Základní pojmy z lineární a multilineární algebry

Základní pojmy z lineární a multilineární algebry

1. Vektorový prostor
2. Lineární nezávislost a báze
3. Lineární zobrazení
4. Bilineární a kvadratické formy

1 Algebraické operace

DEFINICE 1
(Binární) *algebraická operace* $\circ$ na neprázdné množině $\mathcal{A}$ je zobrazení

$$\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto a \circ b \in \mathcal{A}.$$

Operace $\circ$ na množině $\mathcal{A}$ tedy každé uspořádané dvojici $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ prvků $a, b \in \mathcal{A}$ přiřazuje jednoznačně určený prvek $a \circ b \in \mathcal{A}$.

PŘÍKLAD 1 Sčítání $+$ definované na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, které například dvojici $(2, 3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ přiřazuje prvek $2 + 3 = 5 \in \mathbb{R}$.

2 Vektorový prostor

DEFINICE 2

Reálným (komplexním) vektorovým prostorem rozumíme množinu $\mathcal{V}$ s algebraickou operací $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}+v \in \mathcal{V}$, kterou nazýváme *sčítání vektorů* a zobrazením $\mathbb{R}(\mathbb{C}) \times \mathcal{V} \ni (\alpha, \mathbf{v}) \mapsto \alpha\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, které nazýváme *násobení skalárem*, přičemž platí:

VP1 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

VP2 $\exists \mathbf{o} \in \mathcal{V} \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

VP3 $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \exists - \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{o}$

VP4 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

VP5 $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

VP6 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

VP7 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$

VP8 $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

2 Vektorový prostor

PŘÍKLAD 2 Reálné aritmetické vektory daného řádu n se sčítáním vektorů a s násobením skalárem po složkách tvoří reálný vektorový prostor. Jeho nulový prvek je $\mathbf{o} = [0, \ldots, 0]$, pro $\mathbf{a} = [a_1, \ldots, a_n]$ je inverzním prvkem $-\mathbf{a} = [-a_1, \ldots, -a_n]$. Pro $n = 1$ je množina skalárů i vektorů stejná.

PŘÍKLAD 3 Množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí s operací $+$ definovanou pro každé reálné x rovností

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

a s násobením skalárem, které pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{F}$ definuje funkci $\alpha f \in \mathcal{F}$ rovností $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, tvoří reálný vektorový prostor. Nulový prvek o tohoto prostoru je dán předpisem $o(x) = 0$, prvek opačný k f je definován pomocí $(-f)(x) = -f(x)$.

2 Vlastnosti vektorových prostorů

VĚTA 1

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor s nulovým prvkem $\mathbf{o}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ a nechť α je libovolný skalár. Pak platí následující rovnosti:

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{o}$
2. $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$
3. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

DŮKAZ:

1. $$0\mathbf{u} \overset{VP2}{=} 0\mathbf{u} + \mathbf{o} \overset{VP3}{=} 0\mathbf{u} + \Big(0\mathbf{u} + \big(-(0\mathbf{u})\big)\Big) \overset{VP1}{=} (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + \big(-(0\mathbf{u})\big)$$
$$\overset{VP6}{=} (0+0)\mathbf{u} + \big(-(0\mathbf{u})\big) = 0\mathbf{u} + \big(-(0\mathbf{u})\big) \overset{VP3}{=} \mathbf{o}.$$
2. Použijeme-li 1 pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, dostaneme $0\mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže
$$\alpha\mathbf{o} = \alpha(0\mathbf{o}) \overset{VP7}{=} (\alpha 0)\mathbf{o} = 0\mathbf{o} = \mathbf{o}.$$
3. $$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \overset{VP8}{=} 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \overset{VP6}{=} \big(1 + (-1)\big)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} \overset{1}{=} \mathbf{o}.$$

3 Vektorový podprostor

DEFINICE 3

Neprázdná množina $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ je *podprostorem* vektorového prostoru $\mathcal{V}$, jestliže $\mathcal{U}$ je vektorový prostor vzhledem ke sčítání vektorů a násobení skalárem v prostoru $\mathcal{V}$.

VĚTA 2

Množina $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{V}$ právě tehdy, když pro libovolné dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a pro libovolný skalár α platí:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$
2. $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U}$

DŮKAZ: Z 2 plyne $0\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ i $(-1)\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, takže podle 1. a 3. věty 1 také nulový prvek $\mathbf{o} = 0\mathbf{u}$ i opačný prvek $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$ patří do $\mathcal{U}$. Ostatní axiomy vektorového prostoru jsou splněny zřejmě také.

3 Vektorový podprostor

PŘÍKLAD 4 Nechť p je pevně zvolená přímka v prostoru procházející zvoleným počátkem souřadnic. Pak množina všech polohových vektorů bodů na přímce p tvoří podprostor vektorového prostoru všech vázaných vektorů v prostoru.

PŘÍKLAD 5 Pro dané $k \geq 1$ je množina $\mathcal{P}_k$ všech mnohočlenů stupně menšího než k podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{F}$ z příkladu 5.

PŘÍKLAD 6 Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný prostor. Pak $\mathcal{O} = \{\mathbf{o}\}$ je podprostorem $\mathcal{V}$, neboť $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ a pro libovolný skalár α platí, že $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$. Vektorový prostor $\mathcal{O}$ je nejmenší podprostor daného vektorového prostoru a nazývá se *nulovým podprostorem*.

3 Vektorový podprostor

PŘÍKLAD 7 Nechť $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ je konečná množina vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Množina všech vektorů, které lze zapsat ve tvaru $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{V}$, který nazýváme *lineární obal* množiny $\mathcal{S}$. Lineární obal dané množiny vektorů $\mathcal{S}$ značíme $\langle\mathcal{S}\rangle = \langle\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\rangle$.

PŘÍKLAD 8 $\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 - 2u_2 + u_3 = 0\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Vyřešíme-li soustavu jedné rovnice o třech neznámých $u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$ dostaneme řešení ve tvaru $u_1 = 2t - s, u_2 = t, u_3 = s$ s parametry $t, s \in \mathbb{R}$. Pak můžeme podprostor $\mathcal{U}$ zapsat ve tvaru:

$$\mathcal{U} = \{[2t - s, t, s], t, s \in \mathbb{R}\} = \{t[2, 1, 0] + s[-1, 0, 1], t, s \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \langle[2, 1, 0], [-1, 0, 1]\rangle\,.$$

4 Vektory v matematice a fyzice

- Vektorové prostory zobecňují pojem vektoru známého např. z fyziky, tj. veličina mající velikost a směr
  - Nejedná se o veličiny, které mají velikost a směr (Co je velikost vektoru z prostoru všech funkcí $\mathcal{F}$?)
  - Dokonce i veličiny, které mají velikost a směr nemusí splňovat axiomy vektorového prostoru
- V případě abstraktních vektorů je někdy možné je pro zjednodušení nahradit "šipkami", tj. veličinami, které mají velikost a směr.

5 Závislé a nezávislé vektory

DEFINICE 4
Neprázdná konečná množina vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o} \qquad (*)$$

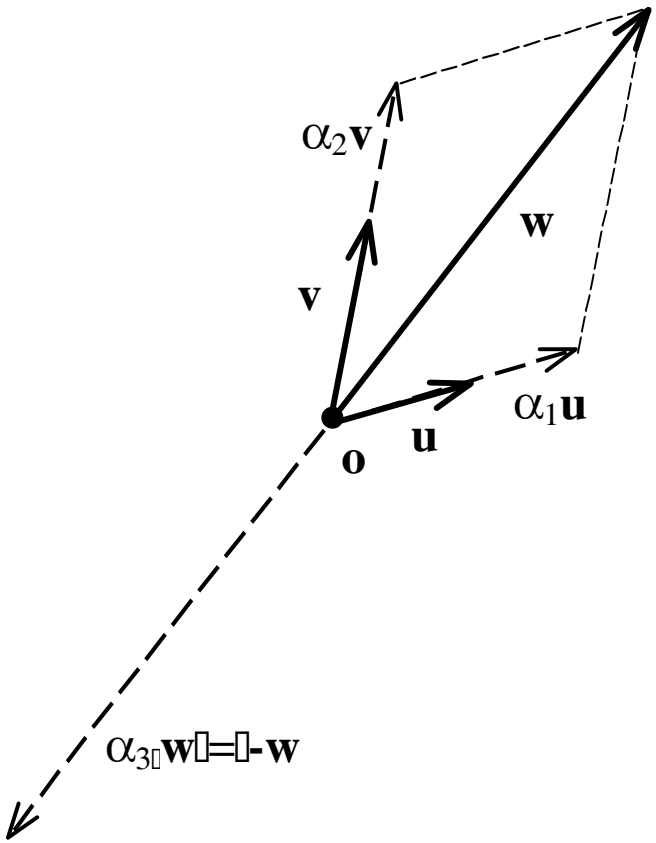
má jediné řešení

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

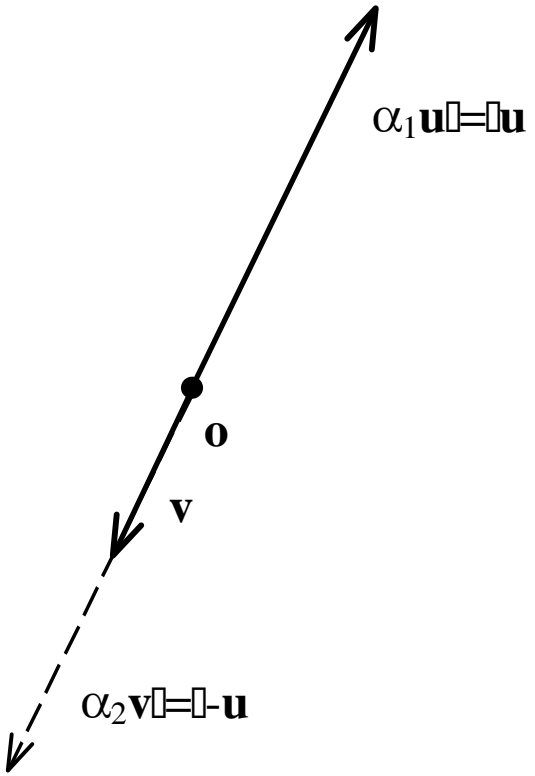
Jestliže $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ je nezávislá, říkáme také, že vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ jsou nezávislé. Má-li rovnice $(*)$ i jiné řešení, pak říkáme, že $\mathcal{S}$ je *lineárně závislá* a vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ jsou závislé.

5 Závislé a nezávislé vektory

Geometrický význam lineární závislosti pro dvourozměrné vázané vektory



$\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} + \alpha_3\mathbf{w} = \mathbf{o}$



$\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} = \mathbf{o}$

5 Závislé a nezávislé vektory

PŘÍKLAD 9 Jestliže $\mathbf{v}_1 = [2, -1, 0], \mathbf{v}_2 = [1, 2, 5]$ a $\mathbf{v}_3 = [7, -1, 5]$, pak množina vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ je lineárně závislá, neboť $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$.

PŘÍKLAD 10 Mnohočleny $p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = 5 + 3x - 2x^2$ a $p_3(x) = 1 + 3x - x^2$ tvoří lineárně závislou množinu v $\mathcal{P}_3$, neboť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $3p_1(x) - p_2(x) + 2p_3(x) = 0$, tj. $3p_1 - p_2 + 2p_3 = o$.

PŘÍKLAD 11 Vektory $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0], \mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$ a $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$ tvoří lineárně nezávislou množinu reálných třírozměrných aritmetických vektorů, neboť $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{o}$ pouze pro $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

6 Lineární kombinace a závislost

DEFINICE 5
Vektor $\mathbf{v}$ z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ budeme nazývat *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$, jestliže existují skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, že

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

PŘÍKLAD 12 Mnohočlen $p_1(x) = x$ z vektorového prostoru $\mathcal{P}_1$ všech lineárních reálných mnohočlenů je lineární kombinací mnohočlenů $p_2(x) = x + 1$ a $p_3(x) = x + 2$, neboť pro libovolné reálné x platí

$$p_1(x) = x = 2(x + 1) - (x + 2) = 2p_2(x) - p_3(x),$$

takže $p_1 = 2p_2 - p_3$.

6 Lineární kombinace a závislost

VĚTA 3
Konečná množina nenulových vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_m\}$ je lineárně závislá, právě když existuje $k \geq 2$ tak, že vektor $\mathbf{v}_k$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$.

7 Postačující podmínky pro nezávislost funkcí

Nechť $\mathcal{S} = \{f_1, \ldots, f_k\}$ je konečná množina reálných funkcí vektorového prostoru $\mathcal{F}$. $\mathcal{S}$ je nezávislá právě tehdy, když z

$$\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_k f_k(x) = 0$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ plyne, že $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.
Dosadíme-li za x postupně různá čísla $x_1, \ldots, x_k$, dostaneme soustavu k lineárních rovnic o k neznámých $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 f_1(x_1) & + & \ldots & + & \alpha_k f_k(x_1) & = & 0 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 f_1(x_k) & + & \ldots & + & \alpha_k f_k(x_k) & = & 0 \end{array}$$

Pokud má tato soustava regulární matici, plyne odsud, že $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ a $\mathcal{S}$ je nezávislá množina.

7 Postačující podmínky pro nezávislost funkcí

PŘÍKLAD 13 Rozhodněte, zda jsou mocniny x, x^2 a x^3 lineárně nezávislé.

ŘEŠENÍ:Zvolíme si body $x_1 = 1, x_2 = 2$ a $x_3 = 3$, které postupně dosadíme do funkcí $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$, a vytvoříme soustavu:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 8\alpha_3 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & + & 9\alpha_2 & + & 27\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Matici této soustavy převedeme na schodový tvar. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathrm{r}_1 \\ -3\mathrm{r}_1 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3\mathrm{r}_2 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matice soustavy je regulární, takže soustava má jen nulové řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Funkce x, x^2 a x^3 jsou tedy lineárně nezávislé.

8 Báze vektorového prostoru

DEFINICE 6
Konečná množina $\mathcal{E}$ vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je *báze vektorového prostoru* $\mathcal{V}$, jestliže

- $\mathcal{E}$ je nezávislá.
- Každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathcal{E}$.

Ne každý vektorový prostor má bázi ve smyslu naší definice. Například neexistuje žádná konečná množina reálných funkcí, jejichž lineární kombinací by bylo možno vyjádřit libovolnou reálnou funkci.

8 Báze vektorového prostoru

PŘÍKLAD 14 Vektory $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0], \mathbf{e}_2 = [0, 1, 0], \mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$ tvoří bázi $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$. Jakýkoli vektor $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ tohoto prostoru lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$. Báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je zvláštním případem *standardní báze* $\mathbb{R}^n$, která je tvořena řádky či sloupci jednotkové matice $\mathbf{I}_n$.

PŘÍKLAD 15 Mnohočleny $p_1(x) = 1$ a $p_2(x) = x$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathcal{P}_2$. Každý mnohočlen $p(x) = a_0 + a_1x$ lze zapsat ve tvaru $p = a_0p_1 + a_1p_2$. Mnohočleny zde považujeme za reálné funkce definované na celé reálné ose. Nechť $a_0p_1 + a_1p_2 = o$, tj. $a_0 + a_1x = 0$ pro všechna x. Pro $x = 0$ dostáváme $a_0 + a_1 \cdot 0 = 0$, odkud $a_0 = 0$, a pro $x = 1$ pak z $a_1 \cdot 1 = 0$ dostaneme $a_1 = 0$, takže p_1 a p_2 jsou nezávislé.

8 Souřadnice vektoru

DEFINICE 7
Nechť $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je uspořádaná báze vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Nechť $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Potom čísla $v_1, \ldots, v_n$, pro která platí

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n,$$

nazýváme *souřadnice vektoru* $\mathbf{v}$ v bázi $\mathcal{E}$.

Souřadnice každého vektoru $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ jsou v dané bázi $\mathcal{E}$ určeny jednoznačně. Budeme je zapisovat také do aritmetického vektoru, který se nazývá *souřadnicový vektor* a značí se $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$.

PŘÍKLAD 16 Mnohočlen $p(x) = x + 2$ má v bázi $\mathcal{P} = (p_1, p_2)$ z příkladu 15, kde $p_1(x) = 1$ a $p_2(x) = x$, souřadnice $2, 1$, neboť

$$p(x) = x + 2 = 2p_1(x) + 1p_2(x).$$

Jeho souřadnicový vektor je $[\mathbf{p}]_{\mathcal{P}} = [2, 1]$.

8 Dimenze vektorového prostoru

DEFINICE 8
Maximální počet nezávislých vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nazýváme *dimenzí* prostoru $\mathcal{V}$ a značíme ji $\dim \mathcal{V}$. Má-li vektorový prostor bázi, je jeho dimenze rovna počtu vektorů báze a mluvíme o *konečněrozměrném prostoru*. Podle naší definice platí $\dim\{\mathbf{o}\} = 0$. Nemá-li nenulový vektorový prostor bázi, mluvíme o *nekonečněrozměrném prostoru*.

9 Lineární zobrazení

DEFINICE 9

Nechť $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ jsou vektorové prostory. Zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ se nazývá *lineární zobrazení (operátor)*, jestliže pro každé dva vektory $u, v \in \mathcal{U}$ a skalár α platí:

1. $A(u + v) = A(u) + A(v)$
2. $A(\alpha u) = \alpha A(u)$

Lineární zobrazení $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ se často nazývá *lineární transformace*. Množinu všech lineárních zobrazení vektorového prostoru $\mathcal{U}$ do vektorového prostoru $\mathcal{V}$ budeme značit $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Místo $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ budeme psát stručně $\mathcal{L}(\mathcal{U})$. Lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathcal{U}$ do $\mathbb{R}$ se nazývají *lineární formy* nebo *lineární funkcionály*.

9 Lineární zobrazení

PŘÍKLAD 17 Funkce $y = ax$ je lineární transformace $\mathbb{R}$ pro libovolné pevně zvolené $a \in \mathbb{R}$, neboť

$$a(u+v) = au + av \quad \text{a} \quad a(\alpha u) = \alpha a u$$

pro libovolná čísla u, v a α.

PŘÍKLAD 18 Funkce $f : y = 2x + 1$ není lineární transformace $\mathbb{R}$, neboť $f(2+2) = f(4) = 9 \neq 10 = f(2) + f(2)$.

PŘÍKLAD 19 Je-li $\mathbf{A}$ libovolná reálná $m \times n$ matice, $\mathbb{R}^{n,1}(\mathbb{R}^{m,1})$ prostor všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze $n(m)$, pak je

$$A : \mathbb{R}^{n,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

lineární zobrazení, neboť pro libovolné vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

9 Lineární zobrazení

PŘÍKLAD 20 Zobrazení $D : \mathcal{P}_{n+1} \mapsto \mathcal{P}_n$ definované předpisem

$$D : p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mapsto p'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1$$

je lineární.

Opravdu pro $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ a $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ je
$(p+q)(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_0 + b_0)$,
$(\alpha p)(x) = (\alpha a_n)x^n + \cdots + (\alpha a_0)$ a

1. $$\begin{aligned} D(p+q) &= n(a_n + b_n)x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) = \\ &= n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 + n b_n x^{n-1} + \cdots + b_1 = \\ &= p'(x) + q'(x) = D(p) + D(q) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} D(\alpha p) &= n(\alpha a_n)x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1) = \alpha(n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1) = \\ &= \alpha p'(x) = \alpha D(p). \end{aligned}$$

9 Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

Mnoho technických problémů lze zformulovat jako úlohu najít pro dané lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a pro $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ tak, aby platilo

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \qquad (R)$$

Předpokládejme nyní, že známe například řešení $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ rovnice (R) pro dvě pravé strany $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$, tedy že platí

$$A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1 \text{ a } A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2,$$

a že navíc platí $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.
Pak můžeme určit řešení $\mathbf{x}$ rovnice (R) pouhým sečtením $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$, neboť pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ platí

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}.$$

9 Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

VĚTA 4

Nechť $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathcal{U}$ na vektorový prostor $\mathcal{V}$. Pak existuje A^{-1}, které je rovněž lineární zobrazení.

DŮKAZ: Inverzní zobrazení A^{-1} existuje pro každé vzájemně jednoznačné zobrazení. Nechť $\mathbf{u} = A(\mathbf{x})$, $\mathbf{v} = A(\mathbf{y})$, tedy $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{u})$ a $\mathbf{y} = A^{-1}(\mathbf{v})$, a nechť α je libovolný skalár. Potom

$$A^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A^{-1}\big(A(\mathbf{x})+A(\mathbf{y})\big) = A^{-1}\big(A(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = \mathbf{x}+\mathbf{y} = \\ = A^{-1}(\mathbf{u}) + A^{-1}(\mathbf{v}),$$

$$A^{-1}(\alpha\mathbf{u}) = A^{-1}\big(\alpha A(\mathbf{x})\big) = A^{-1}\big(A(\alpha\mathbf{x})\big) = \alpha\mathbf{x} = \alpha A^{-1}(\mathbf{u}).$$

10 Matice lineárního zobrazení

VĚTA 5

Nechť $A : \mathbb{R}^{m,1} \mapsto \mathbb{R}^{n,1}$ je libovolné lineární zobrazení. Pak existuje matice $\mathbf{A}$ typu (n, m) tak, že pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ platí

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

DŮKAZ: Jelikož libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + \cdots + x_m\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}$$

lze $A(\mathbf{x})$ zapsat pomocí

$$A(\mathbf{x}) = A(x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + \cdots + x_m\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = x_1A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}) + \cdots + x_mA(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

kde

$$\mathbf{A} = \left[A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}), \ldots, A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}})\right] = [a_{ij}]\,.$$

10 Matice lineárního zobrazení

Budeme předpokládat, že $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou dva vektorové prostory konečné dimenze s bázemi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$.

DEFINICE 10

Nechť $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Pak můžeme vektory $A(\mathbf{e}_1), ..., A(\mathbf{e}_m)$ vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccc} A(\mathbf{e}_1) & = & a_{11}\mathbf{f}_1 & +\cdots+ & a_{n1}\mathbf{f}_n \\ \vdots & & \vdots & \ldots & \vdots \\ A(\mathbf{e}_m) & = & a_{1m}\mathbf{f}_1 & +\cdots+ & a_{nm}\mathbf{f}_n \end{array}$$

Matici $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [a_{ij}] = \left[[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}}, \ldots, [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}}\right]$ nazýváme *maticí lineárního zobrazení A vzhledem k bázím* $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Jestliže $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ a $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, pak budeme mluvit o *matici lineární transformace vzhledem k bázi $\mathcal{E}$* a místo $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ budeme psát stručně $[A]_{\mathcal{E}}$.

10 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 21 Nechť $\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_2$ mají báze $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$, kde $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ a $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$, kde $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$. Najděte matici derivace

$$D : \mathcal{P}_3 \ni p \mapsto p' \in \mathcal{P}_2.$$

ŘEŠENÍ: Nejdříve najdeme souřadnice $D(e_1), D(e_2)$ a $D(e_3)$ v bázi $\mathcal{F}$. Jelikož $D(e_1)(x) = 0$, $D(e_2)(x) = 1$ a $D(e_3)(x) = 2x$, můžeme napsat přímo:

$$\begin{array}{rcccc} 0 & = & 0 \cdot 1 & + & 0 \cdot x \\ 1 & = & 1 \cdot 1 & + & 0 \cdot x \\ 2x & = & 0 \cdot 1 & + & 2 \cdot x \end{array}$$

Souřadnice $D(e_1), D(e_2)$ a $D(e_3)$ vzhledem k $\mathcal{F}$tvoří zřejmě koeficienty na řádcích, které zapíšeme do sloupců a dostaneme

$$[D]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

10 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 22 S využitím řešení příkladu 21 vypočtěte derivaci libovolného mnohočlenu p nejvýše druhého stupně.

ŘEŠENÍ: Mnohočlen $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_3$ má v bázi $\mathcal{E}$ souřadnice

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}.$$

Jelikož jsme si v příkladu 29 ukázali, že derivace $D : \mathcal{P}_3 \mapsto \mathcal{P}_2$ má v bázích $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ matici

$$[D]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

platí

$$[p']_{\mathcal{F}} = [Dp]_{\mathcal{F}} = [D]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}\,[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \end{bmatrix}.$$

Odtud

$$p'(x) = b \cdot f_1(x) + 2a \cdot f_2(x) = b + 2ax.$$

11 Bilineární formy

DEFINICE 11

Nechť $\mathcal{V}$ je reálný vektorový prostor. Zobrazení $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ se nazývá *bilineární forma*, jestliže pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1. $B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
2. $B(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
3. $B(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$
4. $B(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Bilineární funkce je tedy při zvolené hodnotě jedné proměnné lineární funkcí druhé proměnné. Můžeme ji považovat za zobecnění funkce $f(x, y) = axy$ dvou proměnných x a y na vektorové prostory.

11 Definice a příklady

PŘÍKLAD 23 Na prostoru $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ sloupcových vektorů dimenze 3 si definujeme formu B předpisem, který každé dvojici vektorů $\mathbf{x} = [x_i]$ a $\mathbf{y} = [y_i]$ přiřazuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Interpretujeme-li **x** jako sílu a **y** jako dráhu, pak $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je práce konaná silou **x** po dráze **y**. Snadno se ověří, že B je bilineární forma.

PŘÍKLAD 24 Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je daná reálná čtvercová matice řádu 2. Pak zobrazení, které každé dvojici sloupcových vektorů druhého řádu $\mathbf{x} = [x_i]$ a $\mathbf{y} = [y_i]$ přiřazuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2,$$

je bilineární forma.

PŘÍKLAD 25 Nechť $\mathcal{F}$ je vektorový prostor všech reálných funkcí. Pak předpis, který každé dvojici funkcí $f \in \mathcal{F}$ a $g \in \mathcal{F}$ přiřazuje

$$B(f, g) = f(1)g(1) + f(2)g(2),$$

definuje bilineární formu.

11 Klasifikace bilineárních forem

DEFINICE 12
Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor. Bilineární forma B se nazývá *symetrická*, jestliže pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ a *antisymetrická*, jestliže $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

PŘÍKLAD 26 Bilineární formy z příkladu 23 a 25 jsou zřejmě symetrické, zatímco forma z příkladu 24 je symetrická, právě když $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$. Bilineární forma z příkladu 24 bude antisymetrická, právě když $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$

Vskutku $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}\right)^\top = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$.
Jelikož $B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y}$ pak $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.
Obdobně $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$.

11 Klasifikace bilineárních forem

VĚTA 6

Každou bilineární formu B můžeme vyjádřit ve tvaru součtu symetrické a antisymetrické formy

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B^{\mathrm{A}}(\mathbf{u},\mathbf{v}),$$

kde

$$B^{\mathrm{S}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},\mathbf{u})\big)$$

$$B^{\mathrm{A}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u},\mathbf{v}) - B(\mathbf{v},\mathbf{u})\big)$$

přičemž $B^{\mathrm{S}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{v},\mathbf{u})$ a $B^{\mathrm{A}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v},\mathbf{u})$.

Formy B^{S} a B^{A} se nazývají po řadě *symetrická část* a *antisymetrická část* bilineární formy B.

DŮKAZ: $B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},\mathbf{u})\big) + \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u},\mathbf{v}) - B(\mathbf{v},\mathbf{u})\big)$

12 Matice bilineární formy

DEFINICE 13
Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor a $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je jeho báze. Maticí bilineární formy B v bázi $\mathcal{E}$ rozumíme matici

$$[B]_{\mathcal{E}} = [B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)]$$

VĚTA 7
Nechť $[B]_{\mathcal{E}}$ je matice bilineární formy B v bázi $\mathcal{E}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Pro libovolné vektory $x, y \in \mathcal{V}$

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} .$$

12 Matice bilineární formy

PŘÍKLAD 27 Najděte matici bilineární formy z příkladu 3 definované na prostoru P_3 všech mnohočlenů nejvýše druhého stupně v bázi $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$, kde $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$. Výsledek využijte k vyčíslení $B(p, q)$ pro $p(x) = 1 - x$ a $q(x) = x^2 - x$.

ŘEŠENÍ: Postupně vypočteme:

$$\begin{aligned}
B(e_1, e_1) &= e_1(1)e_1(1) + e_1(2)e_1(2) &&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 &&= 2 \\
B(e_1, e_2) &= e_1(1)e_2(1) + e_1(2)e_2(2) &&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 &&= 3 \\
B(e_1, e_3) &= e_1(1)e_3(1) + e_1(2)e_3(2) &&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 &&= 5 \\
B(e_2, e_2) &= e_2(1)e_2(1) + e_2(2)e_2(2) &&= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 &&= 5 \\
B(e_2, e_3) &= e_2(1)e_3(1) + e_2(2)e_3(2) &&= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 &&= 9 \\
B(e_3, e_3) &= e_3(1)e_3(1) + e_3(2)e_3(2) &&= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 &&= 17
\end{aligned}$$

Ostatní prvky matice formy dopočteme ze symetrie

$$B(e_i, e_j) = e_i(1)e_j(1) + e_i(2)e_j(2) = e_j(1)e_i(1) + e_j(2)e_i(2) = B(e_j, e_i).$$

12 Matice bilineární formy

PŘÍKLAD 28 *(Pokračování)*

Matice má tedy tvar:

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}.$$

Jelikož

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ a } [q]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

platí

$$B(p,q) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = -2.$$

13 Kvadratické formy

DEFINICE 14

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor a nechť B je bilineární forma na $\mathcal{V}$. Zobrazení Q_B definované pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ předpisem

$$Q_B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

se nazývá *kvadratická forma* příslušná bilineární formě B. Kvadratickou formou budeme stručně nazývat zobrazení Q definované na $\mathcal{V}$, pro které existuje bilineární forma B na $\mathcal{V}$ tak, že $Q = Q_B$.

Kvadratickou formu můžeme považovat za zobecnění funkce $y = ax^2$ na vektorové prostory.

13 Kvadratické formy

PŘÍKLAD 29 Na prostoru $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ sloupcových vektorů dimenze 3 je definováno zobrazení Q, které každému vektoru $\mathbf{x} = [x_i]$ přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

což je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované v příkladě 23 o bilineárních formách. Interpretujeme-li $\mathbf{x}$ jako polohový vektor, pak $Q(\mathbf{x})$ je druhá mocnina jeho délky.

PŘÍKLAD 30 Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je daná reálná čtvercová matice řádu 2. Pak zobrazení, které každému sloupcovému vektoru $\mathbf{x} = [x_i]$ dimenze dvě přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované v příkladě 24 o bilineárních formách.

PŘÍKLAD 31 Nechť $\mathcal{F}$ je prostor všech reálných funkcí. Pak předpis, který každé funkci $f \in \mathcal{F}$ přiřazuje

$$Q(f) = f(1)^2 + f(2)^2,$$

definuje kvadratickou formu příslušnou bilineární formě definované v příkladě 25 o bilineárních formách.

14 Matice kvadratické formy

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze s bází $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a nechť Q je daná kvadratická forma příslušná bilineární formě B. Pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ platí

$$Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} .$$

Je proto přirozené považovat matici $[B]_{\mathcal{E}}$ za matici kvadratické formy Q příslušné bilineární formě B v bázi $\mathcal{E}$. Kvadratická forma příslušná B přísluší též symetrické části B^{S} bilineární formy B. Proto definujeme *matici kvadratické formy* Q_B příslušné k bilineární formě B jako symetrickou matici

$$[Q_B] = \left[B^{\mathrm{S}}\right] .$$

Při studiu matic kvadratických forem se tedy můžeme omezit na symetrické matice.

15 Pozitivně definitní formy

DEFINICE 15
Kvadratická forma Q na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ se nazývá *pozitivně definitní*, jestliže pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $Q(\mathbf{x}) > 0$. Jestliže pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ platí $Q(\mathbf{x}) \geq 0$, pak se Q nazývá *pozitivně semidefinitní*.

PŘÍKLAD 32 Kvadratická forma z příkladu 29 je pozitivně definitní.

PŘÍKLAD 33 Kvadratická forma Q definovaná na $\mathbb{R}^2$ předpisem $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{5}{2}x_2$ je pozitivně definitní.

PŘÍKLAD 34 Kvadratická forma z příkladu 31 nabývá pouze nezáporných hodnot, avšak $Q(f) = 0$ například pro nenulovou funkci $f(x) = (x-1)(x-2)$. Kvadratická forma je proto pouze pozitivně semidefinitní.

15 Pozitivně definitní formy

LEMMA 2 Je-li $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze s bází $\mathcal{E}$ a je-li Q je pozitivně definitní kvadratická forma, pak pro libovolné $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \neq \mathbf{o}$ a

$$Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [Q]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} > 0.$$

DEFINICE 16
Každou symetrickou matici $\mathbf{A}$ budeme nazývat *pozitivně definitní*, jestliže pro každý sloupcový vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, a *pozitivně semidefinitní*, jestliže $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro libovolný sloupcový vektor $\mathbf{x}$.

Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní (semidefinitní), právě když je její matice v libovolné bázi pozitivně definitní (semidefinitní).