial n}(\bar{y}) - \frac{\partial v}{\partial n_{\bar{y}}}(\bar{x}, \bar{y}) \bar{F}(\bar{y}) ds_{\bar{y}}.$$

Další potřebný pojem je tzv. *potenciál dvojvrstvy*. Je jím funkce:

$$w(\bar{x}) = \int_{\partial\omega} \sigma(\bar{y}) \frac{d}{dn_{\bar{y}}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\|\bar{x} - \bar{y}\|}\right)\right) ds_{\bar{y}}.$$

Funkci $\sigma(\bar{y})$ pak nazveme *hustota potenciálu dvojvrstvy*. Jeho velmi důležitou vlastností je, že:

$$\lim_{\bar{x} \to \partial\omega} w(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\sigma(\bar{x}) + \int_{\Gamma} \sigma(\bar{y}) \frac{d}{dn_{\bar{y}}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\|\bar{x} - \bar{y}\|}\right)\right) ds_{\bar{y}}.$$

Pokud $\sigma(\bar{y}) \in L^1(\partial\omega)$ a ω má dostatečně hladkou hranici, pak $w(\bar{x})$ je harmonickou funkcí na oblasti ω. Tohoto faktu se dá velmi dobře využít k výpočtu řešení naší původní úlohy (●).

Definujme tuto Dirichletovu úlohu (☼):

$$(☼)\begin{cases} -\Delta\bar{F}(\bar{x}) = 0, & \bar{x} \in \omega \\ \bar{F}(\bar{x}) = -\bar{n}(\bar{x}), & \bar{x} \in \Gamma, \qquad \Gamma := \partial\omega, \end{cases}$$

$\bar{n}(\bar{x})$ je směr vnější normály k Γ v bodě $\bar{x}$. Je snadné uvědomit si, že tato úloha je uvnitř oblasti ω ekvivalentní s úlohou (●).

Pak řešení budeme hledat ve tvaru:

$$\bar{F}(\bar{x}) = \begin{cases} \int_\Gamma \sigma(\bar{y}) \frac{d}{dn_{\bar{y}}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\|\bar{x}-\bar{y}\|}\right)\right) ds_{\bar{y}}, & \bar{x} \in \omega \\ -\bar{n}(\bar{x}), & \bar{x} \in \Gamma. \end{cases}$$

Půjde nám o to vyjádřit hodnotu hustoty potenciálu naší dvojvrstvy – $\sigma(\bar{y})$. Chceme, aby byl spojitý na hranici, což vede na:

$$-\bar{n}(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\sigma(\bar{x}) + \int_\Gamma \sigma(\bar{y}) \frac{d}{dn_{\bar{y}}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\|\bar{x}-\bar{y}\|}\right)\right) ds_{\bar{y}}.$$

Hledáme $\sigma(\bar{x}) \in L^1(\partial\omega)$:

$$-\frac{1}{2}\sigma(\bar{x}) + \int_\Gamma \sigma(\bar{y}) \frac{d}{dn_{\bar{y}}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\|\bar{x}-\bar{y}\|}\right)\right) ds_{\bar{y}} = -\bar{n}(\bar{x}) \quad \forall\bar{x} \in \Gamma$$

a všimneme si, že na levé straně je lineární operátor $A\sigma$, tedy vhodná diskretizace povede na soustavu lineárních rovnic.

5.2. Kolokace

V kolokaci si křivku Γ, reprezentující hranici oblasti ω, rozdělíme na menší úseky. Označíme si je postupně $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$. Budeme předpokládat, že ve všech bodech úseku Γ_i je hodnota $\sigma(\bar{x}) = \sigma_i \quad \forall\bar{x} \in \Gamma_i$.

A tím pádem:

$$\bar{F}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{l} \sigma_j \int_{\Gamma_j} \frac{d}{dn_{\bar{y}}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\|\bar{x}-\bar{y}\|}\right)\right) ds_{\bar{y}} \quad \forall\bar{x} \in \omega.$$

Soustavu, díky které nalezneme hodnoty σ_i můžeme přepsat do následujícího maticového schématu:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}I + K & \\ & -\frac{1}{2}I + K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_1 \\ -n_2 \end{pmatrix},$$

kde I je jednotková matice o rozměrech $l \times l$. n_{1i} první složka jednotkové normály k úseku Γ_i.

Pro prvky matice K platí (x_i je těžiště Γ_i):

$$K_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\mathrm{j}} \frac{d}{dn_{\bar{y}}} \left(\ln \left(\frac{1}{\|\bar{x}_i - \bar{y}\|} \right) \right) ds_{\bar{y}}, & i \neq j \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Pro $i = j$, je díky volbě tzv. kolokačního bodu v těžišti, je integrál roven nule ve smyslu *Cauchyho*:

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int\limits_{\Gamma_\mathrm{j} \setminus (\mathrm{x_j} - \varepsilon, x_j + \varepsilon)} \frac{d}{dn_{\bar{y}}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{\|\bar{x}_i - \bar{y}\|} \right) \right) ds_{\bar{y}} = 0.$$

Nyní přejděme ke konkrétnímu vyjádření prvků matice K. Důležitým faktem je, že potřebujeme, aby celá naše oblast ležela v jednotkové kružnici, jinak se může stát, že výsledná matice je singulární. Je proto třeba změnit měřítko naši oblasti ω.

Prvky K_{ij} vyjádříme:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\mathrm{j}} \frac{d}{dn_{\bar{y}}} \left(\ln \left(\frac{1}{\|\bar{x}_i - \bar{y}\|} \right) \right) ds_{\bar{y}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\mathrm{j}} \nabla_{\bar{y}} \ln \left(\frac{1}{\|\bar{x}_i - \bar{y}\|} \right) \cdot \bar{n}_j ds_{\bar{y}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\mathrm{j}} \frac{(\bar{x}_i - \bar{y}) \cdot n_j}{\|\bar{x}_i - \bar{y}\|^2} ds_{\bar{y}},$$

n_j je jednotková normála k úseku Γ_j.

Do integrálu provedeme substituci za $\bar{y} = \bar{x}_j - \left(\overline{x_{j+1}} - \bar{x}_j \right) t$, kde $\bar{x}_j$ je počáteční a $\overline{x_{j+1}}$ je koncový bod úseku Γ_j. Pak dostáváme:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\mathrm{j}} \frac{(\bar{x}_i - \bar{y}) \cdot \bar{n}_j}{\|\bar{x}_i - \bar{y}\|^2} ds_{\bar{y}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \frac{\left(\bar{x}_i - \bar{x}_j - \left(\overline{x_{j+1}} - \bar{x}_j \right) t \right) \cdot \bar{n}_j}{\left\| \bar{x}_i - \bar{x}_j - \left(\overline{x_{j+1}} - \bar{x}_j \right) t \right\|^2} \left\| \overline{x_{j+1}} - \bar{x}_j \right\| dt.$$

Integrál je opět příliš složitý na analytický výpočet, volíme proto pro jeho výpočet jako v případě MKP Gaussovu kvadraturu.

Označme

$$S_{ij}(t) = \frac{\left(\overline{x_i} - \overline{x_j} - \left(\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}\right)t\right) \cdot \overline{n_j}}{\left\|\overline{x_i} - \overline{x_j} - \left(\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}\right)t\right\|^2} \left\|\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}\right\|.$$

Pro K_{ij} bude platit:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{4} w_p \, S_{ij}(t_p).$$

Váhy w_p se rovnají postupně:

$$w_1 = \frac{18 + \sqrt{30}}{72} \quad w_2 = \frac{18 + \sqrt{30}}{72} \quad w_3 = \frac{18 - \sqrt{30}}{72} \quad w_4 = \frac{18 - \sqrt{30}}{72}$$

a pro kořeny t_p platí:

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}\right) \quad t_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}\right)$$

$$t_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}\right) \quad t_4 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}\right).$$

Ze znalosti matice *K*, pak spočítáme hodnoty σ_1 a σ_2, které pak použijeme k vyjádření hodnot funkce $F(\bar{x})$ v bodech uvnitř oblasti ω. Použijeme obdobný postup, jako při výpočtu prvků matice K.

$$\sigma_j = (\sigma_{1j}, \sigma_{2j}),$$

$$\bar{F}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{l} \sigma_j \int_0^1 \frac{\left(\bar{x} - \overline{x_j} - \left(\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}\right)t\right) \cdot \overline{n_j}}{\left\|\bar{x} - \overline{x_j} - \left(\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}\right)t\right\|^2} \left\|\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}\right\| dt.$$

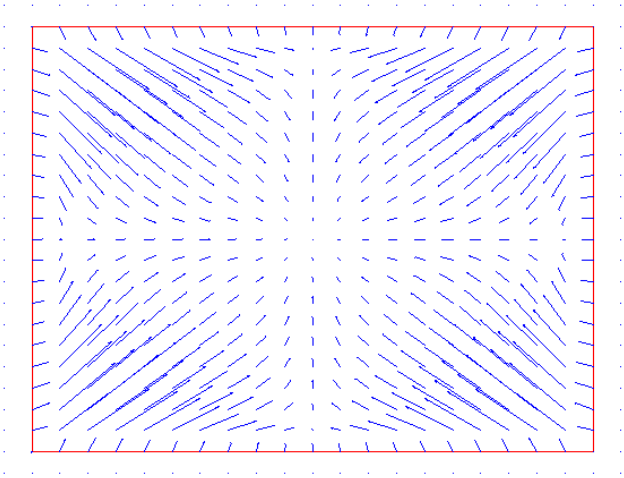
Opět aplikujeme Gaussovu kvadraturu se stejnými váhami a kořeny. Bude platit:

$$\widetilde{S_{ij}}(t) = \frac{\left(\bar{x} - \overline{x_j} - \left(\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}\right)t\right) \cdot \overline{n_j}}{\left\|\bar{x} - \overline{x_j} - \left(\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}\right)t\right\|^2} \left\|\overline{x_{j+1}} - \overline{x_j}\right\|,$$

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{l} \sigma_j \sum_{p=1}^{4} w_p \, \widetilde{S_{ij}}(t_p).$$

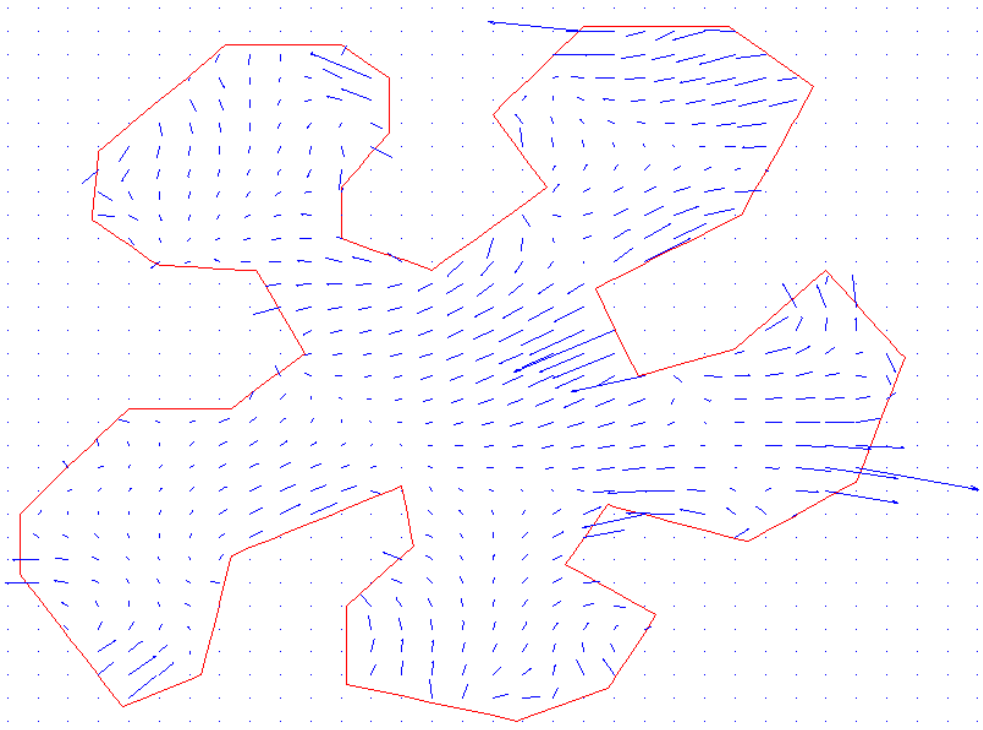
5.3. Příklady

Uveďme výsledky pro MHP s kolokací na stejných oblastech jako s MKP. Je na nich dobře vidět, jak moc kolokace ovlivňuje přesné řešení:



Obrázek 12 - Vektorové pole MHP - př.1

Hlavním problémem je, že porušujeme předpoklad hladkosti křivky Γ. V rozích nám tak vznikají nepřesnosti – vektory jsou větší, než bychom očekávali. Další problémy jsou více vidět na druhé oblasti, kde už není problémem pouze velikost vektorů, ale i jejich směr. Jakkoliv ovšem pole vypadá „děsivě“, tak výsledné vrstevnice, kterých dosáhneme s použitím kolokační MHP, jsou přesto uspokojivé.



Obrázek 13 - Vektorové pole MHP - př.2

5.4. Výhody a nevýhody kolokační MHP

Jasnou nevýhodou kolokační MHP je v porovnání s MKP její *nepřesnost*, která se vyskytuje na konkávních oblastech. Patrně je to dáno vlivem kolokace. Určitě by v budoucnu stálo za to zjistit, jak se bude MHP projevovat, pokud bychom křivku Γ rozdělili na ještě menší úseky. Při nejmenším aspoň v oblastech konkávních úhlů. Nyní jeden úsek totiž přibližně odpovídá jednomu čtverci diskretizace.

Naopak zřetelnou výhodou oproti MKP je její *rychlost*. Při průběhu MHP není totiž třeba počítat funkci $\bar{F}(\bar{x})$ v každém bodě naši diskretizace, ale vystačí nám pouze několik bodů, které jsou nejblíže naši hranici. V dalších bodech nás informace o funkci $\bar{F}(\bar{x})$ nezajímá, jelikož jsou příliš daleko a v dalším kroku výpočtu distantní funkce nebudou hrát žádnou roli.

Na oblastech, které neobsahují moc velké konkávní úhly, můžeme tedy dosáhnout podobně přesných výsledků jako za použití MKP, ovšem mnohem rychleji.

Jako poslední uveďme, že *není tak jednoduché otočit směr generace vrstevnic ven z oblasti* Ω. V MKP stačilo pouze změnit znaménko normály, u MHP je ovšem třeba počítat jiné rovnice. Pokud bychom chtěli jít ven z oblasti, tak bychom museli naprogramovat výpočet MHP znova.

6. Generace sítí level-set metodami

6.1. Algoritmus výpočtu

Uveďme, jak přesně probíhá výpočet v jednotlivých iteracích, abychom dostali hledané vrstevnice.

Počáteční čas buď $t_0 = 0$, pro $i > 0$: $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

V čase t_i učiníme tyto kroky:

1. Spočítáme distantní funkci $\varphi(t_i, \bar{x})$ pro všechny body naši diskretizace.
$$\varphi(t_i, \bar{x}) = \varphi(t_{i-1}, \bar{x}) - \Delta t \cdot \bar{F}(t_{i-1}, \bar{x}) \cdot \nabla\varphi(t_{i-1}, \bar{x}) + \Delta t \cdot \varepsilon\Delta\varphi(t, \bar{x})$$
2. Přepočítáme hranici $\Gamma(t_i)$. Tvoří ji body, které splňují $\varphi(t_i, \bar{x}) = 0$
   Tento krok sice není až tak triviální, ovšem obsahuje řadu technických detailů, tak jsme se rozhodli jej v práci dále nerozepisovat.
3. Uložíme si hranici.
4. Rozšíříme $\bar{F}(t_i, \bar{x})$ z $\Gamma(t_i)$ na Ω. Buď pomocí MKP, nebo MHP.

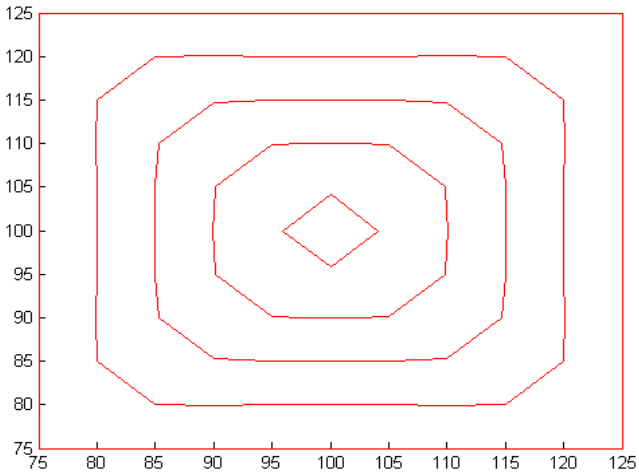
Kroky 1 až 4 provádíme tak dlouho, dokud stále existují body, ve kterých platí $\varphi(t_i, \bar{x}) = 0$.

6.2. Numerické experimenty

6.2.1. MKP

V této kapitole uvedeme příklad několika oblastí, které jsme nechali vyvíjet za pomocí MKP. $\Omega \coloneqq \langle 0{,}0\rangle \times \langle 200{,}200\rangle$ a krok diskretizace je 5.

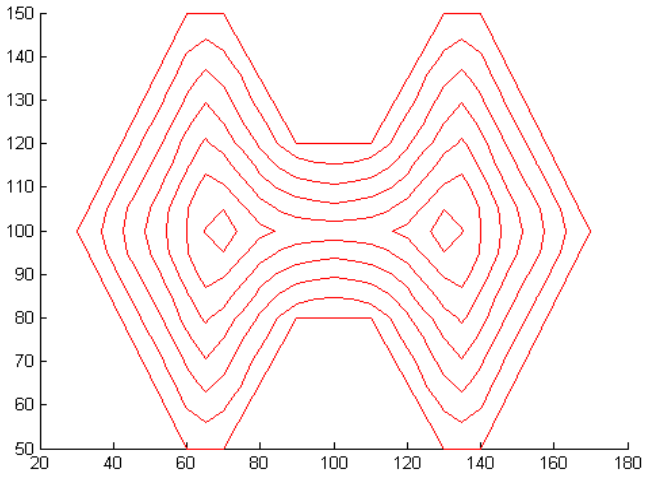
Jako první máme jednoduchý čtverec.



Obrázek 14 - MKP Čtverec

Je vidět, že na této oblasti nejsou žádné problémy a vrstevnice odpovídají předpokládanému výsledku. Větší změny v rozích jednotlivých vrstevnic, kdy bychom mohli očekávat trošku větší zakulacení, jsou dány krokem diskretizace naši sítě.

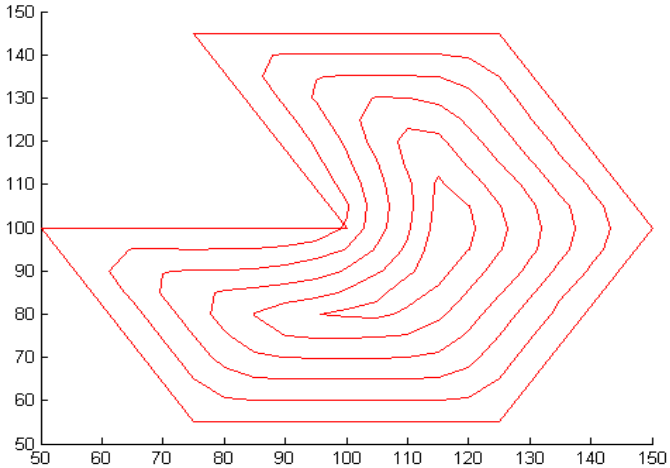
Další křivkou bude „osmička“. Vybrali jsme ji kvůli několika konkávním úhlům také kvůli tomu, že se vrstevnice v průběhu algoritmu musí rozdělit.



Obrázek 15 - MKP Osmička

Opět docházíme k relativně pěkným a očekávaným vrstevnicím. V konkávních úhlech je ovšem vidět, že se první vrstevnice více přibližuje původní zadané křivce, respektive se od ní málo vzdálila. Rozdělení vrstevnic na více proběhlo v pořádku.

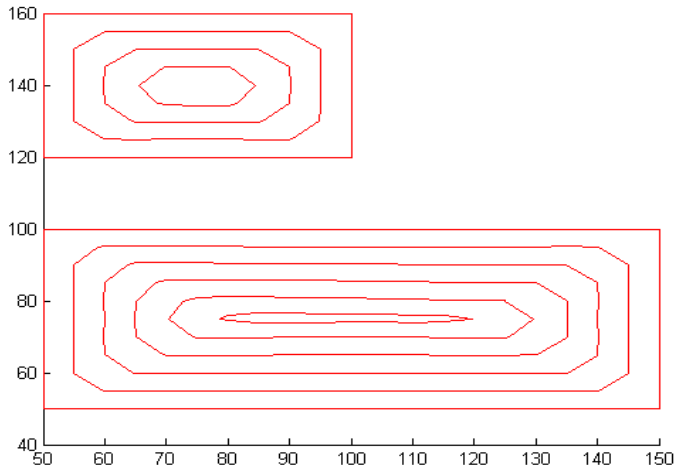
Další test provedeme na křivce, která odpovídá šestiúhelníku, ze kterého jakoby vykousneme jeden trojúhelník. Křivku jsme vybrali proto, že obsahuje konkávní úhel větší než 270°.



Obrázek 16 - MKP Konkávní oblast

V konkávním úhlu už vidíme, že naše vrstevnice překračují původně zadanou křivku. Je to dáno příliš velkým krokem diskretizace sítě, kde úhel je pouze na jednom čtverci naší diskretizace. Tento úhel pak na čtverci aproximujeme pouze jednou úsečkou a ne dvěma, čímž dochází ke zkreslení.

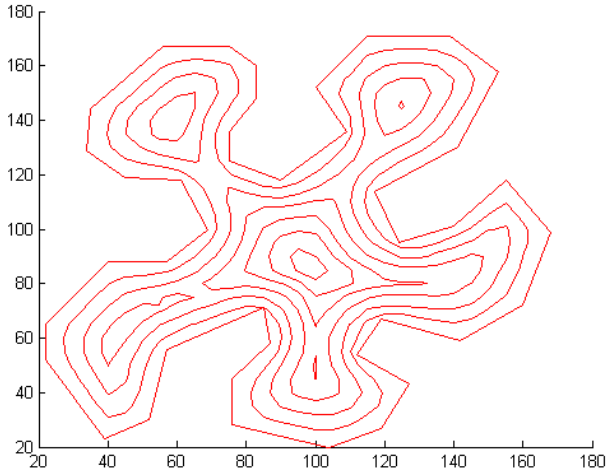
Další zkoušenou křivkou budou dva obdélníky položené nad sebou. Otestujeme, jak se algoritmus zachová na nesouvislé křivce Γ.



Obrázek 17 - MKP Dva Obdélníky

Je vidět, že našemu algoritmu ani nesouvislá oblast nedělá velké potíže a výsledky odpovídají našemu očekávání.

Jako poslední testovací oblast budeme mít jakousi „skvrnu“. Jde o docela komplikovanou křivku, která kombinuje všechna úskalí zmiňovaná v předešlých případech. Chtěli jsme vidět, do jaké míry zůstane naše řešení stabilní.

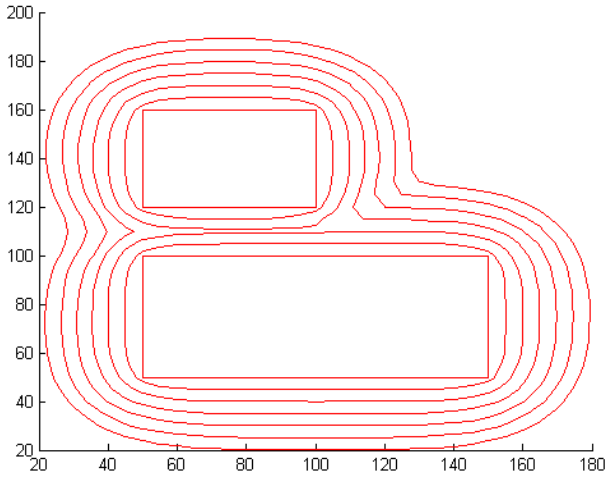


Obrázek 18 - MKP Skvrna

Je dobře vidět, že i tady MKP dává uspokojivé řešení. V konkávních úhlech naše první vrstevnice opět překříží původní křivku, ale nejedná se o příliš velké překřížení.

V levém dolním rohu je vidět jakýsi zub na třetí vrstevnici. Není to ale vina MKP. Může za to algoritmus, který tvoří jednotlivé vrstevnice. Jeho součástí je ochrana proti příliš krátkým úsečkám, které by se mohly vyskytovat na jednom čtverci sítě. Pokud by taková úsečka existovala, tak ji zanedbá a „přesune“ do rohu čtverce. Pravděpodobně k tomu došlo v tomto případě.

Jako bonus uvedeme znovu naši křivku se dvěma obdélníky. Tentokrát budeme vrstevnice rozšiřovat směrem ven. Budeme chtít vidět, jestli se vrstevnice spojí tak, jak bychom intuitivně očekávali. Tato úloha sice není součástí původního zadání, ale MKP ji i tak zvládne.



Obrázek 19 - MKP Dva obdélníky směrem ven

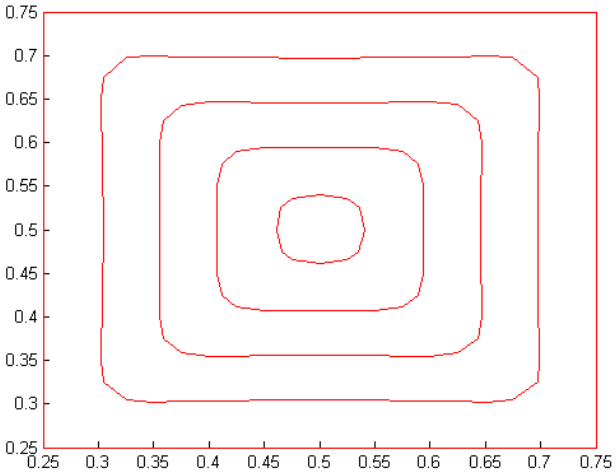
I zde jsou výsledky podle našeho očekávání. Určité nebezpečí vzniká kolem rohů jednotlivých obdélníků. Vrstevnice zde nejsou příliš daleko od původní křivky. Další nebezpečí vzniká v momentě, kdy se k sobě vrstevnice natolik přiblíží, že by se a v dalším kroku měly spojit. Sice se nepřekříží, ale můžou se k sobě dostat příliš blízko, v takovýchto místech pak trojúhelníková síť může obsahovat příliš tupoúhlých trojúhelníků. Tomu se samozřejmě chceme vyhnout.

Na tomto obrázku to sice není znázorněno, ale pokud se naše vrstevnice dostanou příliš blízko k hranici Ω, tak už nejsou hladké. Na okrajích Ω tedy není algoritmus stabilní.

6.2.2. MHP

Opět uvedeme příklady několika oblastí, na kterých jsme naši metodu testovali. Oblasti a krok diskretizace jsou stejné jako v případě MKP, ovšem počítáme s jiným měřítkem.

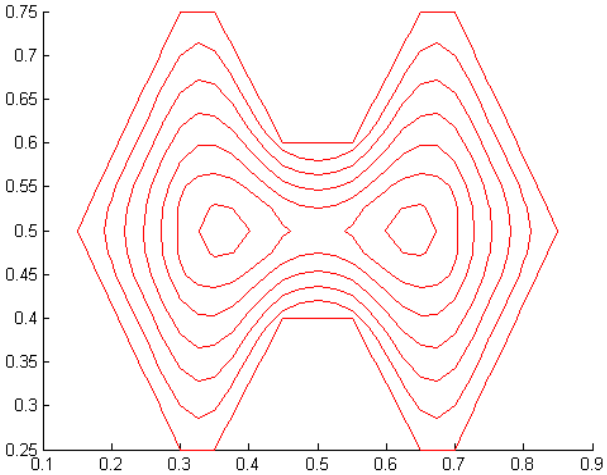
Podívejme se nejdříve opět na čtverec:



Obrázek 20 - MHP Čtverec

Vrstevnice opět vypadají tak, jak bychom intuitivně očekávali. Vzdálenosti jednotlivých vrstevnic jsou také přibližně stejné. Ovšem oproti MKP jsou jejich tvary více zaoblené.

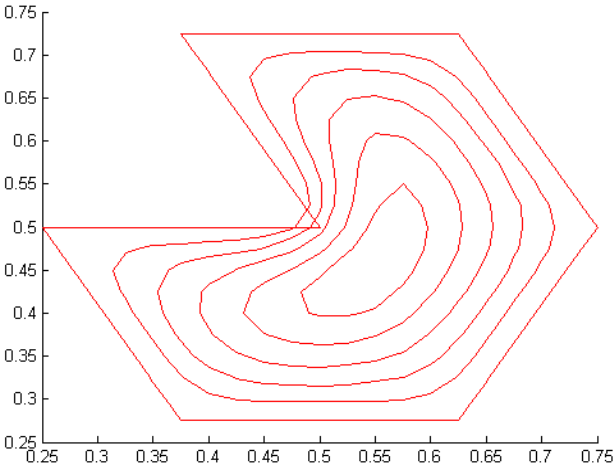
Jako další uveďme naši „osmičku“:



Obrázek 21 - MHP Osmička

Opět je výsledek v podstatě podobný tomu, kterého jsme dosáhli za pomocí MKP s tím rozdílem, že jednotlivé vrstevnice jsou více zakulacené. První vrstevnice u konkávních úhlů jsou blíže hranici ω, než je tomu u MKP.

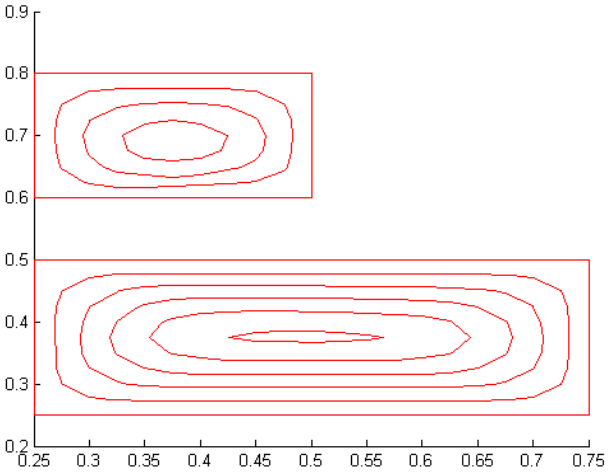
Nyní k oblasti s konkávním úhlem větším než 270°:



Obrázek 22 - MHP Konkávní oblast

Jak je vidět, tak tady má kolokační MHP první vážnější nedostatky – hned několik prvních vrstevnic překřižuje hranici původně zadané oblasti ω. V oblasti konkávních úhlů se stává, že funkce $\bar{F}(\bar{x})$ může mít i opačný směr, než bychom očekávali. Zkoušeli jsme zmenšit krok diskretizace, ale problém se ještě zvětšil. Na těchto konkávních oblastech tedy je z důvodu přesnosti vhodnější používat MKP.

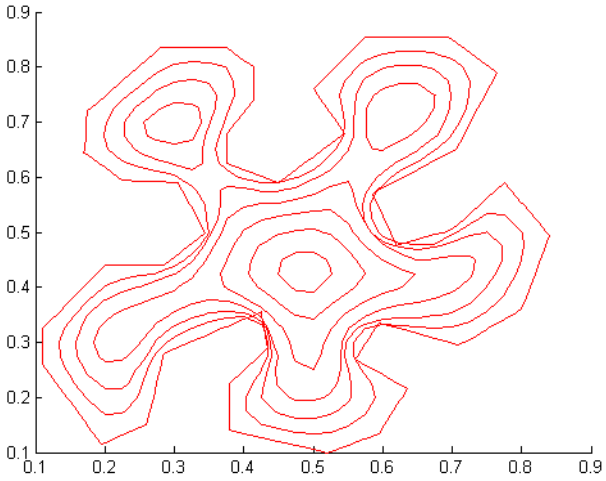
Další oblastí v pořadí jsou dva obdélníky nad sebou:



Obrázek 23 - MHP Dva obdélníky

Tady nejsou vidět žádné problémy. Oba obdélníky jsou totiž pěkné konvexní oblasti. Očividně nesouvislost hranice ω ani MHP nijak nevadí.

Poslední a zároveň nejtěžší test MHP – naše skvrna:



Obrázek 24 - MHP Skvrna

Tady se již hodně zřetelně projevují nevýhody kolokační MHP. V konkávních oblastech v porovnání s MKP jsou vrstevnice příliš blízko u sebe a častěji překračují původní hranici oblasti ω. To je určitě nežádoucí, jelikož výsledná trojúhelníková síť bude příliš deformovaná a trojúhelníky se nebudou moc podobat rovnostranným.

7. Závěr

Podařilo se nám naimplementovat algoritmus, který za pomocí metody level-setů provádí evoluci oblasti, reprezentované její hranicí, ve vektorovém poli. Naše pole působilo ve směru vnitřní normály dovnitř oblasti.

Pole bylo původně zadáno pouze na hranici oblasti, pomocí MKP a MHP jsme jej rozšířili i mimo hranici. Na příkladu pěti oblastí jsme mohli pozorovat, do jaké míry volba jednotlivých metod ovlivní výsledné řešení.

Pro MKP hovoří její přesnost i na nepěkných oblastech, zatímco kolokační MHP se velmi těžko vyrovnávala s konvexními oblastmi. Vzdálenosti mezi jednotlivými vrstevnicemi, pak neodpovídaly našemu očekávání. Zkoušeli jsme tento problém odstranit použitím menšího diskretizačního kroku na oblast Ω, ale nevedlo to k lepším výsledkům, ba právě naopak.

Jiným přístupem, jak tento problém v budoucnu řešit, by mohlo být nahrazení oblasti v místech, kde porušena hladkost, jemnější aproximaci. Patrně by to mohlo vést k přesnějším řešením, ovšem nedostatky MHP nejspíš zůstanou, jelikož stále bude porušena „hladkost hranice“.

Pokud ovšem chceme rychlé řešení a naše oblasti nejsou konkávní, pak je vhodné použít MHP. Rychlost výpočtu je několika násobně rychlejší a paměťové nároky jsou rovněž menší, jelikož během výpočtu počítáme menší matice.

8. Reference

[1] J. Bouchala – Variační metody, slabá řešení lineárních eliptických úloh, 2001
http://www.am.vsb.cz/bouchala/VM/vm.html

[2] J. Bouchala – Úvod do „Boundary element methods“, 2007
http://www.am.vsb.cz/bouchala/archiv/Bouchala_BEM.pdf

[3] D. Braess – Finite elements, Cambridge University Press, 2001

[4] A. Kaw, Ch. Barker – Gauss Quadrature Rule of Integration, 2009
http://numericalmethods.eng.usf.edu/mws/gen/07int/mws_gen_int_ppt_gaussquadrature.ppt

[5] S. Osher, R. Fedkiw – Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces, Springer, 2002

[6] J.A. Sethian – Level Set Methods and Fast Marching Methods, Cambridge University Press, 1999

9. Seznam příloh

CD s elektronickou verzí práce a implementací generátoru v Matlabu