

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Metoda konečných prvků pro Helmholtzovu rovnici

Diplomová práce

2009

Martin Kramář

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 4. května 2009

.....

Na tomto místě bych rád poděkoval Ing. Daliborovu Lukášovi, Ph.D. za odbornou pomoc a veškerý čas, který mi věnoval při psaní této práce. Dále bych rád poděkoval svým rodičům za veškerou pomoc při dokončování práce.

Abstrakt

Motivací této práce je řešení úloh akustiky ve 2D prostoru na neomezené oblasti. Problémy akustiky jsou popsány Helmholtzovou rovnicí, kterou v této práci odvodíme. K řešení úloh použijeme metodu konečných prvků a ukážeme postup při sestavování matic tuhosti a hmotnosti. Dále nastíníme odvození PML-vrstvy a pomocí ní budeme modelovat hraniční podmínku pro neomezenou oblast. V závěru práce budeme demonstrovat výsledky metody konečných prvků na vzorových příkladech.

Klíčová slova: akustika, Helmholtzova rovnice, PML vrstva, metoda konečných prvků

Abstract

The motivation of this thesis is solving acoustic problems in two dimensional unbounded acoustic domain. We will derive Helmholtz equation which describes wave propagation in space. We will use the Finite element method for solving acoustic problems. In this thesis, we will show how to compute stiffness and mass matrices. We will show construction of Perfectly matched layer which replaces boundary condition for unbounded domains. At the conclusion we will illustrate the Finite element method on examples.

Keywords: Acoustic, Helmholtz Equation, Perfectly Matched Layer, Finite Element Method

Seznam použitých zkratk a symbolů

PML	–	Perfectly Matched Layer
MKP	–	Metoda konečných prvků
FEM	–	Finite Element Method
x	–	skalární proměnná
\mathbf{x}	–	vektorová proměnná
$f(x)$	–	skalární funkce
$\mathbf{f}(x)$	–	vektorová funkce
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	–	vektorová funkce

Obsah

1	Úvod	3
2	Fyzikální podstata Helmholtzovy rovnice	4
2.1	Akustické vlny	4
2.2	Odvození Helmholtzovy rovnice	7
2.3	Sommerfeldova radiační podmínka	8
3	Metoda konečných prvků	9
3.1	3D úloha vlastních čísel s rotační symetrií	9
3.2	MKP - diskretizace	11
3.3	Diskretizace oblasti Ω	13
3.4	Volba báze funkcí	14
3.5	Výpočet matice tuhosti	14
3.6	Výpočet matice hmotnosti	17
3.7	Výpočet vektoru pravé strany \bar{b}	18
4	Úloha s neomezenou hranicí - aplikace PML vrstvy	20
4.1	Popis PML-vrstvy	20
4.2	Úloha s PML-vrstvou	25
4.3	Variační formulace	26
5	Numerické příklady	27
5.1	Úloha s 3D rotační symetrií	28
5.2	Šíření zvuku z bodového zdroje	30
5.3	Šíření zvuku kolem překážky	34
6	Závěr	38
7	Literatura	39

Seznam obrázků

2.1	Jednotkový objemový element.	5
3.1	Válcová oblast Ω	10
3.2	Diskretizace oblasti Ω s krokem k	13
3.3	Nenulové hodnoty bázové funkce ϕ_i na příslušných elementech.	14
3.4	Bázová funkce ϕ_i	15
3.5	Přechod na referenční trojúhelník T_{ref}	15
4.1	Výpočetní oblast Ω obalená PML - vrstvou.	21
4.2	Tlumené pokračování řešení.	21
5.1	Výpočetní oblast Ω	28
5.2	Výsledek pro 1. vlastní číslo.	29
5.3	Výsledek pro 4. vlastní číslo.	29
5.4	Výsledek pro 32. vlastní číslo.	30
5.5	Bodový zdroj umístěný v oblasti Ω	31
5.6	Šíření zvuku na volném prostranství z bodového zdroje.	32
5.7	Barevná mapa. Šíření zvuku na volném prostranství z bodového zdroje.	32
5.8	Šíření zvuku bez PML - vrstvy.	33
5.9	Barevná mapa. Šíření zvuku bez PML - vrstvy.	33
5.10	Bodový zdroj a překážka-	34
5.11	Šíření zvuku kolem tenké překážky.	35
5.12	Barevná mapa. Šíření zvuku kolem tenké překážky.	36
5.13	Šíření zvuku kolem tlusté překážky.	36
5.14	Barevná mapa. Šíření zvuku kolem tlusté překážky.	37

1 Úvod

Tato diplomová práce svým obsahem navazuje na mou bakalářskou práci - Akustika flétny [3]. V této práci se budu zabývat úlohami akustiky, které jsou řízeny Helmholtzovými rovnicemi. Úlohy akustiky mohou najít uplatnění v celé řadě oblastí. Jednou velkou oblastí aplikací je hudba, kde můžeme pomocí řešení úloh akustiky optimalizovat tvarové návrhy místnosti nebo koncertních hal. Další aplikací v oblasti hudby může být návrh materiálů na výrobu hudebních nástrojů. Jinou oblastí, kde se můžeme setkat s úlohami akustiky, je průmysl, kde můžeme modelovat hluk různých zařízení, šíření hluku v nejbližším okolí a navrhnout protihluková opatření. Další oblast aplikace úloh akustiky je medicína, kde se můžeme například setkat s inverzní úlohou akustiky, kdy se snažíme rekonstruovat objekt od kterého se odráží zvukové vlny. Na tomto principu pracuje například ultrazvuk.

Většina těchto úloh se odehrává na neomezených oblastech, kde se musíme vypořádat s problémem okrajových podmínek. V reálném světě dochází k postupnému tlumení zvukových vln a v matematických modelech nám toto zaručuje Sommerfeldova radiační podmínka. Protože numerické řešiče nemůžou řešit úlohy na neomezených oblastech, musíme výpočetní oblast v nějakém místě „useknout“ a něčím nahradit Sommerfeldovu podmínku. V této práci jsem zvolil pro řešení úloh akustiky metodu konečných prvků a Sommerfeldovu radiační podmínku nahrazuji PML - vrstvou (*Perfectly matched layer*). Dále se v této práci pokusím na několika vzorových úlohách demonstrovat požití metody konečných prvků a PML - vrstvy v úlohách akustiky.

Diplomová práce má následující strukturu. V kapitole dvě ukážeme fyzikální model akustiky a odvození Helmholtzovy rovnice. V kapitole tři popíšeme metodu konečných prvků pro rovnice akustiky a ukážeme způsob výpočtu matic tuhosti a hmotnosti. V kapitole čtyři popíšeme PML - vrstvu a naznačíme odvození potřebné transformace souřadnic. V kapitole pět demonstrováme použití metody konečných prvků na ukázkových příkladech.

2 Fyzikální podstata Helmholtzovy rovnice

V této kapitole ukážeme matematicko-fyzikální odvození akustických rovnic [1], popíšeme odvození Helmholtzovy rovnice pro dvojrozměrný případ a ukážeme vliv Sommerfeldovy radiační podmínky.

Poznamenejme, že budeme uvažovat časově-harmonické vlnění, to znamená, že všechny vlny mají v čase neměnnou frekvenci ω . Dále budeme v celém textu předpokládat, že skalární pole $F(\mathbf{x}, t)$ můžeme separovat

$$F(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (2.1)$$

kde f je stacionární funkce.

2.1 Akustické vlny

Akustické vlny, nebo-li zvuk, jsou malé oscilace tlaku $P(\mathbf{x}, t)$ v akustickém médiu. Za akustické médium považujeme ideální stlačitelnou tekutinu. Tyto oscilace se vzájemně ovlivňují a jejich energie se přenáší akustickým médiem. Matematický popis oscilací a šíření energie můžeme získat ze zákona zachování hmoty, Newtonova pohybového zákona a lineárního materiálového zákona.

Lineární konstitutivní (materiálový) zákon

Předpokládejme, že máme rovnovážný hydrostatický tlak $P_0 = f(\rho_0)$, který je funkcí hustoty. Malou změnu tlaku P od rovnovážného stavu P_0 můžeme zapsat pomocí odpovídající malé změny hustoty ρ

$$P + P_0 = f(\rho_0 + \rho) \approx f(\rho_0) + f'(\rho_0)\rho,$$

po úpravě dostaneme vztah popisující změnu tlaku v závislosti na změně hustoty

$$P(\mathbf{x}, t) = c^2\rho(\mathbf{x}, t), \quad (2.2)$$

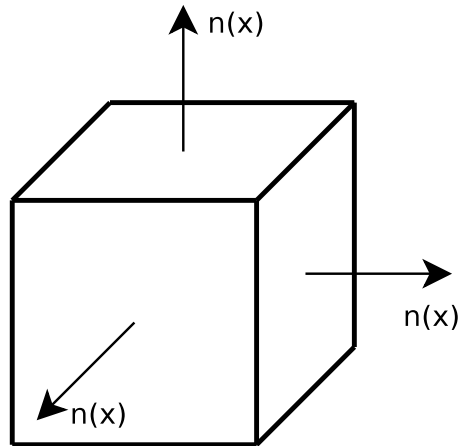
kde $c^2 = f'(\rho_0)$ je rychlost šíření vlny.

Zákon zachování hmoty

Uvažujme tok hmoty o tlaku $P_c(\mathbf{x}, t)$, hustoty $\rho_c(\mathbf{x}, t)$ a rychlosti $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, kde $P_c(\mathbf{x}, t) = P_0 + P(\mathbf{x}, t)$ a $\rho_c(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho(\mathbf{x}, t)$. Necht' máme objemový element V s povrchem ∂V a necht' $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \in \partial V$ je jednotkový normálový vektor směřující ven z elementu V , viz obrázek 2.1. Potom $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ je rychlost jednotkového toku povrchem ∂V .

Zákon zachování hmoty na jednotkovém časovém intervalu je vyjádřen vztahem

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_c dV = \oint_{\partial V} \rho_c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (2.3)$$



Obrázek 2.1: Jednotkový objemový element.

Plošný integrál na pravé straně rovnice můžeme upravit pomocí Gaussovy věty

$$\oint_{\partial V} \rho_c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \operatorname{div}(\rho_c \mathbf{v}) dV. \quad (2.4)$$

Dosazením vztahu (2.4) do zákona zachování hmoty (2.3) dostaneme rovnici

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_c \mathbf{v}) \right) dV = 0,$$

která vede na diferenciální rovnici

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_c \mathbf{v}) = 0. \quad (2.5)$$

Newtonův pohybový zákon

Předpokládejme, že objemový element V je vystaven působení hydrostatického tlaku $P_c(\mathbf{x}, t)$. Celková síla působící na povrch elementu ∂V je potom $\mathbf{F} = - \oint P_c \mathbf{n} dS$, kde \mathbf{n} označuje jednotkový normálový vektor směřující ven z elementu V . Aplikací druhého Newtonova zákona $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ dostaneme

$$- \oint_{\partial V} P_c \mathbf{n} dS = \int_V \rho_c \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV. \quad (2.6)$$

Totální diferenciál na pravé straně rovnice můžeme nahradit výrazem $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ (viz poznámka 2.1). Dále z Gaussovy věty dostaneme

$$- \oint_{\partial V} P_c \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla P_c dV, \quad (2.7)$$

kde $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ je nabla operátor, který označuje gradient v kartezských souřadnicích. Dosazením (2.7) do rovnice pohybu (2.6) dostaneme výraz

$$\int_V \rho_c \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV = - \int_V \nabla P_c dV,$$

který vede na diferenciální rovnici

$$\rho_c \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P_c. \quad (2.8)$$

Poznámka 2.1 Totální diferenciál můžeme rozepsat

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1 \partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1 \partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_1 \partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2 \partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2 \partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2 \partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3 \partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_3 \partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_3 \partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

po dosazení $v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t}$, $v_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t}$ a $v_3 = \frac{\partial x_3}{\partial t}$ do (2.9) můžeme psát

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{v} \cdot \nabla) + \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ v_2(\mathbf{v} \cdot \nabla) + \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ v_3(\mathbf{v} \cdot \nabla) + \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

Nahrazením $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ zanedbáváme člen $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, toto zanedbání si můžeme dovolit za předpokladu malých oscilací tlaku [1].

Vlnová rovnice

K odvození vlnové rovnice vyjdeme ze vztahu (2.2) popisující změnu tlaku v závislosti na změně hustoty. Tento vztah dvakrát derivujeme podle času dostaneme

$$\frac{\partial^2 \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Za předpokladu, že $\rho \ll \rho_0$, můžeme rovnici (2.5) přepsat do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho) = -\text{div}(\rho_0 \mathbf{v})$$

a po úpravě dostaneme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \text{div}(\mathbf{v}). \quad (2.11)$$

Nyní můžeme rovnici (2.11) derivovat podle času a dostaneme

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\rho_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right). \quad (2.12)$$

Dosazením (2.12) do (2.10) dostáváme

$$\frac{\partial^2 P_c}{\partial t^2} = -\rho_0 c^2 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right). \quad (2.13)$$

Předpokládáme-li, že $\rho \ll \rho_0$, můžeme rovnici (2.8) upravit do tvaru

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla(P_0 + P) = -\nabla P. \quad (2.14)$$

Aplikujeme-li na rovnici (2.14) operátor divergence, dostáváme

$$\rho_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = -\operatorname{div} \nabla P. \quad (2.15)$$

Dosazením (2.15) do pravé strany rovnice (2.13) dostáváme vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 P_c(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = c^2 \operatorname{div}(\nabla P(\mathbf{x}, t)),$$

kterou můžeme pomocí úprav $\frac{\partial^2 P_c}{\partial t^2} = \frac{\partial^2(P_0+P)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ a $\operatorname{div} \nabla P = \Delta P$ přepsat do klasického tvaru

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0. \quad (2.16)$$

Poznamenejme, že symbolem $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ rozumíme součet druhých parciálních derivací podle všech souřadných os, tzn. $\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$.

2.2 Odvození Helmholtzovy rovnice

K odvození Helmholtzovy rovnice využijeme předpokladu, že máme časově-harmonické skalární pole (2.1). Řešení vlnové rovnice (2.16) potom můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$P(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \{ p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \}. \quad (2.17)$$

Derivujeme-li řešení vlnové rovnice (2.17) dvakrát podle času, dostaneme

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -i\omega p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

a

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} = -\omega^2 p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}. \quad (2.18)$$

Nyní na řešení vlnové rovnice (2.17) aplikujeme Laplaceův operátor Δ a dostaneme

$$\Delta P = \Delta p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}. \quad (2.19)$$

Dosadíme-li do vlnové rovnice (2.16) vztahy (2.18) a (2.19) dostaneme rovnici

$$c^2 \Delta p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} + \omega^2 p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} = 0,$$

která vede na Helmholtzovu rovnici

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (2.20)$$

kde $k = \frac{\omega}{c}$ je vlnové číslo, které odpovídá počtu vln na intervalu 2π .

2.3 Sommerfeldova radiační podmínka

Budeme-li uvažovat úlohu na neohraničené oblasti, budeme požadovat, aby hodnota řešení v nekonečnu byla nulová a tím bylo zabráněno zpětným odrazům vln. Toto můžeme zajistit Sommerfeldovou radiační podmínkou, viz [1].

Sommerfeldovu radiační podmínku můžeme zapsat ve tvaru

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r} \left| \frac{\partial p}{\partial n} - ikp \right|^2 dS = 0. \quad (2.21)$$

3 Metoda konečných prvků

V této kapitole ukážeme souvislost mezi Helmholtzovou rovnicí a úlohou vlastních čísel, popíšeme základní myšlenku metody konečných prvků (dále jen MKP), ukážeme jak diskretizovat výpočetní oblast a jak zvolit bázi tohoto prostoru. Dále popíšeme způsob výpočtu matic tuhosti a hmotnosti vzhledem ke zvolené bázi.

3.1 3D úloha vlastních čísel s rotační symetrií

Mějme válec o poloměru R a délky l , viz obrázek 3.1. Předpokládejme, že se válcem šíří zvuk, který můžeme popsat Helmholtzovou rovnicí (2.20). Úloha nalézt vlastní čísla odpovídá úloze najít vlnová čísla k odpovídajícímu homogennímu řešení Helmholtzovy rovnice.

Úlohu na nalezení vlastních čísel můžeme zformulovat takto

$$-\Delta p(\mathbf{x}) = \lambda p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.1a)$$

$$p(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3.1b)$$

kde Ω je válcovitá oblast, viz obrázek 3.1. Označíme-li si průřez válcem jako oblast ω , můžeme tuto oblast definovat

$$\omega = \{r \cos t, r \sin t\}, \quad r \in \langle 0, R \rangle, t \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Předpokládáme-li, že řešení bude symetrické kolem osy z , můžeme řešení hledat ve tvaru

$$p(x, y, z) = \bar{p}(r, z), \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

Variační formulaci úlohy (3.1) získáme, přenásobíme-li rovnici (3.1a) funkcí $v(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$ a integrujeme-li přes oblast Ω

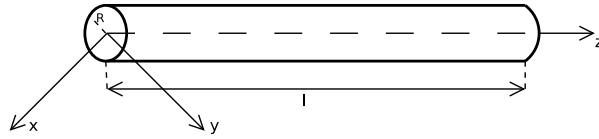
$$\int_{\Omega} -\Delta p(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Upravíme-li is levou stranu rovnice (3.2) pomocí Greenovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta p v \, dV &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} v \, dV + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} v \, dV + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} v \, dV = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} v \, \mathbf{n} \, dS \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \, dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial y} v \, \mathbf{n} \, dS \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \, dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial z} v \, \mathbf{n} \, dS. \end{aligned}$$

Protože $v(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, budou integrály přes hranici $\partial\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} v \, \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot 0 \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

Obrázek 3.1: Válcová oblast Ω .

a proto můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta p v \, dV &= \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dV + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \, dV + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \, dV = \\ &= \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v \, dV. \end{aligned}$$

Potom můžeme rovnici (3.2) přepsat do tvaru

$$\int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.3)$$

Levou stranu rovnice (3.3) můžeme upravit pomocí věty o substituci pro vícerozměrný integrál a dostaneme

$$\int_{\Omega} \nabla p(x, y, z) \cdot \nabla v(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{\omega} \int_0^l \nabla \bar{p}(x(r, t), y(r, t), z) \cdot \nabla \bar{v}(x(r, t), y(r, t), z) |J(\Phi)| \, dz dt dr,$$

kde $J(\Phi)$ je Jakobián funkce Φ . Funkce Φ vyjadřuje přechod z polárního systému souřadnic do kartézského a je definována

$$\Phi(r, t) = (\phi_1(r, t), \phi_2(r, t)) = (r \cos t, r \sin t).$$

Jakobián funkce Φ potom bude

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix} = r.$$

Jestliže $p(x, y, z) = \bar{p}(r, z)$, tak můžeme levou stranu rovnice přepsat (3.3) přepsat do tvaru

$$\int_{\Omega} \nabla p(x, y, z) \cdot \nabla v(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{\omega} \int_0^l \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) r \, dz dt dr$$

a protože platí

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{(x^2 + y^2)}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{x}{r},$$

a protože $x = r \cos t$, tak

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos t.$$

Obdobně pro $\frac{\partial r}{\partial y}$ platí, že

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin t.$$

Nyní můžeme výraz

$$\int_{\omega} \int_0^l \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) r \, dz dt dr,$$

přepsat do tvaru

$$\int_{\omega} \int_0^l \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \cos t, \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \sin t, \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \cos t, \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \sin t, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) r \, dz dt dr$$

a ten upravit

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r^2} \cos^2 t + \frac{\partial \bar{p}}{\partial r^2} \sin^2 t + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z^2} \right) r \, dt dr dz = \\ & = \int_0^l \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r^2} (\sin^2 t + \cos^2 t) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z^2} \right) r \, dt dr dz = \\ & = \int_0^l \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \nabla \bar{p} \cdot \nabla \bar{v} r \, dt dr dz = \\ & = 2\pi \int_0^l \int_0^R \nabla \bar{p} \cdot \nabla \bar{v} r \, dr dz. \end{aligned}$$

Obdobným způsobem upravíme pravou stranu rovnice (3.3) a dostaneme

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} p(x, y, z) v(x, y, z) dx dy dz &= \lambda \int_0^l \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \bar{p}(r, z) \bar{v}(r, z) r \, dt dr dz = \\ &= 2\pi \lambda \int_0^l \int_0^R \bar{p}(r, z) \bar{v}(r, z) r \, dr dz. \end{aligned}$$

Rovnici (3.3) můžeme zapsat

$$\int_0^l \int_0^R \nabla \bar{p}(r, z) \cdot \nabla \bar{v}(r, z) r \, dr dz = \lambda \int_0^l \int_0^R \bar{p}(r, z) \bar{v}(r, z) r \, dr dz. \quad (3.4)$$

3.2 MKP - diskretizace

Nyní přistoupíme k diskretizaci prostoru $H^1(\Omega)$ a prostor $H^1(\Omega)$ nahradíme konečně rozměrným prostorem $V_h \in H^1(\Omega)$. Variační formulaci Helmholtzovy rovnice můžeme zapsat

$$\int_{\Omega} -\nabla p(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.5)$$

Má-li prostor V_h bázi $\{\phi_i\}_1^n$, můžeme řešení rovnice (3.5) zapsat jako lineární kombinaci bázových funkcí

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

Dosadíme-li si nyní řešení (3.6) do rovnice (3.5) dostaneme

$$\int_{\Omega} -\nabla \left(\sum_{i=1}^n p_i \phi_i(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) + k^2 \left(\sum_{i=1}^n p_i \phi_i(\mathbf{x}) \right) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.7)$$

První člen rovnice (3.7) můžeme upravit následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\nabla \left(\sum_{i=1}^n p_i \phi_i(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n p_i \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (p_i \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (p_i \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \\ &= - \sum_{i=1}^n p_i \int_{\Omega} \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Obdobným způsobem můžeme upravit druhý člen v rovnici (3.7) a tuto rovnici přepsat do tvaru

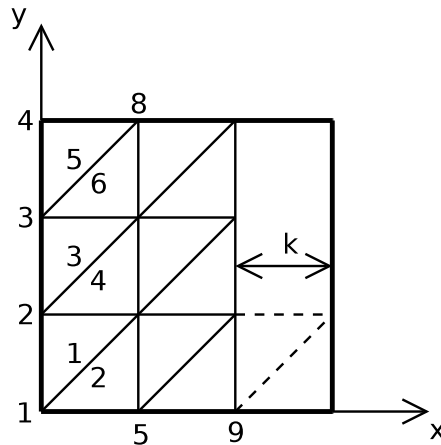
$$- \sum_{i=1}^n p_i \int_{\Omega} \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + k^2 \sum_{i=1}^n p_i \int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

a protože tato rovnice platí $\forall v \in V_h$, tak bude také platit, když za funkce v budeme postupně dosazovat bázové funkce ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Tím dostaneme soustavu n rovnic o n neznámých

$$- \sum_{i=1}^n p_i \int_{\Omega} \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + k^2 \sum_{i=1}^n p_i \int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Soustavu rovnic (3.8) můžeme zapsat maticově

$$-A\bar{p} + k^2 M\bar{p} = \bar{b}, \quad (3.9)$$



Obrázek 3.2: Diskretizace oblasti Ω s krokem k .

kde

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} : [a_{ij}] = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \quad (3.10)$$

$$M \in \mathbb{R}^{n \times n} : [m_{ij}] = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \quad (3.11)$$

$$\bar{b} \in \mathbb{R}^n : [b_i] = \int_{\Omega} f \phi_i \quad (3.12)$$

$$\bar{p} \in \mathbb{R}^n : \bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^{\top}. \quad (3.13)$$

3.3 Diskretizace oblasti Ω

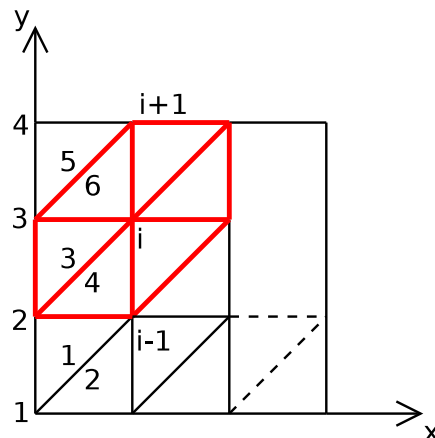
Přechodem od prostoru H^1 ke konečně rozměrnému prostoru V_h potřebujeme zavést diskretizaci oblasti Ω . Zvolme si konstantní krok Δk a rozdělme oblast Ω na elementy el_j a uzly u_i . Pro diskretizovanou oblast Ω musí platit, že je celá pokrytá elementy, které se vzájemně nepřekrývají, to znamená, že mohou mít pouze společnou hranici, viz. obrázek 3.2.

Pro naše výpočty bude oblast $\Omega = [u, el]$ reprezentována množinou uzlů $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a množinou elementů $el = \{el_1, el_2, \dots, el_m\}$, kde

$$u_i = (x_i, y_i)^{\top}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$el_j = [u_a, u_b, u_c], \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad u_a \neq u_b \neq u_c \wedge u_a, u_b, u_c \in u.$$

Každý uzel u_i uchovává informaci o svých souřadnicích $(x_i, y_i)^{\top}$ a každý element informaci o tom, ze které trojice uzlů je tvořen.



Obrázek 3.3: Nenulové hodnoty bázové funkce ϕ_i na příslušných elementech.

3.4 Volba bázových funkcí

Soustava (3.9) bude určitě snadněji a rychleji řešitelná, jestliže matice tuhosti a hmotnosti budou řídké. Rovněž výpočet matic tuhosti a hmotnosti bude rychlejší, jestliže výpočet jejich prvků bude rychlý a o většině z nich budeme moci dopředu prohlásit, že budou nulové. Těchto požadavků lze dosáhnout vhodnou volbou bázových funkcí ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Zvolme si bázové funkce tak, aby platilo

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} = u_i \\ 0, & \mathbf{x} \neq u_i \end{cases} \quad (3.14)$$

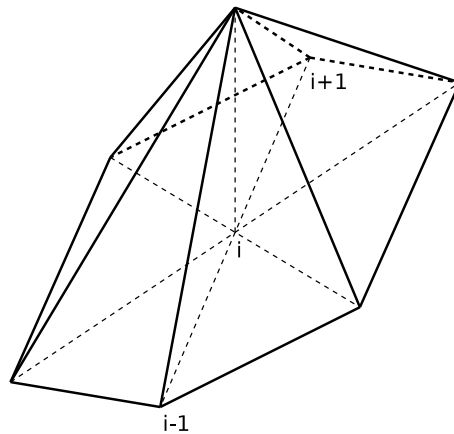
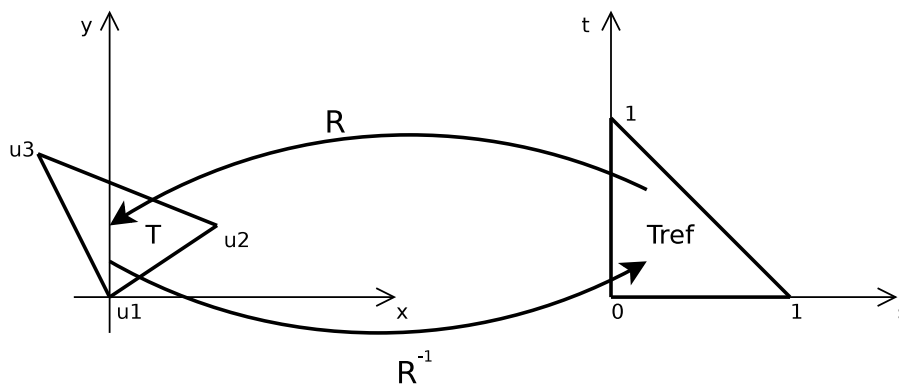
Pro takto zvolenou bázi bude platit, že bázová funkce ϕ_i nabývá nenulové hodnoty pouze na elementech, které obsahují uzel u_i , viz obrázek 3.3.

Bázové funkce budou po částech lineární a bázová funkce ϕ_i bude vypadat jako na obrázku 3.4. Z obrázku 3.3 je vidět, že pro každou funkci ϕ_i budou integrály $\int_{\Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_j$ a $\int_{\Omega} \phi_i \phi_j$ nenulové jen v 7 případech a to, když funkce ϕ_j je „sousední“ nebo totožná s funkcí ϕ_i . Tímto postupem zaručíme dostatečnou řídkost matic tuhosti a hmotnosti.

3.5 Výpočet matice tuhosti

Nyní si popíšeme způsob sestavování matice tuhosti A . Máme-li po částech lineární bázové funkce ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ definované vztahem (3.14), můžeme prvky matice A definované vztahem (3.10) počítat dvěma způsoby. Buď můžeme postupně procházet všechny kombinace funkcí ϕ_i a ϕ_j a počítat integrál 3.10 nebo budeme postupně procházet elementy a počítat jejich příspěvky do uzlů, které tvoří daný element.

První způsob je značně komplikovaný na implementaci a velice těžkopadný. Naopak druhý způsob je velice vtipný a efektivní, proto popíšeme tento způsob. Jak už bylo řečeno, při volbě druhého způsobu procházíme postupně přes všechny elementy a na

Obrázek 3.4: Bázová funkce ϕ_i .Obrázek 3.5: Přechod na referenční trojúhelník T_{ref} .

každém elementu počítáme integrál (3.10). Tady je třeba poznamenat, že na jednom elementu nemůžeme spočítat celou hodnotu integrálu (3.10), ale jenom příspěvek tohoto elementu do všech okolních uzlů. Celou hodnotu integrálu (3.10) nemůžeme spočítat proto, že každá bázová funkce je nenulová na 6 elementech, viz obrázek 3.3 a my počítáme pouze na jednom.

Nyní přistoupíme k samotnému výpočtu na daném elementu. Protože v obecném případě může být každý element jinak natočen, provádíme výpočet na tzv. referenčním trojúhelníku T_{ref} . Předpokládejme, že původní trojúhelník T je tvořen vrcholy

$$u_a = (x_a, y_a)^T,$$

$$u_b = (x_b, y_b)^T,$$

$$u_c = (x_c, y_c)^T$$

a referenční trojúhelník T_{ref} bude tvořen vrcholy

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= (0, 0)^\top, \\ \bar{u}_2 &= (1, 0)^\top, \\ \bar{u}_3 &= (0, 1)^\top.\end{aligned}$$

Přechod mezi trojúhelníky T a T_{ref} , viz obrázek 3.5, můžeme zapsat pomocí matice R definované

$$R = (u_b - u_a, u_c - u_a) = \begin{pmatrix} x_b - x_a & x_c - x_a \\ y_b - y_a & y_c - y_a \end{pmatrix}.$$

Potom přechod z T_{ref} na T zapíšeme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

a přechod z T na T_{ref}

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Máme-li funkci $f(x, y) = g(s, t)$, potom můžeme $\nabla f(x, y)$ zapsat

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Označíme-li si prvky matice $R^{-1} =$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & R_{12}^{-1} \\ R_{21}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

a využijeme-li vztahu (3.16), můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (R_{11}^{-1} x + R_{12}^{-1} y) = R_{11}^{-1}, \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (R_{11}^{-1} x + R_{12}^{-1} y) = R_{12}^{-1}, \\ \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (R_{21}^{-1} x + R_{22}^{-1} y) = R_{21}^{-1}, \\ \frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (R_{21}^{-1} x + R_{22}^{-1} y) = R_{22}^{-1}.\end{aligned}$$

Potom můžeme rovnici (3.17) zasat ve tvaru

$$\nabla f(x, y) = R^{-\top} \cdot \nabla g(s, t) \quad (3.18)$$

Zavedeme-li si na referenčním trojúhelníku T_{ref} bázevé funkce $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$ a $\bar{\phi}_3$ tak, aby funkční hodnoty (ve vrcholech T_{ref}) bázevých funkcí na referenčním trojúhelníku T_{ref}

odpovídaly funkčním hodnotám (ve vrcholech T) bazových funkcí na původním trojúhelníku T , potom budou mít bazové funkce $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$ a $\bar{\phi}_3$ předpis

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1(s, t) &= 1 - s - t, \\ \bar{\phi}_2(s, t) &= s, \\ \bar{\phi}_3(s, t) &= t,\end{aligned}$$

kde $s, t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Známe-li předpis referenčních bazových funkcí, můžeme velice snadno určit jejich gradienty

$$\begin{aligned}\nabla \bar{\phi}_1(s, t) &= (-1, -1)^\top, \\ \nabla \bar{\phi}_2(s, t) &= (-1, 0)^\top, \\ \nabla \bar{\phi}_3(s, t) &= (0, -1)^\top.\end{aligned}$$

Využijeme-li vztahu (3.18), můžeme gradient funkcí ϕ_a, ϕ_b a ϕ_c zapsat následovně

$$B = (\nabla \phi_a, \nabla \phi_b, \nabla \phi_c) = R^{-\top} \cdot (\nabla \bar{\phi}_a, \nabla \bar{\phi}_b, \nabla \bar{\phi}_c) = R^{-\top} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Celý příspěvek elementu el potom můžeme zapsat

$$A_{el} = B^\top \cdot B \cdot \frac{|\det(R)|}{2}, \quad (3.19)$$

kde $\frac{|\det(R)|}{2}$ vyjadřuje obsah plochy původního trojúhelníku. V matici A_{el} jsou příspěvky elementu el do matice tuhosti A

$$A_{el} = \begin{pmatrix} a_{aa} & a_{ab} & a_{ac} \\ a_{ba} & a_{bb} & a_{bc} \\ a_{ca} & a_{cb} & a_{cc} \end{pmatrix}.$$

Nyní stačí prvky z matice A_{el} přičíst na příslušné místo v matici A a tento postup opakovat pro všechny elementy el_1, el_2, \dots, el_m .

3.6 Výpočet matice hmotnosti

Při výpočtu matice hmotnosti postupujeme obdobně jako při výpočtu matice tuhosti. Výpočet provádíme přes jednotlivé elementy na referenčním trojúhelníku. Volba referenčního trojúhelníku, referenčních bazových funkcí a matice R je stejná jako v kapitole 3.5.

K výpočtu prvků matice hmoty (3.11) využijeme Gaussovy kvadraturní vzorce. Integrál z funkce f pomocí Gaussových kvadraturních vzorců počítáme následovně. Máme-li referenční trojúhelník T_{ref} jako na obrázku 3.5 a máme-li množinu bodů $\{x_i\}_1^n \subset T_{ref}$ a

množinu vah $\{v_i\}_1^n$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $\sum_1^n p_i = 1$, potom můžeme integrál z funkce f na referenčním trojúhelníku T_{ref} počítat následovně

$$\int_{T_{ref}} f dS = \sum_1^n v_i f(x_i).$$

S využitím Gaussových kvadraturních vzorců můžeme počítat prvky matice hmotnosti následujícím způsobem. Předpokládejme, že máme množinu referenčních bodů $\{x_i = (s_i, t_i)^\top\}_1^n \subset T_{ref}$ a jim příslušnou množinu vah $\{v_i\}_1^n$. Potom příspěvek elementu $el = [u_a, u_b, u_c]$ do matice hmotnosti M bude

$$M_{el} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot B_i^\top \cdot B_i,$$

kde $B_i = (1 - s_i - t_i, s_i, t_i)$ představuje hodnoty bázových funkcí $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$ a $\bar{\phi}_3$ v bodě x_i .

Použijeme-li větu o substituci pro vícerozměrný integrál, můžeme psát

$$\int_T f(x, y) dx dy = \int_{T_{ref}} f(R \cdot (s, t)^\top) |J(R)| ds dt,$$

kde $J(R)$ je Jakobián zobrazení (3.15), které popisuje přechod z T na T_{ref} . Celý příspěvek elementu el můžeme vyjádřit

$$M_{el} = M_{el} \cdot |\det(R)|,$$

kde $|\det(R)|$ je Jakobián $J(R)$. Nyní přičteme prvky z matice M_{el} na příslušné pozice v matici M a tento postup budeme opakovat pro všechny elementy $el_i, i = 1, 2, \dots, m$ a dostaneme kompletní matici hmotnosti M .

3.7 Výpočet vektoru pravé strany \bar{b}

Nyní přistoupíme k výpočtu vektoru pravé strany \bar{b} rovnice (3.9). Postup bude velmi podobný jako v předcházejících případech. Opět budeme počítat příspěvky jednotlivých elementů do vektoru \bar{b} . Předpokládáme-li, že funkce f je na elementu el konstantní potom můžeme (3.12) vypočítat

$$b_{el} = \frac{1}{3} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{|\det(R)|}{2},$$

kde $\frac{|\det(R)|}{2}$ je obsah plochy elementu el . Prvky vektoru b_{el} přičteme na příslušné místo do vektoru \bar{b} a výpočet opakujeme přes všechny elementy.

Poznámka 3.1 Nyní známe postup jak sestavit příslušné matice v rovnici (3.9), kterou můžeme vyřešit třeba pomocí softwaru *Matlab*. Předtím, než se pustíme do výpočtu, se musíme vypořádat s posledním problémem, který zde ještě nebyl popsán, a to s Dirichletovou okrajovou podmínkou. Při sestavování lokálních matic tuhosti a hmotnosti případně vektoru pravé strany nebylo řečeno, jak je výpočet upravován, jestliže příslušný uzel je prvkem Dirichletovy hranice. Tato kontrola se děje při přičítání prvků z lokální matice do celkových. Je-li příslušný uzel v Dirichletove hranici tak do celkové matice přičteme 0. Tímto postupem bychom ovšem dostali nulové řádky v maticích tuhosti a hmotnosti, proto přičítáme-li k diagonálnímu prvku, tak nás nezajímá jestli je součástí Dirichletovy hranice nebo ne.

4 Úloha s neomezenou hranicí - aplikace PML vrstvy

V této kapitole si popíšeme vlastnosti *Perfectly matched layer* (dále jen PML-vrstvy), kterou prvně popsal maďarský matematik *Bérenger*. Naznačíme odvození potřebné transformace souřadnic a ukážeme si vliv transformace souřadnic na Helmholtzovu vlnovou rovnici.

4.1 Popis PML-vrstvy

Máme-li úlohu na neomezené oblasti, kde požadujeme, aby v nekonečnu byla hodnota řešení Helmholtzovy rovnice rovna 0. Tohoto dosáhneme, splníme-li Sommerfeldovu radiační podmínku (2.21). Bude-li nás zajímat řešení úlohy pouze na části oblasti Ω , tak Sommerfeldovu radiační podmínku můžeme nahradit PML - vrstvou [1]. Výpočetní oblast „obalíme“ tenkou vrstvou, která nahradí Sommerfeldovu radiační podmínku, viz obrázek 4.1.

Má-li PML-vrstva nahradit Sommerfeldovu radiační podmínku, potom musí splňovat následující požadavky [2]:

- absorbovat všechny vlny, které se šíří z oblasti Ω
- a tím zabránit jejich odrazům zpátky do oblasti Ω .

Popíšeme myšlenku metody v \mathbb{R}^2 [1]. Rozdělme oblast Ω na dvě části $\Omega_- = \{x \leq 0\}$ a $\Omega_+ = \{x \geq 0\}$. Na množině Ω_- budeme chtít mít řešení Helmholtzovy rovnice a na množině Ω_+ budeme chtít mít tlumené pokračování řešení, viz obrázek 4.2. Začneme rovnicí popisující zákon zachování hmoty v diferenciálním tvaru (2.5)

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_c \mathbf{v}) = 0.$$

Jestliže $\rho_c = \rho_0 + \rho$ a předpokládáme-li, že $\rho_0 \gg \rho$, můžeme rovnici (2.5) přepsat do tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0. \quad (4.1)$$

Má-li vektor \mathbf{v} složky v_x a v_y , můžeme zapsat rovnici (4.1) jako soustavu a dostaneme

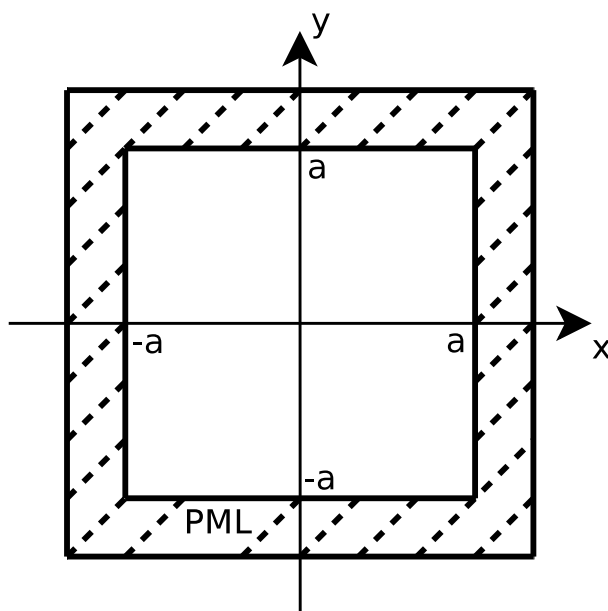
$$\frac{\partial \rho_x}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial \rho_y}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad (4.2b)$$

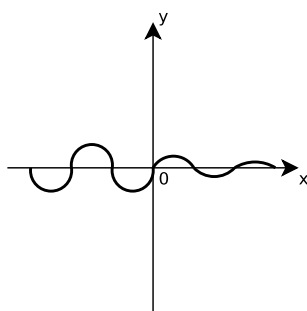
$$\rho = \rho_x + \rho_y, \quad (4.2c)$$

kde neznámé ρ_x a ρ_y jsou pouze formální proměnné bez fyzikálního významu. Zapišeme-li si rovnici (2.8) po složkách, opět dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \rho_c \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial P_c}{\partial x}, \\ \rho_c \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{\partial P_c}{\partial y} \end{aligned}$$



Obrázek 4.1: Výpočetní oblast Ω obalená PML - vrstvou.



Obrázek 4.2: Tlumené pokračování řešení.

a jestliže $P_c = P + P_0$ a $\rho_0 \gg \rho$ můžeme soustavu upravit do tvaru

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (4.3b)$$

Nyní si na intervalu Ω_+ přeformulujeme rovnice, které obsahují derivaci kolmou k hranici, v našem případě jsou to rovnice (4.2a) a (4.3a), které obsahují derivaci ve směru x . Do těchto rovnic přidáme absorpční člen. Potom můžeme rovnice (4.2a) a (4.3a) zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \sigma(x)\rho_x = -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \sigma(x)v_x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (4.4b)$$

Homogenní řešení rovnic (4.4a) a (4.4b) můžeme zapsat ve tvaru $Ae^{-\sigma(x)t}$ a představíme-li si funkci e^{-x} , tak potřebujeme, aby platilo

$$\sigma(x) \equiv 0, \quad x \leq 0 \quad (4.5a)$$

$$\sigma(x) \geq 0, \quad x \geq 0. \quad (4.5b)$$

Podmínka (4.5b) nám zaručí, že na intervalu Ω_+ dojde k utlumení řešení.

Předpokládáme-li, že ρ_x můžeme separovat podle (2.1), to znamená, že

$$\rho_x(x, t) = \overline{\rho_x}(x) \cdot e^{-i\omega t},$$

potom bude derivace ρ_x podle času

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho_x}(x) \cdot e^{-i\omega t}) = \\ &= -i\omega \overline{\rho_x}(x) \cdot e^{-i\omega t} = \\ &= -i\omega \rho_x. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Využijeme-li vztahu (4.6) a nahradíme-li si v rovnici (4.4a) výraz $\frac{\partial}{\partial t}$ výrazem $-i\omega$, dostaneme

$$\begin{aligned} -i\omega \rho_x + \sigma(x)\rho_x &= -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \rho_x(\sigma(x) - i\omega) &= -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \rho_x &= \frac{-\rho_0}{\sigma(x) - i\omega} \frac{\partial v_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aplikujeme-li na $v_x(x, t) = \bar{v}(x) \cdot e^{i\omega t}$ stejný postup jako v (4.6), můžeme nahrazením derivace podle času členem $-i\omega$ přepsat rovnici (4.4b) do tvaru

$$\begin{aligned} -i\omega v_x + \sigma(x)v_x &= \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \\ v_x(\sigma(x) - i\omega) &= \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \\ v_x &= \frac{-1}{\sigma(x) - i\omega} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dosadíme-li (4.8) do (4.7) dostaneme

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{-\rho_0}{\sigma(x) - i\omega} \frac{\partial v_x}{\partial x} = \\ &= \frac{-\rho_0}{\sigma(x) - i\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-1}{\sigma(x) - i\omega} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{\sigma(x) - i\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma(x) - i\omega} \frac{\partial P}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Zopakujeme-li celý postup pro v_y , to znamená, že derivaci podle času nahradíme členem $-i\omega$, můžeme rovnici (4.3b) upravit do tvaru

$$-i\omega v_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y}$$

a po úpravě dostaneme

$$\rho_0 v_y = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Přenásobíme-li poslední rovnici -1 a derivujeme-li ji podle y , dostaneme

$$-\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{-1}{i\omega} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2},$$

dosazením (4.2b) za $-\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial y}$ dostaneme

$$\frac{\partial \rho_y}{\partial t} = \frac{-1}{i\omega} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

a náhradou $-i\omega$ za derivaci podle času dostaneme

$$-i\omega \rho_y = \frac{-1}{i\omega} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}.$$

Po úpravě můžeme psát

$$\rho_y = \frac{-1}{\omega^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}. \quad (4.10)$$

Přepíšeme-li si lineární materiálový zákon (2.2) do tvaru

$$\rho - \frac{1}{c^2}P = 0$$

a dosadíme-li do $\rho = \rho_x + \rho_y$ rovnice (4.9) a (4.10), dostaneme

$$\frac{1}{\sigma(x) - i\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma(x) - i\omega} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}P = 0.$$

Přenásobíme-li tuto rovnici $-\omega^2$ a využijeme-li toho, že $-1 = i^2$, můžeme psát

$$\frac{i\omega}{\sigma(x) - i\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{i\omega}{\sigma(x) - i\omega} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + k^2 P = 0. \quad (4.11)$$

Což je Helmholtzova rovnice na Ω_- , kde $\sigma(x) \equiv 0$.

Zavedeme-li si novou neznámou x' tak, aby platilo

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{-i\omega}{\sigma(x) - i\omega}, \quad (4.12)$$

zavedeme-li substituci

$$\tilde{P}(x') = P(x),$$

a dosadíme-li (4.12) do (4.11), můžeme Helmholtzovu rovnici zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial y^2} + k^2 \tilde{P} = 0.$$

Chceme-li získat předpis pro x' , můžeme ho získat ze $\frac{\partial x'}{\partial x}$ jako derivaci inverzní funkce

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial x'}} = \frac{\sigma(x) - i\omega}{-i\omega}. \quad (4.13)$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\sigma(x) - i\omega}{-i\omega} = 1 - \frac{\sigma(x)}{i\omega} \frac{i}{i} = 1 + \frac{i}{\omega} \sigma(x)$$

a po následné integraci můžeme x' vyjádřit jako

$$x' = x + \frac{i}{\omega} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi. \quad (4.14)$$

Provedeme-li vyjádření PML vrstvy ve dvou souřadnicích [5], můžeme Helmholtzovu rovnici (4.11) vyjádřit v souřadném systému (x', y')

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial y'^2} + k^2 \tilde{P} = 0, \quad (4.15)$$

kde

$$x' = x + \frac{i}{\omega} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi, \quad (4.16)$$

$$y' = y + \frac{i}{\omega} \int_0^y \sigma(\xi) d\xi. \quad (4.17)$$

4.2 Úloha s PML-vrstvou

Nyní si fformulujeme nyní úlohu, která se řídí Helmholtzovou rovnicí (2.20) a Sommerfeldovou radiační podmínkou (2.21). Sommerfeldova podmínka je nahrazená transformací souřadnic (4.16) a (4.16). Helmholtzova rovnice (4.15) bude zapsána v transformovaných souřadnicích (x', y') . Budeme-li úlohu řešit na oblasti Ω , viz obrázek 4.1, kde a (resp. $-a$) označuje hranici PML - vrstvy, můžeme transformaci souřadnic zapsat následujícím způsobem[5].

Transformace souřadnice x' je

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \begin{cases} 1 + \frac{i\sigma(x)}{\omega} & \text{pro } |x| \geq a, \\ 1 & \text{pro } |x| < a \end{cases}$$

a transformace souřadnice y' je

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \begin{cases} 1 + \frac{i\sigma(y)}{\omega} & \text{pro } |y| \geq a, \\ 1 & \text{pro } |y| < a. \end{cases}$$

Zavedeme-li si podle [2] funkci

$$\bar{\sigma}(s, a) = \begin{cases} \sigma_0 (|s| - a)^2 & \text{pro } |s| \geq a, \\ \sigma = 0 & \text{pro } |s| < a, \end{cases}$$

kde $\sigma_0 > 0$. Potom můžeme $\frac{\partial x'}{\partial x}$ zapsat

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = d_x(x) = 1 + \frac{i}{\omega}\sigma(x, a) \quad (4.18)$$

a $\frac{\partial y'}{\partial y}$ můžeme zapsat

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = d_y(y) = 1 + \frac{i}{\omega}\sigma(y, a). \quad (4.19)$$

Dosadíme-li do (4.13) předpis (4.18) dostaneme

$$d_x(x) = \frac{\sigma(x) - i\omega}{-i\omega} \quad (4.20)$$

a dosadíme-li (4.20) do (4.11) a provedeme-li podobné úvahy pro souřadnici y' , viz [5], dostaneme

$$\frac{1}{d_x(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{d_x(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{1}{d_y(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{d_y(y)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) + k^2 P(x, y) = 0.$$

Po př násobení obou stran rovnice výrazem $d_x(x)d_y(y)$ dostaneme

$$d_y(y) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{d_x(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \right) + d_x(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{d_y(y)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) + k^2 d_x(x)d_y(y)P(x, y) = 0$$

a po úpravě můžeme psát

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d_y(y)}{d_x(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d_x(x)}{d_y(y)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) + k^2 d_x(x)d_y(y)P(x, y) = 0. \quad (4.21)$$

4.3 Variační formulace

Sestavme si variační formulaci pro Helmholtzovu úlohu s PML - vrstvou. Helmholtzova úloha je popsána rovnicí (4.21) a okrajovou podmínkou $P(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Variační formulace bude ve tvaru

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d_y \partial P}{d_x \partial x} \right) v + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d_x \partial P}{d_y \partial y} \right) v + k^2 d_x d_y P v dS = 0.$$

Protože $v = 0$ na $\partial\Omega$, tak pomocí Greenovy věty upravíme variační formulaci na

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{d_y \partial P}{d_x \partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{d_x \partial P}{d_y \partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} dS + \int_{\Omega} k^2 d_x d_y P v dS = 0.$$

5 Numerické příklady

V této kapitole budeme demonstrovat, jak využít metodu konečných prvků a popsané postupy na sestavování matic tuhosti a hmotnosti pro řešení úloh 2-D akustiky. Pro samotné numerické výpočty budeme používat dvě hlavní funkce, jednu pro diskretizaci čtvercové oblasti a druhou pro sestavení matic tuhosti a hmotnosti a pro sestavení vektoru pravé strany.

Pro diskretizaci oblasti budeme používat funkci *discret.m*, která diskretizuje zadanou čtvercovou oblast s pevným krokem a vrací seznam uzlů, elementů a indexy uzlů obsažených v Dirichletově a Neumannově hranici. V *Matlabu* voláme funkci příkazem

$$[x, el, ID, IN] = discret(a, b, c, d, h),$$

kde parametry a, b, c, d specifikují čtvercovou oblast $(a, b) \times (c, d)$ a parametr h je velikost diskretizačního kroku.

Funkce vrací:

- x ...seznam uzlů, kde uzel je reprezentován svými souřadnicemi
- el ...seznam elementů, kde element je reprezentován třemi uzly
- ID ...indexy uzlů pro než platí Dirichletova okrajová podmínka
- IN ...indexy uzlů pro než platí Neumannova okrajová podmínka.

Pro sestavení matic tuhosti, hmotnosti a vektoru pravé strany použijeme funkci *assemble.m*. Funkci v *Matlabu* zavoláme příkazem

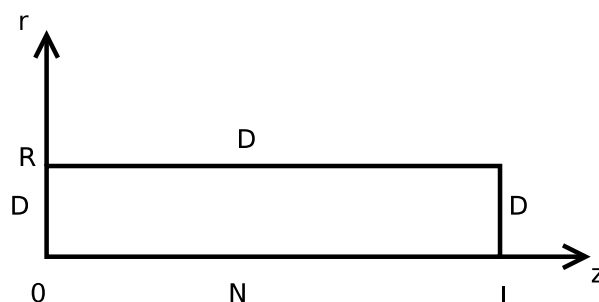
$$[A, M, b] = assemble(x, el, ID, IN, k, f, gN),$$

kde x je seznam uzlů a el je seznam elementů, parametry ID (IN) jsou indexy uzlů v Dirichletově (Neumannově) hranici, parametr k je vlnové číslo (je-li vlnové číslo konstantní na celé výpočetní oblasti volíme k jako vektor jedniček), parametr f vyjadřuje zdroj vnějších sil a parametr gN hodnotu pro uzly obsažené v IN .

Funkce vrací:

- A ...matice tuhosti ($\int \nabla p \nabla v$)
- M ...matice hmotnosti ($\int p v$)
- b ...vektor pravé strany ($\int f v$)

Funkce *assemble.m* využívá k sestavení matic A , M a vektoru b postupy popsané v kapitolách 3.5, 3.6 a 3.7.

Obrázek 5.1: Výpočetní oblast Ω .

5.1 Úloha s 3D rotační symetrií

Uvažujme úlohu popsanou v kapitole 3.1. S využitím rotační symetrie jsme 3D úlohu převedli na 2D úlohu. Formulace úlohy na vlastní čísla vypadá následovně

$$\begin{aligned}\Delta p(r, z) &= \lambda p(r, z) \text{ v } \Omega \\ p(r, z) &= 0, (r, z) \in \Gamma_D \\ \frac{\partial p(r, z)}{\partial r} &= 0, (r, z) \in \Gamma_N,\end{aligned}$$

kde Γ_D je část hranice oblasti $\partial\Omega$ s Dirichletovou okrajovou podmínkou a Γ_N je část hranice s Neumannovou okrajovou podmínkou, viz obrázek 5.1. . Řešme úlohu

$$\begin{aligned}-\Delta p(x) &= \lambda p(x), x \in \Omega \\ p(x) &= 0, x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

Tato úloha vede na soustavu rovnic, které můžeme zapsat

$$A = \lambda M.$$

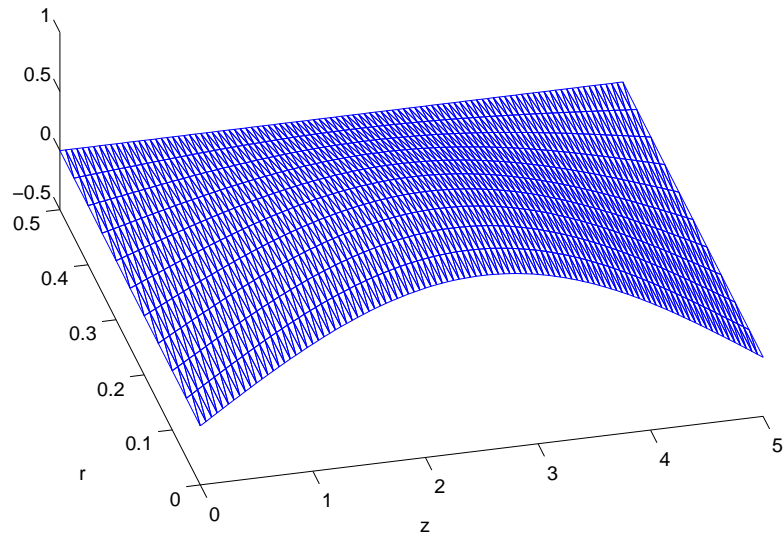
Vlastní čísla pro tuto úlohu zjistíme pomocí *Matlabovské* funkce $\text{eig}(A, M)$.

Všechny soubory potřebné pro výpočet jsou v adresáři *SireniZvuku* a spustíme-li si v *Matlabu* soubor *priklad.m* dostaneme ukázkový výpočet.

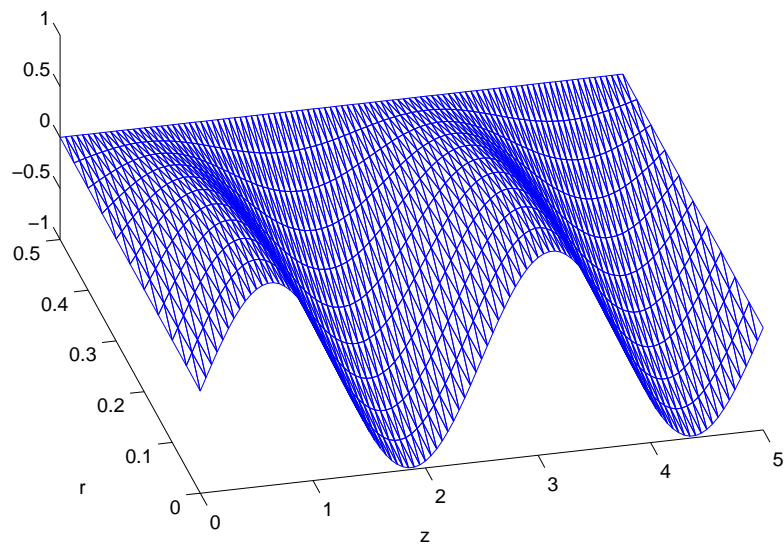
Výsledky pro parametry:

- diskretizační krok $h = 0.05$
- velikosti oblasti $R = 0.5, l = 5$

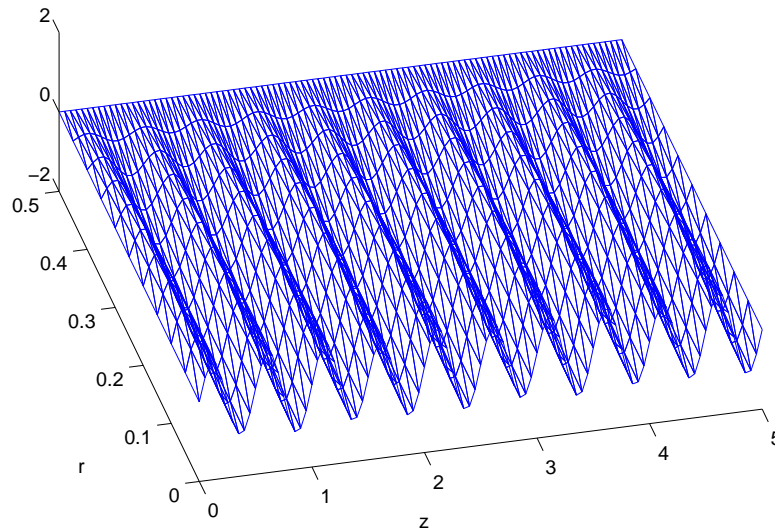
jsou na obrázcích 5.2, 5.3 a 5.4. Na obrázcích je vidět, že amplituda klesá ve směru osy y , to znamená když se blížíme ke stěnám flétničky, naopak ve směru osy x (podélné vlnění flétničkou) dostáváme vlnění jehož frekvence je závislá na vlastním čísle.



Obrázek 5.2: Výsledek pro 1. vlastní číslo.



Obrázek 5.3: Výsledek pro 4. vlastní číslo.



Obrázek 5.4: Výsledek pro 32. vlastní číslo.

5.2 Šíření zvuku z bodového zdroje

Mějme úlohu, kde budeme modelovat šíření zvuku na volném prostranství z bodového zdroje. Předpokládejme, že máme čtvercovou oblast $\Omega = (-a, a) \times (-a, a)$ a zdroj zvuku bude mít souřadnice $(0, 0)$. Na krajích oblasti bude PML-vrstva o šířce b , viz obrázek 5.5.

Využijeme-li transformaci souřadnic popsané v kapitole 4.2, můžeme úlohu zformulovat následovně

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d_y}{d_x} \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d_x}{d_y} \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial y} \right) + k^2 d_x d_y p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

$$p(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

kde $\Omega = (-a, a) \times (-a, a)$ je čtvercová oblast a

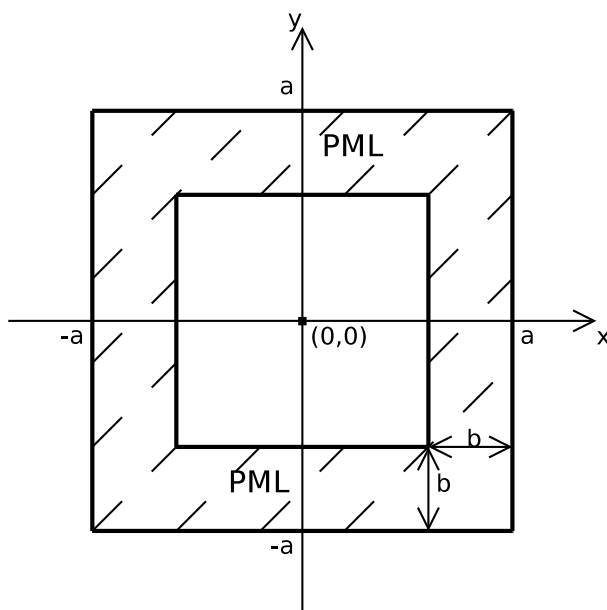
$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \neq 0, & \mathbf{x} = (0, 0) \\ = 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označíme-li si matici tuhosti A , matici hmotnosti M a vektor pravé strany b , které dostaneme z funkce `assemble.m`, můžeme úlohu zapsat jako soustavu lineárních rovnic

$$(A - k^2 M)p = b$$

a řešení můžeme vypočítat pomocí programu `Matlab`

$$p = (A - k^2 M) \setminus b.$$

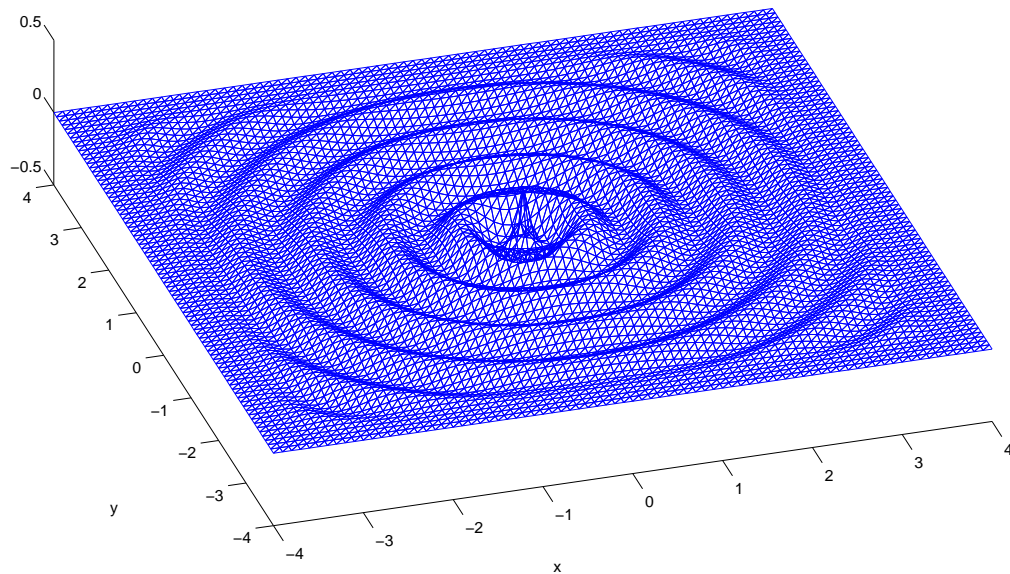


Obrázek 5.5: Bodový zdroj umístěný v oblasti Ω .

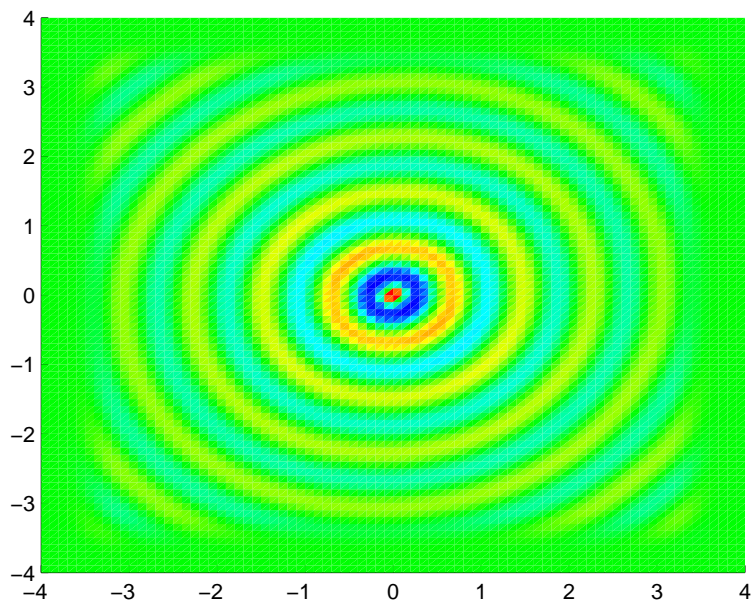
Soubory pro výpočet úlohy jsou uloženy v adresáři *PML* a spuštěním souboru *priklad.m* dostaneme vzorový výpočet pro následující parametry:

- velikost oblasti $\Omega = (-4, 4) \times (-4, 4)$
- šířka PML vrstvy $b = 1$
- koeficient PML vrstvy $\sigma_0 = 5$
- vlnové číslo $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$, kde $f = 440$ a $c = 340$.

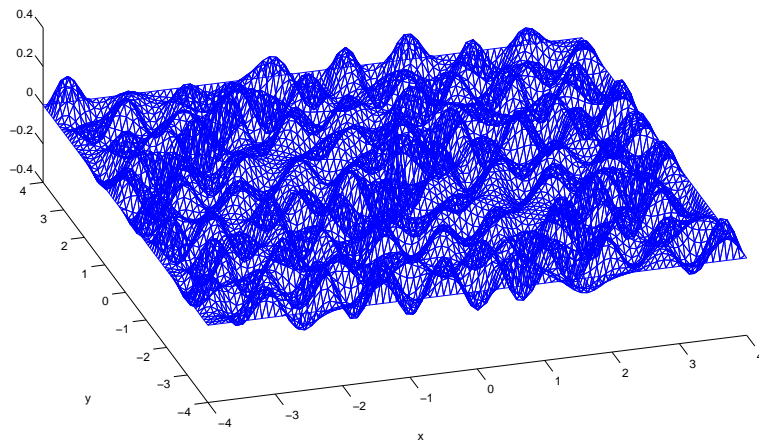
Řešení úlohy je na obrázcích 5.6 a 5.7, kde je krásně vidět účinek PML vrstvy, která zabráňuje zpětnému odražení vln do oblasti Ω . Kdybychom nepoužili PML - vrstvy a na hranici $\partial\Omega$ nechali pouze nulovou Dirichletovu podmínku, dostali bychom výsledek jako na obrázku 5.8 a 5.9.



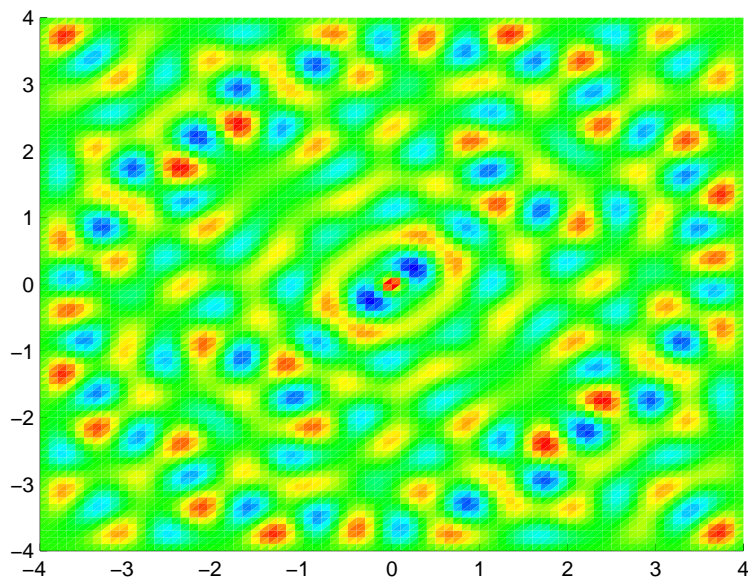
Obrázek 5.6: Šíření zvuku na volném prostranství z bodového zdroje.



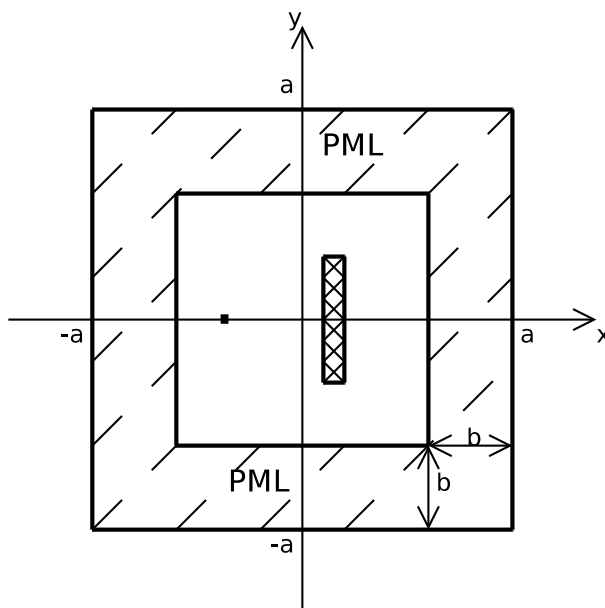
Obrázek 5.7: Barevná mapa. Šíření zvuku na volném prostranství z bodového zdroje.



Obrázek 5.8: Šíření zvuku bez PML - vrstvy.



Obrázek 5.9: Barevná mapa. Šíření zvuku bez PML - vrstvy.



Obrázek 5.10: Bodový zdroj a překážka-

5.3 Šíření zvuku kolem překážky

Zkusme rozšířit úlohu (5.2) a přidejme do úlohy překážku a sledujme, jak se zvuk šíří okolo této překážky.

Mějme čtvercovou oblast $\Omega = (-a, a) \times (-a, a)$ a do oblasti Ω umístěme překážku a bodový zdroj zvuku jako na obrázku 5.10. Překážku můžeme modelovat tak, že předpokládáme, že šířící se zvuk nemá na překážku vliv a proto bude na překážce nulový přetlak p . Celou úlohu potom můžeme zapsat následujícím způsobem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d_y}{d_x} \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d_x}{d_y} \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial y} \right) + k^2 d_x d_y p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

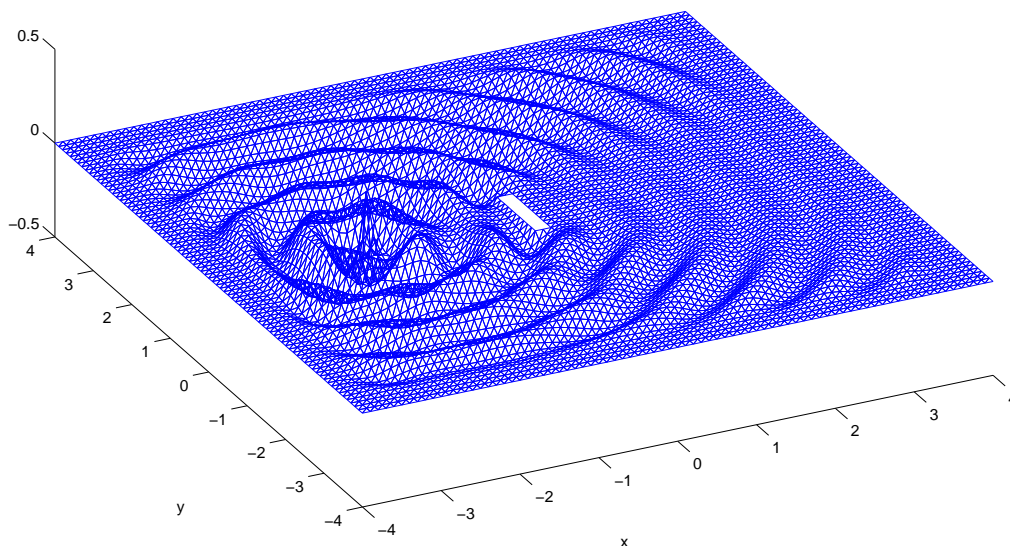
$$p(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \vee \mathbf{x} \in \Omega_{prek},$$

kde Ω je čtvercová oblast o rozměrech $(-a, a) \times (-a, a)$ a množina Ω_{prek} obsahuje uzly které tvoří překážku.

Pro numerickou realizaci výpočtu musíme upravit funkci *discret.m* tak, aby do seznamu Dirichletovských uzlů přidaly uzly, které tvoří překážku. Tato diskretizace je naprogramována ve funkci *discret2.m*, která jako parametry přebírá navíc *stred_x* a *stred_y*, které určují souřadnice středu překážky a parametry *sirka* a *vyska*, které určují rozměry překážky.

Soubory nutné pro celý výpočet jsou uloženy v adresáři *PMLprekazka* a funkcí *priklad.m* se spustí vzorový výpočet pro následující parametry:

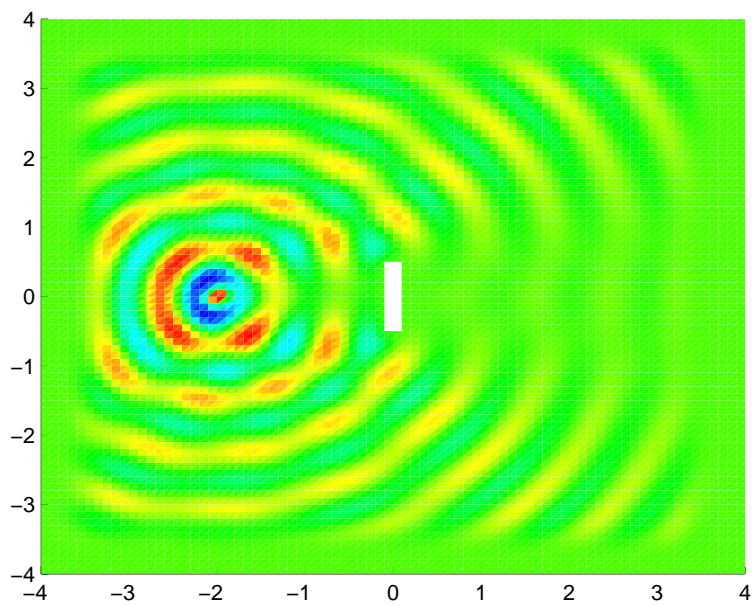
- velikost oblasti $\Omega = (-4, 4) \times (-4, 4)$



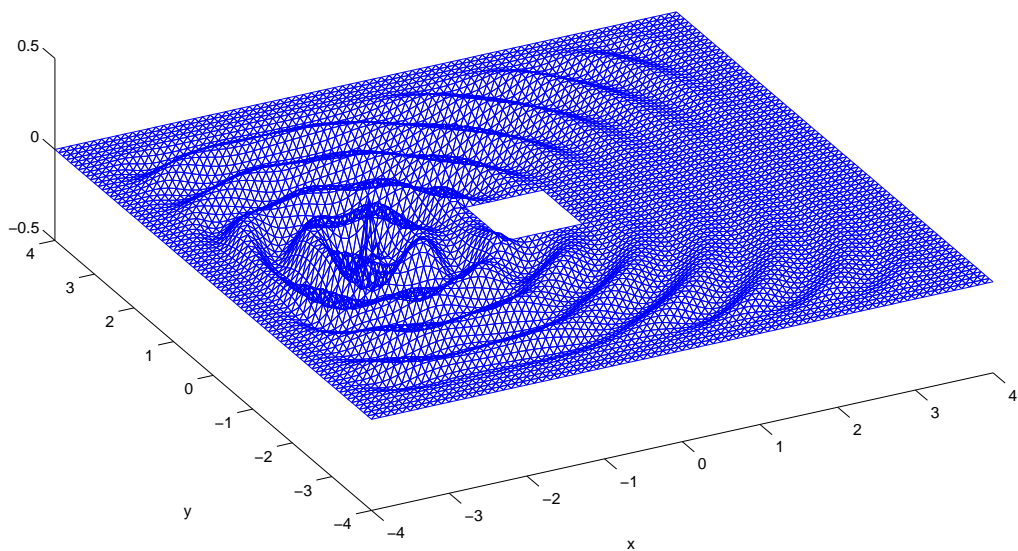
Obrázek 5.11: Šíření zvuku kolem tenké překážky.

- šířka PML vrstvy $b = 1$
- koeficient PML vrstvy $\sigma_0 = 5$
- vlnové číslo $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$, kde $f = 440$ a $c = 340$.
- souřadnice středu překážky $(0, 0)$
- velikost překážky a) 0.2×1 , b) 1×1

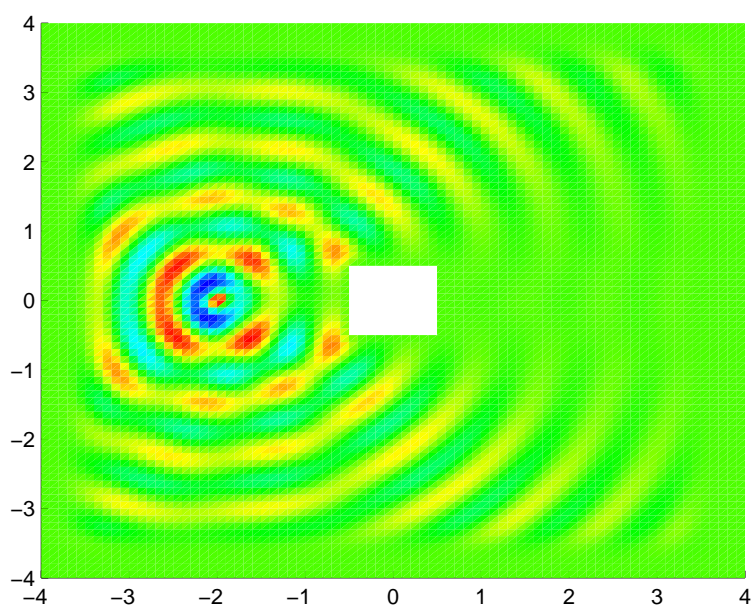
Na obrázcích 5.11 a 5.12 je zobrazen výpočet pro užší překážku a na obrázcích 5.13 a 5.14 pro širší. Z obrázků je vidět, že přes užší překážku má vlna tendenci se „přelévat“.



Obrázek 5.12: Barevná mapa. Šíření zvuku kolem tenké překážky.



Obrázek 5.13: Šíření zvuku kolem tlusté překážky.



Obrázek 5.14: Barevná mapa. Šíření zvuku kolem tlusté překážky.

6 Závěr

V této práci jsme se zabývali 2D úlohami akustiky na neomezených oblastech, které se řídí Helmholtzovou rovnicí. Pro řešení těchto úloh jsem využil metodu konečných prvků a PML - vrstvu, která nahrazuje Sommerfeldovu radiační podmínku. V metodě konečných prvků se nám podařilo implementovat PML - vrstvu a ukázat její vliv při řešení úloh akustiky na neomezených oblastech.

7 Literatura

- [1] Ihlenburg, F., *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] Monk, P., *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford University Press, 2003.
- [3] Kramář, M., *Bakalářská práce - Akustika flétny*, FEI VŠB-TU Ostrava, 2007.
- [4] Bramble, J.H. a Pasciak, J.E., *Analysis of a Finite PML Approximation for the Three dimensional Time-Harmonic Maxwell and Acoustic Scattering Problems*, *Math. Comp.* 76, pp. 597-614, 2007.
- [5] Colino, F. a Monk, P., *The Perfectly Matched Layer in Curvilinear Coordinates*, *Siam*, pp. 2061-2090, 1998.
- [6] Landau, J.D. a Lifshitz, E.M., *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 2007.

Přílohy

- A: CD se zdrojovými kódy.