

1 Úvod

Historie hudebních nástrojů je stará desetitisíce let. Zlomky fléten a píšťal z kostí nacházíme už u neandrtálců. Matematické studium hudebních nástrojů nacházíme už u pythagorejců, kteří objevili, že jisté příjemně znějící kombinace tónů mají výšky v poměru malých celých čísel.

Motivací nám je článek [1]. Tato práce se bude zabývat fyzikálními vlastnostmi norského lidového nástroje – flétničky (v originále *seljefløyte*). Tento nástroj můžeme považovat za primitivní proto, že nemá otvory, které bychom zakrývali a tím vytvářeli tóny různých výšek. Místo toho hráč mění sílu dechu a tím volí některou z harmonických, což jsou tóny s kmitočtem, který je celistvým násobkem kmitočtu nejhlubšího – základního tónu flétničky.

Flétnička patří do rodiny zobcové flétny (podélné), ačkoliv ji držíme příčně. Je vyrobena z vrbové větvičky, jeden konec má otevřený a na druhém je štěrbin, do které hráč fouká a tím nutí vzduch proudit přes zářez do těla flétničky. Takto vznikající kmity budí uvnitř nástroje stojaté vlny, jejichž kmitočty určuje výšku tónu. Zatímco zobcová flétna má otvory, jejichž zakrýváním prsty mění hráč kmitočty stojatých vln, flétnička žádné otvory nemá. Avšak i na flétničku je možné hrát několik různých tónů. Jak je to možné?

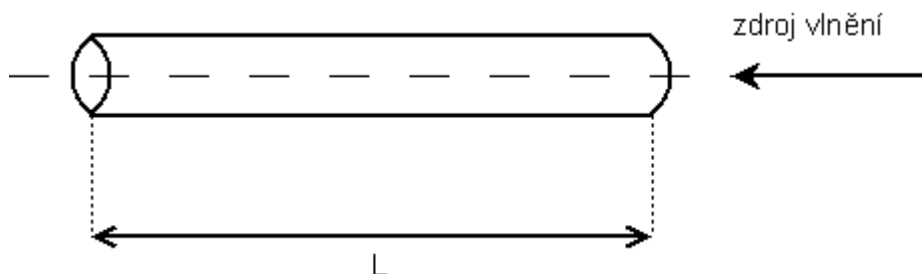
Odpověď nám dá matematika zvukových vln. Označme P přetlak v trubici, $x \in \langle 0, L \rangle$ polohu podél ní a $t > 0$ čas. Jednorozměrná vlnová rovnice

$$c^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

dává dobrý model pro chování molekul vzduchu v trubici flétny, kde $c \in \mathbb{R}^+$ vyjadřuje rychlost vlny. Protože oba konce trubice jsou otevřené, je na nich tlak stejný jako vnější atmosférický tlak a přetlak P je roven nule. Označíme-li L délku trubice, je $P(0, t) = P(L, t) = 0$, viz Obr. 1.1. Řešením vlnové rovnice (1.1) je lineární kombinace funkcí ve tvaru

$$P(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right),$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^+$ a $b \in \mathbb{R}^+$ jsou konstanty. Odvození této rovnice najdete ve většině učebnic diferenciálních rovnic, např. [2].



Obr. 1.1: Schématický model flétny.

Jak předpovídá naše řešení možné kmitočty tónů hraných flétnou? Uvažujme prozatím řešení obsahující jedinou hodnotu n . Ponechme x a n pevná a měňme t . Tlak se periodicky mění s periodou

$\frac{2L}{cn}$. Proto je kmitočet

$$f = \frac{cn}{2L}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Tento vzorec naznačuje, že existuje dvojí způsob, jak hrát na flétničku různé tóny: buď měnit délku L , nebo měnit n (u smyčcových nástrojů, které se taky řídí jednorozměrnou vlnovou rovnicí, máme tři způsoby, protože můžeme měnit také rychlost c tím, že měníme napětí struny – např. jejím natahováním nebo tím, že ji nahradíme strunou jiné hustoty). Spojitou změnou L , jako na pozounu nebo při pískání, dosáhneme spojitě změny výšky tónu. Obvyklejší způsob, jak měnit L , je použít trubici s otvory, čímž umožníme diskrétní změny výšky. Jiná cesta pro změnu výšky je změnit n – to jest přeskakovat mezi řešeními vlnové rovnice.

Zbytek této práce má následující strukturu: V kapitole 2 se budeme zabývat odvozením vlnové rovnice pro akustiku a pro kmitání struny. V kapitole 3 se budeme zabývat analytickými řešeními rovnice (1.1). V kapitole 4 navrheme numerické řešení rovnice (1.1). V kapitole 5 provedeme porovnání numerického a analytického řešení. V kapitole 6 představíme realističtější model flétničky, který vznikne propojením rovnic elasticity a akustiky.

2 Odvození rovnic

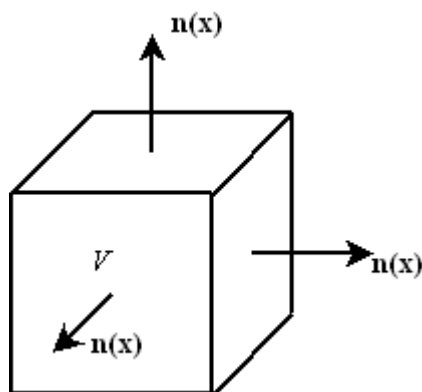
V této kapitole odvodíme vlnovou rovnici pro akustiku (1.1). Dále odvodíme rovnici pro kmitání a průhyb struny a ukážeme, že vede na řešení diferenciální rovnice (1.1).

2.1 Vlnová rovnice pro akustiku

Odvození vychází z článku[4]. Akustické vlny jsou malé oscilace tlaku $P(x, t)$ v ideální stlačitelné tekutině. Tyto oscilace se vzájemně ovlivňují a jejich energie se přenáší akustickým médiem (vzduchem v trubici flétničky). Rovnice pohybu vlny jsou odvozeny ze základních zákonů pro stlačitelné tekutiny.

Zákon zachování hmoty

Uvažujme tok tekutým materiálem s tlakem $P(\mathbf{x}, t)$, hustotou $\rho(\mathbf{x}, t)$ a vektorem průtokové rychlosti $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Nechť V je objemový element s povrchem ∂V a necht' $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial V$ je jednotkový normálový vektor směřující ven z elementu V . Potom $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ je normálová rychlost toku povrchem ∂V , viz Obr .2.1.



Obr. 2.1: Objemový element.

Zákon zachování hmoty v čase je vyjádřen vztahem

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \oint_{\partial V} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (2.1.1)$$

Plošný integrál na pravé straně převedeme na objemový podle Gaussovy věty,

$$\oint_{\partial V} (\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV. \quad (2.1.2)$$

Dosažením (2.1.2) do (2.1.1) a záměnou pořadí derivace a integrace získáme rovnici

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0,$$

která vede na diferenciální rovnici

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.1.3)$$

Rovnice pohybu

Předpokládejme, že objemový element V je vystaven hydrostatickému tlaku $P(\mathbf{x}, t)$. Celková síla působící na povrchu ∂V je potom $\mathbf{F} = -\oint_{\partial V} P \mathbf{n} dS$, kde \mathbf{n} značí vnější jednotkový normálový vektor k povrchu ∂V . Druhý Newtonův zákon $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, kde m je hmotnost a \mathbf{a} je zrychlení, nám dává vztah

$$-\oint_{\partial V} P \mathbf{n} dS = \iiint_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV. \quad (2.1.4)$$

Totální diferenciál na pravé straně integrálu je aproximovaný vztahem

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (2.1.5)$$

dále z Gaussovy věty dostáváme

$$-\oint_{\partial V} P \mathbf{n} dS = -\iiint_V \nabla P dV \quad (2.1.6)$$

a dosazením (2.1.5) a (2.1.6) do (2.1.4) dostáváme rovnici pohybu (Eulerova rovnice)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P. \quad (2.1.7)$$

Vlnová rovnice

Zvuk je podle definice malé odchýlení ideální tekutiny (P, ρ) od konstantního stavu (P_0, ρ_0) . Funkce $P(\mathbf{x}, t)$ a $\rho(\mathbf{x}, t)$ představují vibrace s malou amplitudou. Podle Eulerova vztahu jsou rychlosti také malé. Za předpokladu lineárního zákona materiálu můžeme psát

$$P(\mathbf{x}, t) = c^2 \rho(\mathbf{x}, t),$$

kde materiálová konstanta c je rychlost zvuku. Druhou derivací podle času, aproximací $\nabla \rho \approx 0$, dosazením (2.1.3) a (2.1.7) dostáváme

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial(-c^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}))}{\partial t} = -c^2 \rho_0 \operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) = c^2 \operatorname{div}(\nabla P) = c^2 \Delta P.$$

Potom můžeme napsat vlnovou rovnici ve tvaru

$$\Delta P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1.8)$$

kde $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ je Laplaceův operátor v \mathbb{R}^3 . Když bude $P(x, y, z, t) \equiv P(x, t)$ (případ

flétničky), potom rovnice (2.1.8) vede na 1-dimenzionální úlohu

$$c^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2}$$

viz (1.1).

Poznámka 2.1

Totální diferenciál

$$\frac{d \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (2.1.8)$$

Dosazením $v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t}$, $v_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t}$, $v_3 = \frac{\partial x_3}{\partial t}$ do (2.1.8) dostáváme

$$\frac{d \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ v_2 \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ v_3 \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}.$$

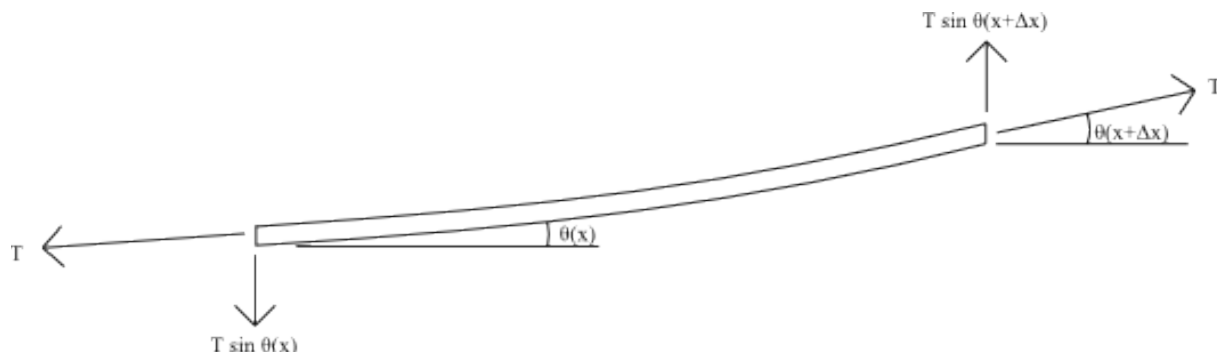
Nahrazením $\frac{d \mathbf{v}}{dt} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ zanedbáváme člen $(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}$, toto zanedbání si můžeme dovolit viz [5].

2.2 Kmitání struny

Uvažujme strunu pevně uchycenou na obou svých koncích. K přesnějšímu popisu kmitání struny musíme znát vychýlení ve směru osy y . Budeme zkoumat výchylku y jako funkci dvou proměnných, a to času t a polohy x podél struny. Nyní odvodíme rovnici kmitání struny za předpokladu, že jakékoli vychýlení y v jakémkoli bodu x a čase t je „malé“. Pro velká vychýlení y je analýza a odvození rovnice kmitání složitější. Poznamenejme, že se budeme zabývat pouze příčnými vlnami, tj. pohybem kolmým na strunu. Podélné vlnění zanedbáme.

Označme písmenem T napětí působící na strunu (v newtonech = $\text{kg m} / \text{s}^2$) a písmenem ρ délkovou hustotu struny (v kg / m). Potom pro libovolné x a příslušný úhel $\theta(x)$ mezi strunou a

horizontální osou x platí $\tan \theta(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$. Pro dostatečně malý úsek struny z bodu x do bodu $(x + \Delta x)$ bude vertikální (y-ová) složka síly na levém konci vybraného úseku struny - $T \sin \theta(x)$ a na pravém konci $T \sin \theta(x + \Delta x)$, viz Obr 2.1.



Obr. 2.1: Detail struny.

Když bude $\theta(x, t)$ dostatečně malé, můžeme říct že hodnoty $\sin \theta(x, t)$ a $\tan \theta(x, t)$ jsou přibližně stejné. Protože funkce tangens je lichá, bude rozdíl ve vertikální (y-ové) složce síly mezi oběma konci malého úseku struny přibližně

$$\begin{aligned} T \tan \theta(x + \Delta x, t) - T \tan \theta(x, t) &= T \left(\frac{\partial y(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) \\ &= T \Delta x \frac{\frac{\partial y(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}}{\Delta x} \\ &\approx T \Delta x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Hmotnost malého kousku struny může aproximovat $\rho \Delta x$ a podle Newtonova zákona $F = ma$, kde m je

hmotnost a $a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ zrychlení dostaneme

$$T \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx (\rho \Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

a zkrácením Δx na obou stranách dostáváme

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Jinými slovy, pokud úhel $\theta(x, t)$ bude dostatečně malý, je pohyb struny popsán vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (2.2.1)$$

kde $c = \sqrt{T/\rho}$. Později ukážeme, že konstanta c je rychlost šíření vlny ve směru osy x .

3 Analytické řešení vlnové rovnice

V této kapitole vyřešíme diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}$$

nejprve klasickou metodou pomocí separace proměnných a potom si ukážeme řešení d' Alemberta.

3.1 Metoda separace proměnných

V tomto odstavci se budeme zabývat jedním harmonickým řešením vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1.1)$$

kde $U(x, t)$ může být přetlak v trubici flétny nebo výchylka struny ve směru osy y . Předpokládejme, že řešení je součinem funkcí času a polohy, tzv. separace proměnných. Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$U(x, t) = \varphi(x)\psi(t). \quad (3.1.2)$$

Dosadíme-li

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} &= \varphi(x)\psi''(t) \\ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} &= \varphi''(x)\psi(t) \end{aligned}$$

do levé a pravé strany rovnice (3.1.1) dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi(x)\psi''(t) &= c^2 \varphi''(x)\psi(t) \\ \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= c^2 \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Aby bylo možné nalézt řešení, musí být pravá i levá strana (3.1.3) konstantní. Potom můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= c^2 \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\omega^2 \\ \psi''(t) &= -\omega^2 \psi(t) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\varphi''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} \varphi(x). \quad (3.1.5)$$

Rovnice (3.1.4) a (3.1.5) mají známé analytické řešení:

$$\psi(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.1.6)$$

a

$$\varphi(x) = B \sin\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right), \quad (3.1.7)$$

což dokážeme dosazením (3.1.6) do rovnice (3.1.4) a (3.1.7) do (3.1.5):

$$\begin{aligned} \psi(t) &= A \sin(\omega t + \alpha) \\ \psi'(t) &= \omega A \cos(\omega t + \alpha) \\ \psi''(t) &= -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \psi(t) \\ \varphi(x) &= B \sin\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right) \\ \varphi'(x) &= \frac{\omega}{c} B \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right) \\ \varphi''(x) &= -\frac{\omega^2}{c^2} B \sin\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right) = -\frac{\omega^2}{c^2} \varphi(x). \end{aligned}$$

Dosazením (3.1.6) a (3.1.7) do rovnice (3.1.2) dostaneme řešení ve tvaru

$$U(x, t) = A \sin\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right) \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.1.8)$$

a dosazením do (3.1.1) snadno ověříme, že rovnice (3.1.8) je řešením (3.1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} &= \frac{\omega}{c} A \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right) \sin(\omega t + \alpha) \\ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{\omega^2}{c^2} A \sin\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right) \sin(\omega t + \alpha) \\ \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} &= \omega A \sin\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right) \cos(\omega t + \alpha) \\ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \sin\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right) \sin(\omega t + \alpha) \\ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Nyní vyřešíme okrajové podmínky úlohy. Flétnička i struna mají stejné okrajové podmínky. Flétnička má otevřené oba konce, to znamená, že $U(0, t) = 0$ a $U(L, t) = 0$, kde L je délka flétničky. Po dosazení okrajové podmínky $U(0, t) = 0$ do (3.1.8) dostáváme rovnici

$$A \sin(\beta) \sin(\omega t + \alpha) = 0,$$

která musí platit pro všechny časy $t \in \mathbb{R}^+$. Tato podmínka je splněna při $\beta = 0$. To znamená, že řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$U(x, t) = A \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.1.9)$$

Dosazením druhé okrajové podmínky $U(L,t) = 0$ do (3.1.9) získáme příslušné kmitočty vlnění ve flétničce

$$A \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) \sin(\omega t + \alpha) = 0, \quad (3.1.10)$$

tato rovnice bude splněna pro všechny časy t , právě když $\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0$. To znamená, že

$$\frac{\omega}{c}L = k\pi \quad \text{a} \quad \omega = \frac{k\pi c}{L}.$$

Jestliže ω označíme úhlovou rychlost, potom příslušné frekvence vlnění vzduchu ve flétničce jsou

$$2\pi f = \frac{k\pi c}{L} \quad \text{a} \quad f = \frac{k c}{2L} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N},$$

viz vztah (1.2).

Poznámka 3.1

Rovnici (3.1.10) řeší nejen $\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0$, ale řešením je také $A = 0$. Toto řešení nás ovšem nezajímá.

3.2 d'Alembertovo řešení

D'Alembert objevil zajímavou metodu k nalezení obecného řešení rovnice (2.2.1). Řešení získal ve tvaru

$$y(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct). \quad (3.2.1)$$

Odvození tohoto řešení se nachází v [3]. My pouze ověříme, že se skutečně jedná o řešení rovnice (2.2.1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} &= f'(x+ct) + g'(x-ct) & \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} &= f''(x+ct) + g''(x-ct) \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= cf'(x+ct) - cg'(x-ct) & \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= c^2 f''(x+ct) + c^2 g''(x-ct) \end{aligned}$$

Dosazením do (2.2.1) jsme ověřili, že (3.2.1) řeší rovnici (2.2.1).

Toto řešení představuje superpozici dvou vln, první se pohybuje doprava a druhá doleva rychlostí c . Ze zadání úlohy víme, že krajní konce struny jsou upevněny, to znamená, že pro $x = 0$ nebo $x = l$ je $y = 0$ (nezávisle na čase). Z podmínky pro $x = 0$ vyplývá

$$0 = f(ct) + g(-ct)$$

pro všechna t , čili

$$g(\lambda) = -f(-\lambda) \quad (3.2.2)$$

pro jakákoli λ . Dosazením (3.2.2) do (3.2.1) dostáváme

$$y = f(x+ct) - f(-x+ct).$$

Fyzikálně to znamená, že vlnění se pohybuje k levému konci struny a poté se vrací jako převrácené vlnění k pravému konci struny. Toto se nazývá odraz vlnění.

Dosazením druhé okrajové podmínky $x = l, y = 0$ dostáváme

$$f(l+ct) = f(-l+ct)$$

pro všechna t , čili

$$f(\lambda) = f(\lambda+2l) \quad (3.2.3)$$

pro všechna λ .

Věta 1 (d' Alembert)

Obecné řešení vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.2.4)$$

je dáno ve tvaru

$$y = f(x+ct) + g(x-ct).$$

Řešení splňující okrajové podmínky $y = 0$ pro $x = 0$ a $x = l$ pro všechna t můžeme napsat ve tvaru

$$y = f(x+ct) - f(-x+ct),$$

kde f splňuje $f(\lambda) = f(\lambda+2l)$ pro všechna λ .

Z rovnice (3.2.3) vyplývá, že funkce f je podle d' Alembertova řešení periodická s periodou $2l$ a tedy funkce f má rozvoj ve tvaru Fourierovy řady. Za předpokladu přítomnosti pouze elementárních frekvencí bude pak funkce $f(x)$ sinusová vlna

$$f(x) = C \sin\left(\frac{\pi x}{l} + \Phi\right).$$

Když budou přítomné pouze n -té harmonické, pak můžeme funkci $f(x)$ zapsat ve tvaru

$$f(x) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{l} + \Phi\right)$$

a řešení vlnové rovnice

$$y = C \sin\left(\frac{n\pi(x+ct)}{l} + \Phi\right) - C \sin\left(\frac{n\pi(ct-x)}{l} + \Phi\right).$$

Více v [3].

Poznámka 3.1

d' Alembertovo řešení je velmi zajímavé i z jiného pohledu. Ačkoliv vlnová rovnice (3.2.4) dává smysl pouze pro funkce, které mají spojité druhé derivace, d' Alembertovo řešení dává smysl pro všechny spojité a periodické funkce. Toto je běžný jev u řešení parciálních diferenciálních rovnic, proto taky hledáme řešení v integrálním tvaru, který je mnohem obecnější než funkce v

diferencovatelném tvaru.

3.3 Počáteční podmínky

Nyní ukážeme, že analýza rovnice (3.2.4) popsaná v předcházejícím odstavci spolu s počátečními podmínkami jednoznačně popisuje pohyb každého bodu struny.

Nechť funkce $s_0(x)$ vyjadřuje počáteční vychýlení bodu x na ose y a funkce $v_0(x)$ vyjadřuje počáteční rychlost pohybu bodu x , pro $x \in \langle 0, l \rangle$. Funkce $s_0(x)$ a $v_0(x)$ musí splňovat okrajové podmínky na obou koncích struny, to znamená, že $s_0(0) = s_0(l) = 0$ a $v_0(0) = v_0(l) = 0$. Nejdříve rozšíříme funkce $s_0(x)$ a $v_0(x)$ na všechny hodnoty x užitím principu odrazu vlnění. Rozšíříme funkce $s_0(x)$ a $v_0(x)$ na liché funkce, to znamená, že $s_0(-x) = -s_0(x)$ a $v_0(-x) = -v_0(x)$. Tím jsme rozšířili hodnoty x na interval $x \in \langle -l, l \rangle$. Nyní rozšíříme funkce $s_0(x)$ a $v_0(x)$ na funkce periodické s periodou $2l$, to znamená, že $s_0(x+2l) = s_0(x)$ a $v_0(x+2l) = v_0(x)$.

Rovnice d'Alembertova řešení

$$y = f(x+ct) - f(-x+ct), \quad (3.3.1)$$

kde funkce f je periodická s periodou $2l$. Derivací (3.3.1) podle t dostaneme rovnici pro rychlost

$$\frac{\partial y}{\partial t} = cf'(x+ct) - cf'(-x+ct). \quad (3.3.2)$$

Dosazením $t = 0$ do (3.3.1) a do (3.3.2) dostaneme soustavu rovnic

$$f(x) - f(-x) = s_0(x) \quad (3.3.3)$$

$$cf'(x) - cf'(-x) = v_0(x). \quad (3.3.4)$$

Protože funkce f je lichá, tak její derivace je sudá

$$(f(x))' = f'(x)$$

$$(-f(-x))' = -f'(-x) \cdot (-1) = f'(-x).$$

Přepsáním rovnice (3.3.4)

$$cf'(x) - cf'(x) = v_0(x)$$

a následnou integrací dostáváme

$$cf(x) - cf(x) = \int_0^x v_0(u) du \quad (3.3.5)$$

a protože f je lichá funkce, můžeme (3.3.5) přepsat do tvaru

$$cf(x) + cf(-x) = \int_0^x v_0(u) du. \quad (3.3.6)$$

Dělením rovnice (3.3.6) konstantou c a následným přičtením k rovnici (3.3.3) dostaneme

$$f(x) = \frac{1}{2}s_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(u) du$$

a zpětným dosazením do (3.3.1) dostáváme

$$y = \frac{1}{2}(s_0(x + ct) - s_0(-x + ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} v_0(u) du - \int_0^{-x+ct} v_0(u) du \right)$$

a protože v_0 je lichá funkce, tak platí

$$\int_{x-ct}^{-x+ct} v_0(u) du = 0$$

a řešení (3.2.4) můžeme přepsat do tvaru

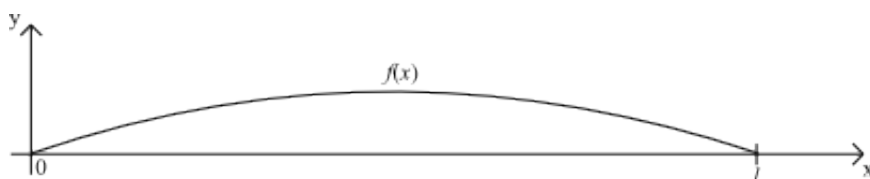
$$y = \frac{1}{2}(s_0(x + ct) - s_0(-x + ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(u) du \right). \quad (3.3.7)$$

4 Numerické řešení

V této kapitole navrhneme numerické řešení diferenciální rovnice (3.1.1) pomocí metody konečných diferencí. Dále na základě numerického řešení navrhneme algoritmus, který bude počítat a zobrazovat pohyb struny.

4.1 Numerická metoda konečných diferencí

Nyní popíšeme metodu konečných diferencí. Toto řešení může popisovat průhyb struny nebo přetlak v trubici flétničky. Struna je pevně uchycena v bodě $x = 0$ a v bodě $x = l$. Průhyb struny se řídí rovnicí (2.2.1). Na Obr. 4.1 je zobrazeno výchozí prohnutí struny $f_0(x)$ v čase $t = 0$. $U(x, t)$ vyjadřuje vychýlení na ose y bodu x v čase t .



Obr. 4.1: Počáteční průhyb struny.

Z počátečních a okrajových podmínek a z rovnice průhybu struny víme, že řešení musí splňovat následující rovnice:

- Rovnice kmitání struny
$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in (0, l), \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.1.1)$$

- Uchycení obou konců
$$U(0, t) = U(l, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+. \quad (4.1.2)$$

- Počáteční vychýlení v čase $t = 0$
$$U(x, 0) = f_0(x) \quad \forall x \in \langle 0, l \rangle. \quad (4.1.3)$$

- Počáteční rychlost je nulová
$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad \forall x \in \langle 0, l \rangle. \quad (4.1.4)$$

Protože v numerickém řešení nemůžeme použít spojitě veličiny, tak nahradíme tuto úlohu její diskrétní aproximací. Diskretizaci osy x provedeme tak, že ji rozdělíme na dostatečně malé dílky. Pro zjednodušení budeme požadovat, aby velikost jednotlivých dílků Δx byla konstantní. Rozdělení musí potom splňovat následující vlastnosti:

- $x_0 = 0$ počáteční bod
- $x_n = n \Delta x$, $n \in \mathbb{N}$ koncový bod
- $x_{i+1} - x_i = \Delta x \quad \forall i = 1, \dots, n-1$ konstantní délky všech dílků.

Obdobným způsobem provedeme diskretizaci času:

- $t_0 = 0$
- $t_m = m \cdot \Delta t, m \in \mathbb{N}$

Nyní nahradíme druhé parciální derivace derivacemi numerickými. Vydeme z definice derivace

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h, t) - U(x, t)}{h},$$

kde zanedbáme limitu a h nahradíme konstantní hodnotou Δx . Použijeme tzv. dopřednou aproximaci první derivace

$$\frac{U(x_i, t)}{\partial x} \approx \frac{U(x_{i+1}, t) - U(x_i, t)}{\Delta x}$$

a centrální aproximaci druhé derivace

$$\frac{\partial^2 U(x_i, t)}{\partial x^2} \approx \frac{U'(x_i, t) - U'(x_{i-1}, t)}{\Delta x}.$$

Aplikací na naši rovnici dostáváme

$$\frac{\partial^2 U(x_i, t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{\partial U(x_i, t_j)}{\partial x} - \frac{\partial U(x_{i-1}, t_j)}{\partial x}}{\Delta x} = \frac{\frac{U(x_{i+1}, t_j) - U(x_i, t_j)}{\Delta x} - \frac{U(x_i, t_j) - U(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 U(x_i, t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{U(x_{i+1}, t_j) - 2U(x_i, t_j) + U(x_{i-1}, t_j))}{(\Delta x)^2}, \quad i=1,2,3,\dots,n-1, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Dále si uvědomíme, že $\frac{\partial U(x, t)}{\partial t}$ vyjadřuje rychlost bodu x v čase t . Označíme-li rychlost bodu x_i v čase t_j $v(x_i, t_j)$ pro $i=\{0,1,2,\dots,n\}, j \in \mathbb{N}_0$, můžeme postupně přepsat rovnice (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) a (4.1.4) na:

$$\frac{v(x_i, t_{j+1}) - v(x_i, t_j)}{\Delta t} - c^2 \frac{U(x_{i+1}, t_j) - 2U(x_i, t_j) + U(x_{i-1}, t_j))}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (4.1.5)$$

pro $i=1,2,3,\dots,n-1, j \in \mathbb{N}_0$.

Okrajová podmínky:

$$U(x_0, t_j) = U(x_n, t_j) = 0, \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad (4.1.6)$$

a počáteční podmínky:

$$U(x_i, 0) = f_0(x_i) \quad i=0,1,2,\dots,n, \quad (4.1.7)$$

$$v(x_i, 0) = 0 \quad i=0,1,2,\dots,n. \quad (4.1.8)$$

4.2 Algoritmus průhybu struny

Nyní ukážeme, jak určit vychýlení struny $U(x,t)$ pro všechna x a t . K tomu využijeme rovnice (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7), (4.1.8) a navíc přidáme podmínku, že rychlost krajních bodů struny musí být nulová $v(x_0, t_j) = v(x_n, t_j) = 0$ pro všechny časy t_j , $j \in \mathbb{N}_0$.

Postup výpočtu:

1. Nejprve dosadíme do (4.1.5) počáteční vychýlení a rychlosti v čase t_j , $j = 0$, které získáme z počátečních podmínek (4.1.7) a (4.1.8).
2. Z rovnice (4.1.5) vyjádříme rychlost v čase t_{j+1} :

$$v(x_i, t_{j+1}) = c^2 \frac{U(x_{i+1}, t_j) - 2U(x_i, t_j) + U(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x} + v(x_i, t_j).$$

3. Z rychlosti v čase t_{j+1} vyjádříme vychýlení $U(x_i, t_{j+1})$ v čase t_{j+1} pro $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$:

$$U(x_i, t_{j+1}) = U(x_i, t_j) + v(x_i, t_{j+1}) \Delta t.$$

4. Vypočteme $t_{j+1} = t_j + \Delta t$ a zpět ke kroku 2.

Ukázkový program v Matlabu je v příloze A v souboru *numRes.m*.

5 Porovnání analytického a numerického řešení

V této kapitole provedeme porovnání numerického a analytického řešení. K porovnání použijeme d'Alembertovo analytické řešení (3.3.7). Dále provedeme měření velikosti chyby numerického řešení v závislosti na zvolené diskretizaci času t a osy x .

5.1 Algoritmus d'Alembertova řešení

Připomeňme, že d'Alembertovo řešení (3.3.7) je ve tvaru

$$y = \frac{1}{2}(s_0(x + ct) - s_0(-x + ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(u) du \right),$$

kde s_0 a v_0 jsou liché periodické funkce, obě mají periodou $2l$, kde funkce $s_0(x)$ vyjadřuje výchylku bodu x na ose y v čase $t=0$ a funkce $v_0(x)$ vyjadřuje rychlost bodu x v čase $t=0$. Protože u numerického modelu předpokládáme nulovou počáteční rychlost (4.1.4), tak funkce $v_0(x) = 0$ a proto celý integrál v (3.3.7) bude také nulový a my můžeme řešení napsat ve tvaru

$$y = \frac{1}{2}(s_0(x + ct) - s_0(-x + ct)). \quad (5.1.1)$$

U numerického modelu nám počáteční prohnutí struny (4.1.3) v čase $t=0$ určuje funkce $f_0(x)$. Funkce $f_0(x)$ je definována pouze na intervalu $\langle 0, l \rangle$. Abychom mohli v (5.1.1) zaměnit funkci $f_0(x)$ za $s_0(x)$ musíme rozšířit definiční obor funkce $f_0(x)$ na všechna reálná čísla, zajistit lichost funkce $f_0(x)$ a periodicitu s periodou $2l$.

Tyto požadavky vyřešíme v algoritmu:

- Když bude x záporné, tak $f_0(x) = -f_0(-x)$. Tím je zajištěna lichost funkce $f_0(x)$.
- Když $x \notin \langle -l, l \rangle$, tak $x_{\text{nové}} = x + n2l$, kde n je celé číslo takové, aby $x_{\text{nové}} \in \langle -l, l \rangle$. Tím je zajištěna periodicitu $f_0(x)$.

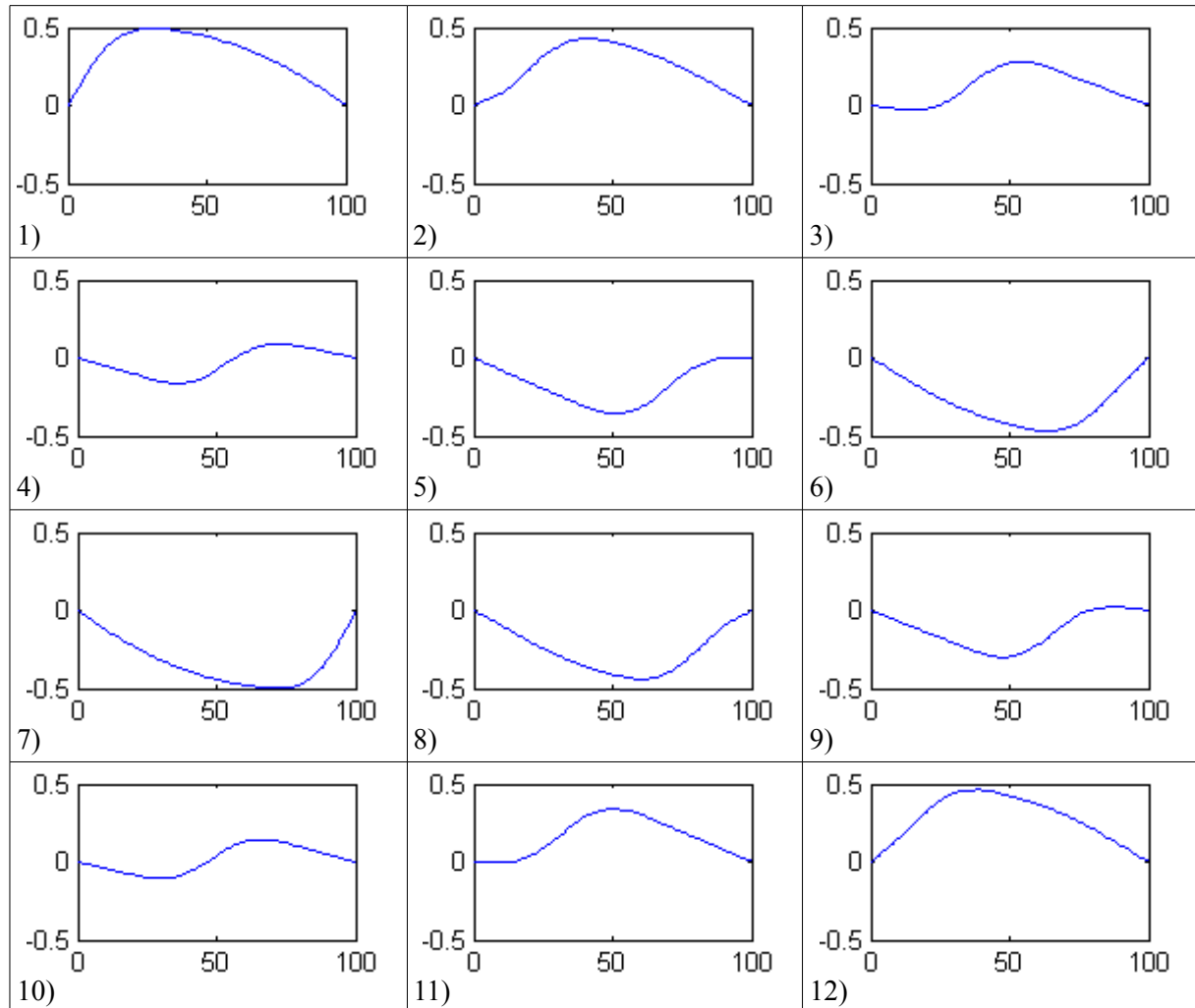
Předpokládejme, že \mathbf{x} je vektor bodů z intervalu $\langle 0, l \rangle$ a \mathbf{y} je vektor příslušných vychýlení na ose y . Potom bude algoritmus d'Alembertova řešení vypadat následovně:

1. Nastavení počátečního času $t = 0$
2. Z (5.1.1) a rozšířené funkce $f_0(x)$ $\mathbf{y} = \frac{1}{2}(f_0(\mathbf{x} + ct) - f_0(-\mathbf{x} + ct))$.
3. $t = t + \Delta t$.
4. Jdi na krok 2.

Ukázkový program naprogramovaný v Matlabu je v příloze A v souboru *alem.m*.

5.2 Zobrazení kmitání během jedné periody

Ilustraci průhybu struny během jedné periody si ukážeme na následujícím obrázku Obr. 5.1.



Obr. 5.1: Průběh kmitání struny.

5.3 Velikost chyby v závislosti na diskretizaci

V této kapitole provedeme měření velikosti chyby numerického řešení v závislosti na volbě Δt a Δx . Chybu v čase t budeme počítat jako integrál absolutních hodnot rozdílu numerického a analytického řešení v daném čase, tj.:

$$\text{chyba}(t_j) = \int_0^l |U_n(x, t_j) - U_a(x, t_j)| dx,$$

kde U_n je numerické a U_a je d'Alembertovo řešení.

Pro výpočet jsme zvolili bezrozměrné veličiny a to takto:

- Délka trubice $l = 100$.
- Rychlost $c = 500$.
- Perioda $T = \frac{2l}{c}$.

$\Delta x = l/1000 = 0,1$							
$\Delta t \backslash \text{čas}$	1T	2T	4T	8T	20T	50T	100T
T/2000	0,00106	0,00106	0,00106	0,00106	0,00106	0,00106	0,00106
T/2100	0,00101	0,00188	0,00171	0,00192	0,00309	0,00631	0,00784
T/2200	0,00193	0,00171	0,00258	0,00240	0,00469	0,00764	0,00943
T/2300	0,00169	0,00184	0,00252	0,00367	0,00678	0,00867	0,01053
T/2400	0,00145	0,00210	0,00254	0,00407	0,00757	0,00912	0,01166
T/2500	0,00160	0,00260	0,00328	0,00495	0,00832	0,00973	0,01215
T/3000	0,00231	0,00321	0,00572	0,00828	0,00856	0,01137	0,01744

Tab. 1: Měření chyby pro pevné $\Delta x = 0,1$ v závislosti na Δt a čase.

$\Delta x = l/400 = 0,25$							
$\Delta t \backslash \text{čas}$	1T	2T	4T	8T	20T	50T	100T
T/800	0,00662	0,00662	0,00662	0,00662	0,00662	0,00662	0,00662
T/850	0,00623	0,00622	0,01177	0,01098	0,01609	0,02600	0,03251
T/900	0,00591	0,01110	0,01078	0,01439	0,02666	0,03213	0,04676
T/950	0,00888	0,01026	0,01123	0,02061	0,02601	0,03431	0,05019
T/1000	0,00924	0,01058	0,01610	0,02447	0,02949	0,04308	0,05328
T/2000	0,02520	0,03649	0,02974	0,02971	0,04232	0,06418	0,14174
T/3000	0,03859	0,03727	0,03205	0,03007	0,04380	0,07293	0,15499

Tab. 2: Měření chyby pro pevné $\Delta x = 0,25$ v závislosti na Δt a čase.

$\Delta x = l/200 = 0,5$							
$\Delta t \backslash \text{čas}$	1T	2T	4T	8T	20T	50T	100T
T/400	0,02631	0,02631	0,02631	0,02631	0,02631	0,02631	0,02631
T/450	0,02324	0,02341	0,04427	0,04781	0,08286	0,08369	0,15348
T/500	0,03822	0,03704	0,04691	0,06831	0,08288	0,13715	0,20947
T/600	0,03307	0,05439	0,07266	0,07387	0,08366	0,19070	0,18822
T/1000	0,06358	0,08722	0,07563	0,08928	0,13508	0,21374	0,26560
T/2000	0,10194	0,08313	0,08096	0,08683	0,15395	0,20008	0,32483
T/3000	0,09976	0,09096	0,07301	0,08365	0,15740	0,19705	0,33717

Tab. 3: Měření chyby pro pevné $\Delta x = 0,5$ v závislosti na Δt a čase.

$\Delta x = l/100 = 1$							
$\Delta t \backslash \text{čas}$	1T	2T	4T	8T	20T	50T	100T
T/200	0,10382	0,10382	0,10382	0,10382	0,10382	0,10382	0,10382
T/250	0,08498	0,14786	0,18211	0,19041	0,27647	0,26881	0,54866
T/300	0,12200	0,14201	0,20866	0,23825	0,27655	0,42087	1,04616
T/400	0,19812	0,19744	0,19596	0,28248	0,25892	0,63829	1,68094
T/1000	0,23756	0,22969	0,21196	0,29696	0,29355	0,95272	2,33330
T/2000	0,24973	0,22738	0,23673	0,29741	0,31930	1,00622	2,40252
T/3000	0,25243	0,21271	0,24719	0,29862	0,30758	1,01120	2,42275

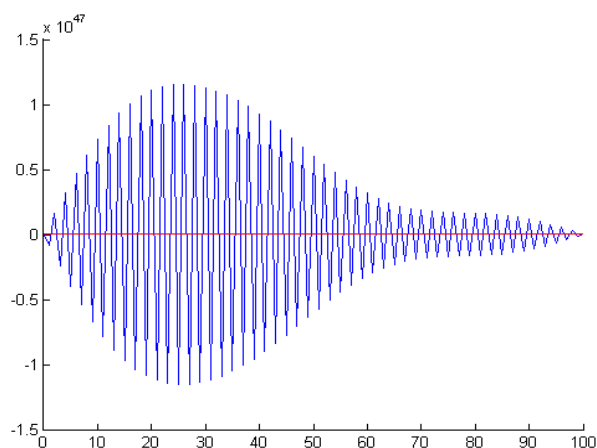
Tab. 4: Měření chyby pro pevné $\Delta x = 1$ v závislosti na Δt a čase.

Pro zajímavost připojuji tabulku Tab. 5 s měřením, které není dokončeno z důvodu časové náročnosti výpočtu. V tomto měření jsme zvolili 10 krát jemnější diskretizaci než v měření Tab. 1 a tomu odpovídá taky 10 krát jemnější časová diskretizace a dosažená přesnost řešení.

$\Delta x = l/10000 = 0,01$							
$\Delta t \backslash \text{čas}$	1T	2T	4T	8T	20T	50T	100T
T/20000	0,01066	0,01066					
T/25000	0,04137	0,06266					
T/30000	0,06718	0,09476					
T/35000	0,09492	0,13097					
T/40000	0,12706	0,17864					
T/45000	0,16280	0,24559					
T/50000	0,18509	0,30452					
	1.0e-003 *	1.0e-003 *					

Tab. 5: Měření chyby pro pevné $\Delta x = 0,01$ v závislosti na Δt a čase.

Pro všechna měření (Tab. 1-5) platí, že při volbě „trochu většího“ Δt se chyba velice rychle blíží do nekonečna, to znamená, že numerický model přestal fungovat Obr. 5.2.

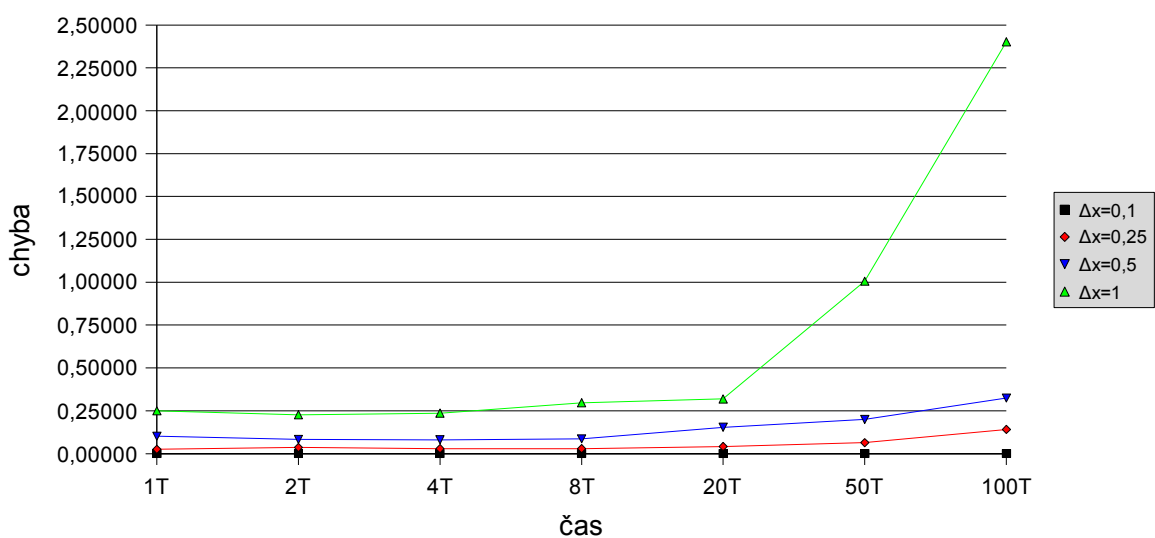


Obr. 5.2: Chyba numerického (modré) řešení od analytického (červené).

Z tabulek Tab. 1 – Tab.5 je vidět, že při vhodné volbě Δt pro pevné Δx chyba numerického řešení není závislá na délce výpočtu. Dokonce pro všechna měření platí: $\Delta x = \frac{l}{s}$, pro $s = \{100, 200, 400, 1000, 10000\}$, tak ideální časová diskretizace bude $\Delta t = \frac{2l}{2cs}$.

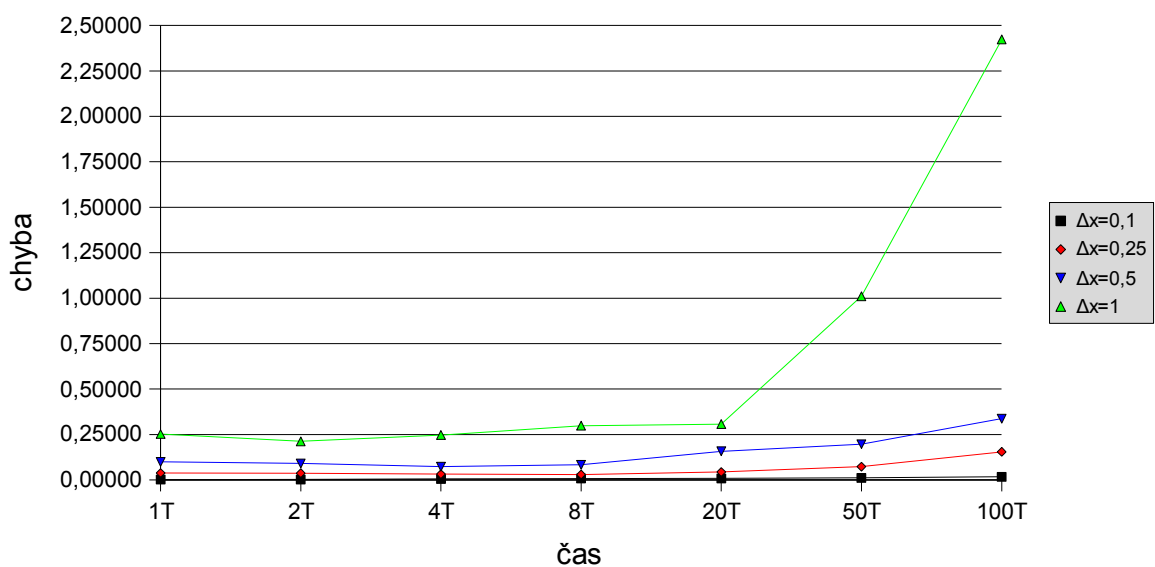
Lepší znázornění chyby v závislosti na volbě Δx a celkové době výpočtu uvidíme v následujících 2 grafech pro $\Delta t = T/2000$ a $\Delta t = T/3000$.

$\Delta t = T/2000$



Graf 1: Velikost chyby v závislosti na čase.

$\Delta t = T/3000$



Graf 2: Velikost chyby v závislosti na čase.

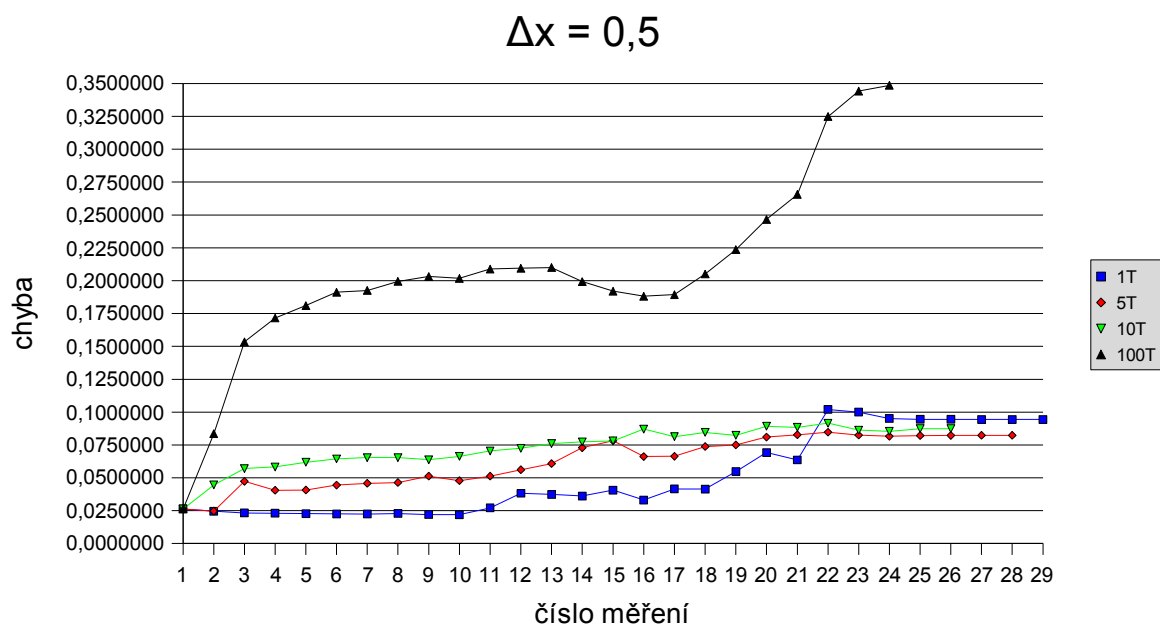
5.4 Detailní analýza chyby pro $\Delta x = 0,5$

Z grafů (Graf 1 a Graf 2) je vidět, že chyba pro $\Delta x = 0,5$ vzrůstá pro 100 násobek periody lineárně a protože je toto řešení výpočetně nejméně náročné, provedeme přesnější měření velikosti chyby v závislosti na Δt a času výpočtu.

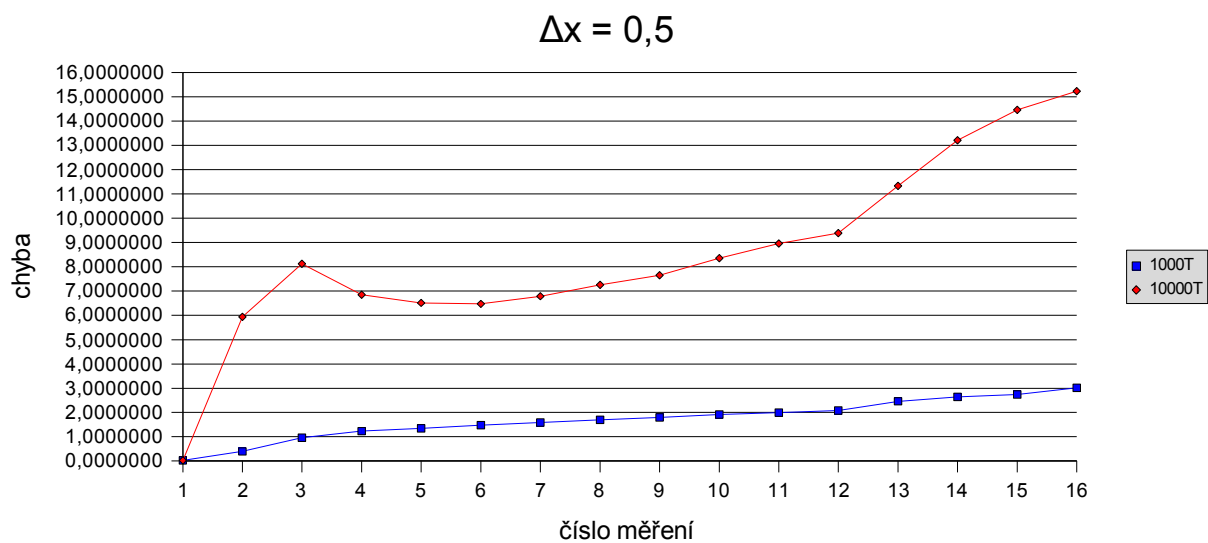
č.m	$\Delta x=0,5$	1T	5T	10T	100T	1000T	10000T
1	T/400	0,0263111	0,0263111	0,0263111	0,0263111	0,0263111	0,0263111
2	T/425	0,0245765	0,0246728	0,0445495	0,0834921	0,3965476	5,9419799
3	T/450	0,0232394	0,0472332	0,0570543	0,1534833	0,9610371	8,1222881
4	T/460	0,0230280	0,0405231	0,0582499	0,1715590	1,2314980	6,8503279
5	T/465	0,0227763	0,0407212	0,0618398	0,1810607	1,3465176	6,5141104
6	T/470	0,0226067	0,0444882	0,0644082	0,1911998	1,4731306	6,4700561
7	T/475	0,0224107	0,0458280	0,0653187	0,1925927	1,5881103	6,7894799
8	T/480	0,0228740	0,0464121	0,0653689	0,1994303	1,6988266	7,2557608
9	T/485	0,0220072	0,0512772	0,0637212	0,2031431	1,7972491	7,6552650
10	T/490	0,0218922	0,0478590	0,0662220	0,2017399	1,9151194	8,3589025
11	T/495	0,0271412	0,0512713	0,0704469	0,2088463	1,9943763	8,9569805
12	T/500	0,0382226	0,0561520	0,0725144	0,2094656	2,0839810	9,3846538
13	T/525	0,0373537	0,0608644	0,0759952	0,2099366	2,4612792	11,3356259
14	T/550	0,0360999	0,0728704	0,0774111	0,1993090	2,6444833	13,2106144
15	T/575	0,0405922	0,0781852	0,0781019	0,1920487	2,7376667	14,4629077
16	T/600	0,0330737	0,0661720	0,0871010	0,1882192	3,0151568	15,2294234
17	T/650	0,0415613	0,0664206	0,0812940	0,1893429	3,5635937	
18	T/700	0,0413966	0,0738317	0,0846015	0,2050662	3,9185805	
19	T/800	0,0546859	0,0749902	0,0823086	0,2236105	4,3434267	
20	T/900	0,0691719	0,0810013	0,0891685	0,2466167	4,4759318	
21	T/1000	0,0635763	0,0826943	0,0884554	0,2655997	4,5743898	
22	T/2000	0,1019440	0,0846934	0,0915557	0,3248350		
23	T/5000	0,0999658	0,0824444	0,0862715	0,3442040		
24	T/10000	0,0950866	0,0816089	0,0854246	0,3486639		
25	T/50000	0,0945116	0,0821267	0,0874163			
26	T/100000	0,0944812	0,0821927	0,0874254			
27	T/500000	0,0944583	0,0822664				
28	T/1000000	0,0944554	0,0822768				
29	T/10000000	0,0944528					

Tab. 6: Velikost chyby v závislosti na Δt a čase.

Výsledky z Tab. 6 zobrazíme v grafech:



Graf 3: Velikost chyby pro $\Delta x = 0,5$ v závislosti na Δt .



Graf 4: Velikost chyby pro $\Delta x = 0,5$ v závislosti na Δt .

Pro všechna měření Tab.1 – Tab. 6 byla použita stejná výchozí funkce s maximální počáteční výchylkou $f_0(25) = 0,5$ Obr.5.1-1. U každého měření se vyskytuje vhodná volba Δt taková, že chyba není závislá na počtu period. V Tab. 7 ukážeme relativní chybu měření pro vhodné pro Δt .

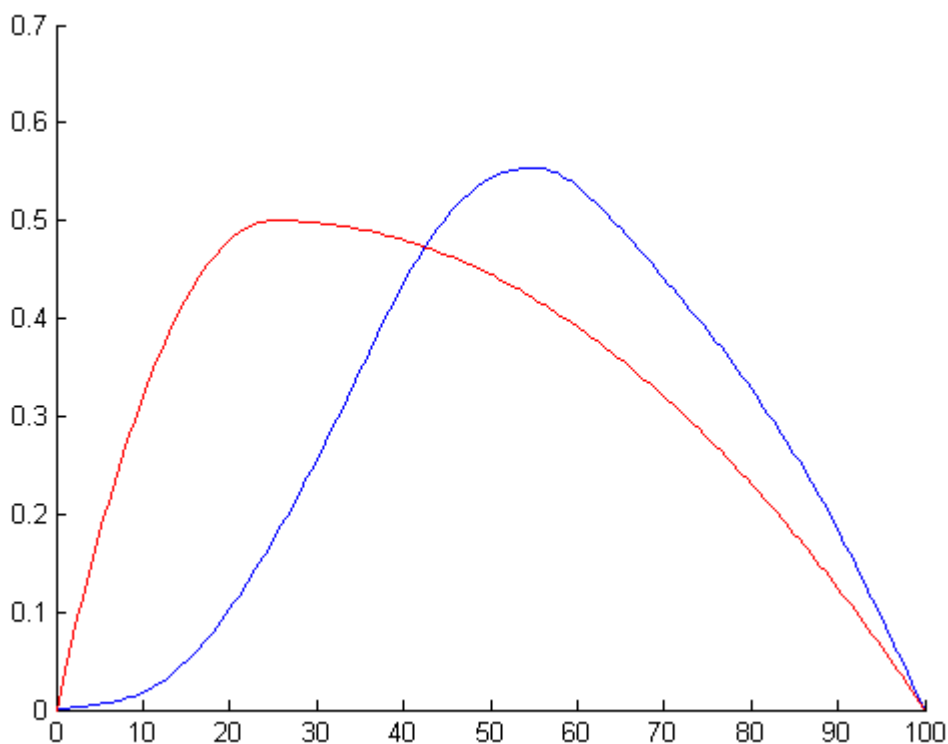
Δx	Anal. řešení	Anal. řeš. Num. výpočet		Chyba		Num. řeš	Chyba	
	Výsledek	Výsledek	Abs	Rel	Výsledek	Abs	Rel	
0,01	33,3333333	33,3333342	-0,0000009	-0,0000027	33,3333276	0,0000058	0,0000173	
0,1	33,3333333	33,3334219	-0,0000885	-0,0002656	33,3327564	0,0005769	0,0017307	
0,25	33,3333333	33,3338833	-0,0005500	-0,0016500	33,3297361	0,0035972	0,0107928	
0,5	33,3333333	33,3355111	-0,0021778	-0,0065333	33,3190000	0,0143333	0,0430185	
1	33,3333333	33,3418667	-0,0085333	-0,0256000	33,2764444	0,0568889	0,1709584	

Tab. 7: Velikost chyby pro nejlepší časovou diskretizaci Δt .

Z tabulky vyplývá že numerické řešení je při vhodné časové diskretizaci velice přesné i po několika tisících periodách.

Na obrázku Obr. 5.3 můžeme pro změnu vidět jak se posune numerické řešení oproti analytickému. Pro ukázkou je použit nejhorší výsledek z Tab. 6.

$$\Delta x = 0,5 \quad \Delta t = \frac{T}{600} \quad \text{počet period} = 10000$$



Obr. 5.3: Posunutí numerického (modré) řešení od analytického (červené).

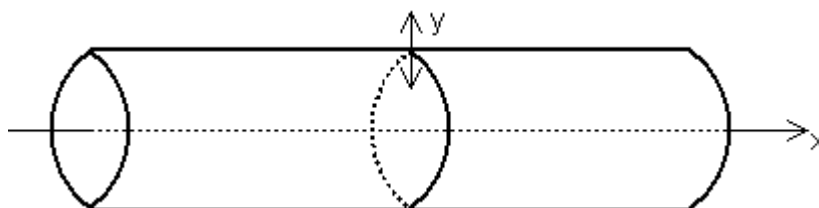
Program na výpočet chyby řešení najdete v příloze A v souboru *porovnaniReseni.m*.

6 1-Dimenzionální elasticko-akustický model flétny

Pro realističtější model flétničky zahrneme do rovnic nejen akustiku, ale i rovnici pro elasticitu. Při foukání do flétničky vznikají vlny, které ovlivňují vibrace trubice flétničky, kterou mírně rozkmitají a toto kmitání zpětně ovlivňuje řešení vlnové rovnice.

6.1 Rovnice pro elasticitu

Pro jednoduchost budeme předpokládat cylindrickou symetrii kmitů viz Obr. 6.1, to znamená, že elastické kmity jsou souměrné podle osy x , díky tomu vede úloha na jednorozměrný model.

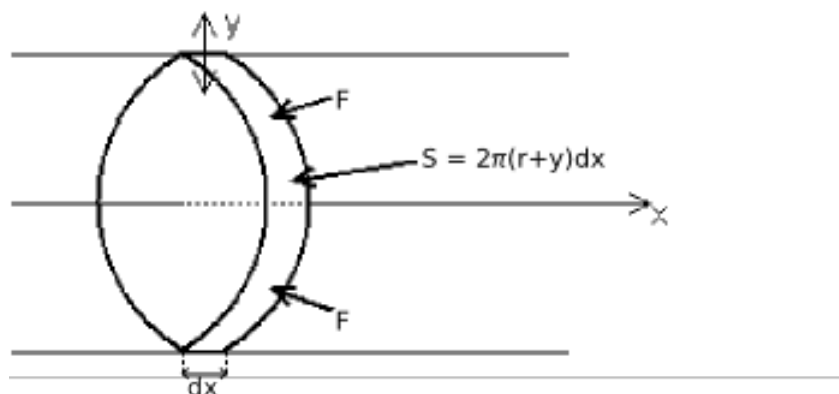


Obr. 6.1: Kmit v trubici flétničky.

Rovnici pro elasticitu můžeme napsat ve tvaru:

$$-T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = F(y, p),$$

kde F je hustota síly (liniová), která vznikla akustickým rozkmitáním vzduchu v trubici flétničky. Hustotu síly můžeme vyjádřit pomocí vztahu $F = 2\pi(r+y) \cdot p$, kde p je přetlak v trubici flétničky a r je poloměr trubice flétničky, viz Obr. 6.2.



Obr. 6.2: Působení liniové síly na malý kousek flétničky.

Rovnici pro elasticitu můžeme přepsat do tvaru:

$$-T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 2\pi(r+y) \cdot p \quad (6.1.1)$$

$$y(0, t) = y(l, t) = 0$$

$$y(x, 0) = 0$$

a vlnovou rovnicí pro tlak v trubici flétničky na:

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(r + y(x, t))^2 p(x, t)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(r + y(x, t))^2 p(x, t)] \quad (6.1.2)$$

$$p(0, t) = p(l, t) = 0$$
$$p(x, 0) = p_0(x).$$

Vypočtením p z rovnice (6.1.2) a dosazením do (6.1.1) dostáváme y , které ovlivní výpočet p v (6.1.1).

Elasticita dřevěné trubice ovlivňuje barvu tónu, jehož základní frekvence je stejná s rezonanční frekvencí akustiky.

7 Závěr

V této práci jsem se zabývali řešením vlnové rovnice pro jednu dimenzi. Tuto problematiku jsem ukázali na příkladu flétničky a průhybu struny, kde je redukce řešení do jedné dimenze přijatelná. Tato úloha má známé analytické řešení, které jsem ověřili. Pro danou úlohu se nám podařilo nalézt numerické řešení pomocí metody konečných diferencí, které se při vhodné volbě diskretizace ukázalo jako velice přesné. Na základě několika měření se nám povedlo najít ideální vztah mezi diskretizací času a osy x . Měření chyby ukázalo, že při ideální volbě diskretizace, chyba neroste s přibývajícím délkou výpočtu. Na konci práce jsem nastínili realističtější model flétničky pomocí rovnice elasticity.

V dalším pokračování práce se pokusíme podrobněji prozkoumat vliv diskretizace na přesnost řešení, rozšířit úlohu do více dimenzí, odvodit rovnice pro elasticitu a zahrnout ji do numerického řešení.

Seznam použité literatury

- [1] R.W.Hall a K. Josic, *Matematika hudebních nástrojů*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 47, str. 37-41, 2002
- [2] W.E.Boyce a R.C.DiPrima, *Elementary Equations and Boundary Value Problems*,1986
- [3] D.J.Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2006
- [4] F.Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer-Verlag,New York, 1998
- [5] L.D.Landau a E.M.Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1987

Přílohy

A – CD se zdrojovými kódy pro Matlab.

Obsah

1 Úvod.....	1
2 Odvození rovnic.....	3
2.1 Vlnová rovnice pro akustiku.....	3
2.2 Kmitání struny.....	5
3 Analytické řešení vlnové rovnice.....	7
3.1 Metoda separace proměnných.....	7
3.2 d'Alambertovo řešení.....	9
3.3 Počáteční podmínky.....	11
4 Numerické řešení.....	13
4.1 Numerická metoda konečných diferencí.....	13
4.2 Algoritmus průhybu struny.....	15
5 Porovnání analytického a numerického řešení.....	16
5.1 Algoritmus d'Alambertova řešení.....	16
5.2 Zobrazení kmitání během jedné periody.....	17
5.3 Velikost chyby v závislosti na diskretizaci.....	17
5.4 Detailní analýza chyby pro $\Delta x = 0,5$	21
6 1-Dimenzionální elasticko-akustický model flétny.....	24
6.1 Rovnice pro elasticitu.....	24
7 Závěr.....	26
Seznam použité literatury.....	27
Přílohy.....	28