Stabilní a rychlé numerické metody pro řešení náročných inženýrských úloh

Ph.D. akademie, 11. listopadu 2022, FEI VŠB-TU Ostrava

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky, FEI
VŠB-TU Ostrava

web: http://homel.vsb.cz/∼luk76
email: dalibor.lukas@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Stabilní a rychlé numerické metody pro řešení náročných inženýrských úloh

Osnova kurzu

1. Soustavy lineárních rovnic
2. Interpolace a numerická integrace
3. Aproximace metodou nejmenších čtverců, FFT
4. Obyčejné a parciální diferenciální rovnice metodami konečných a hraničních prvků

Stabilní a rychlé numerické metody pro řešení náročných inženýrských úloh

Osnova 2. přednášky: Interpolace a numerická integrace

- Lagrangeova interpolace
- Ortogonální systémy polynomů
- Numerická integrace (kvadratura)

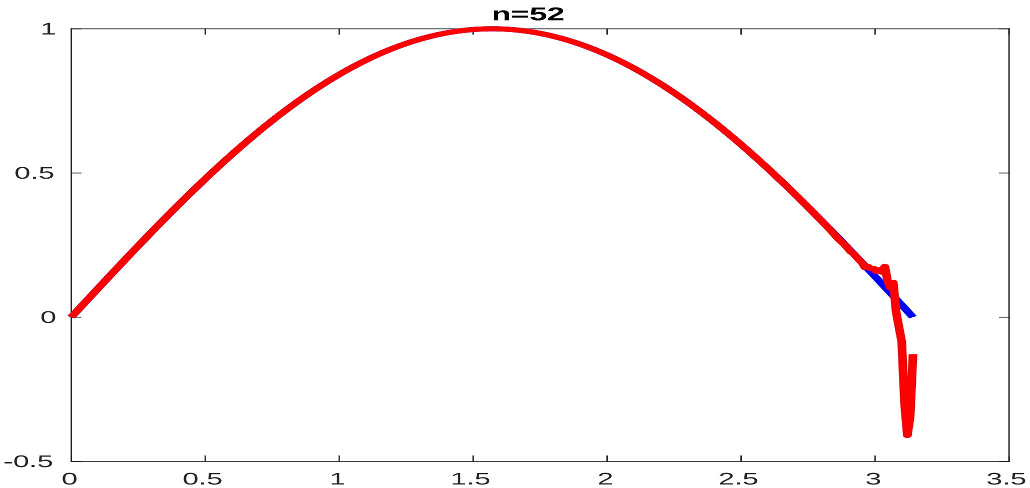
Příklad: Interpolace monomiály

Proložme $f(x) := \sin(x)$ **v bodech** $x_i := \frac{i\pi}{n+1}$**,** $i = 0, \ldots, n$ **pol.** $f_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$**.**

Řešíme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \ldots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \ldots & (x_1)^n \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \ldots & (x_2)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \ldots & (x_n)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

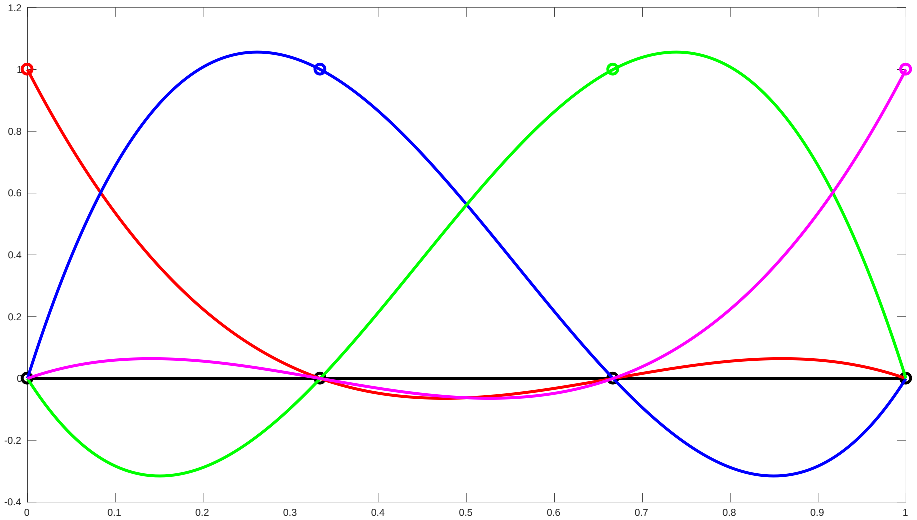
Toto řešení je nestabilní (citlivé na zaokrouhlovací chyby).



Lagrangeova interpolace

Lagrangeova báze prostoru polynomů $\mathcal{P}^n$ stupně n

Dáno: $n \in \mathbb{N}_0$, $-\infty < x_0 < \cdots < x_n < \infty$.



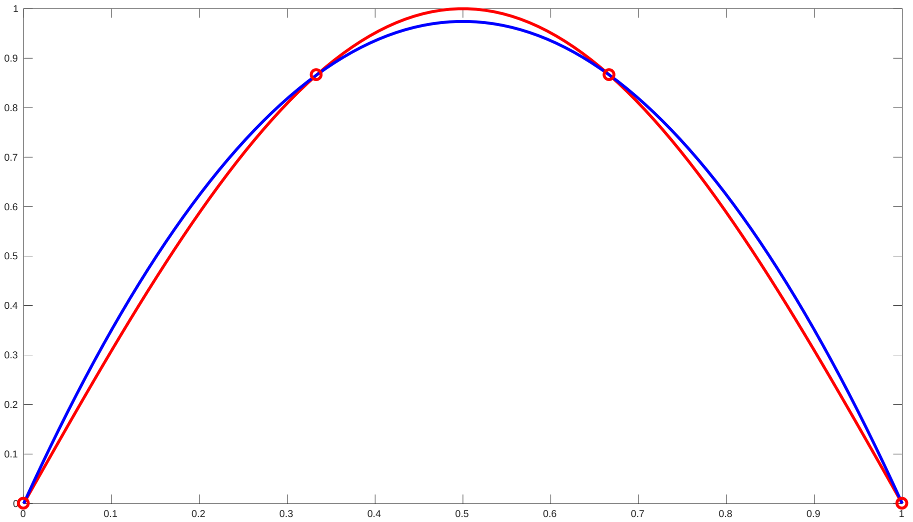
$$L_i^{(n)}(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_i^{(n)}(x) \in \mathcal{P}^n : \quad L_i^{(n)}(x_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Lagrangeova interpolace

Rychlý a numericky stabilní výpočet interpolace

Dáno: $f(x) \in C(\langle a, b\rangle)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$.
Hledáme: $f_n(x) \in \mathcal{P}^n := \{\sum_{i=0}^n a_i\, x^i : a_i \in \mathbb{R}\}$: $\quad f_n(x_i) = f(x_i)\ \forall i$.



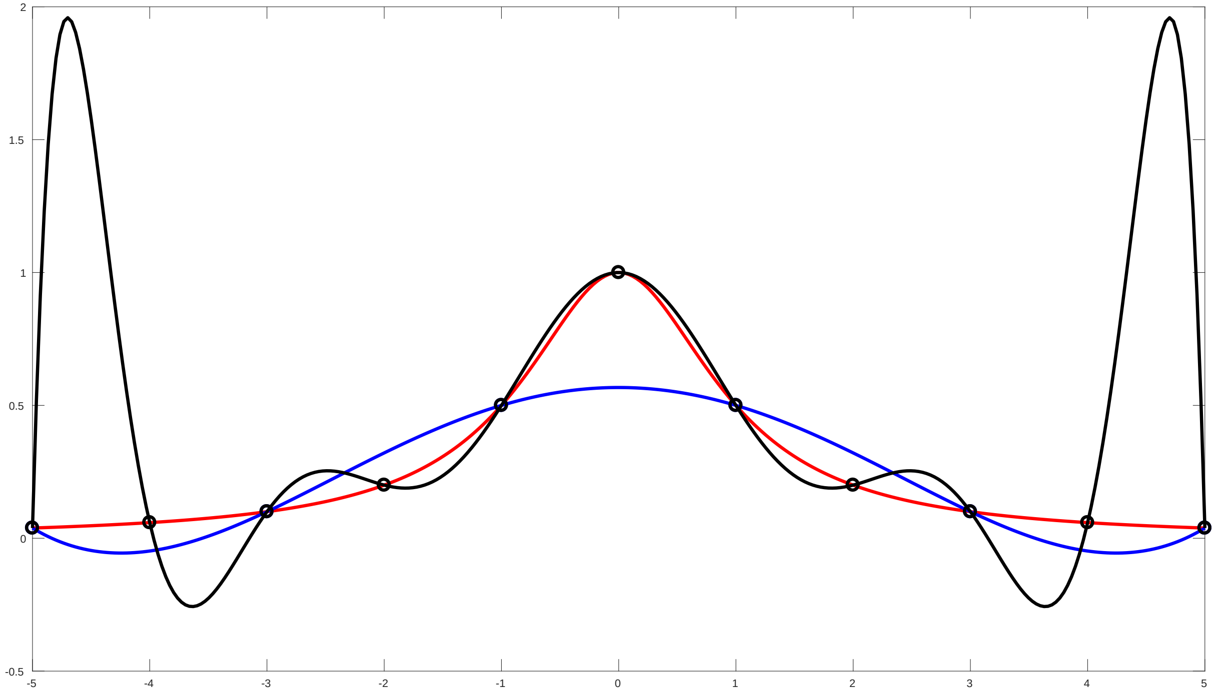
$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Chyba: Je-li navíc $f \in C^{(n+1)}((a, b))$, pak $f(x) - f_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

Lagrangeova interpolace

Interpolace Rungeho funkce na ekvidistantní síti

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \langle -5, 5\rangle, \quad x_i := -5 + 10\,\frac{i}{n},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$



$n := 5,$

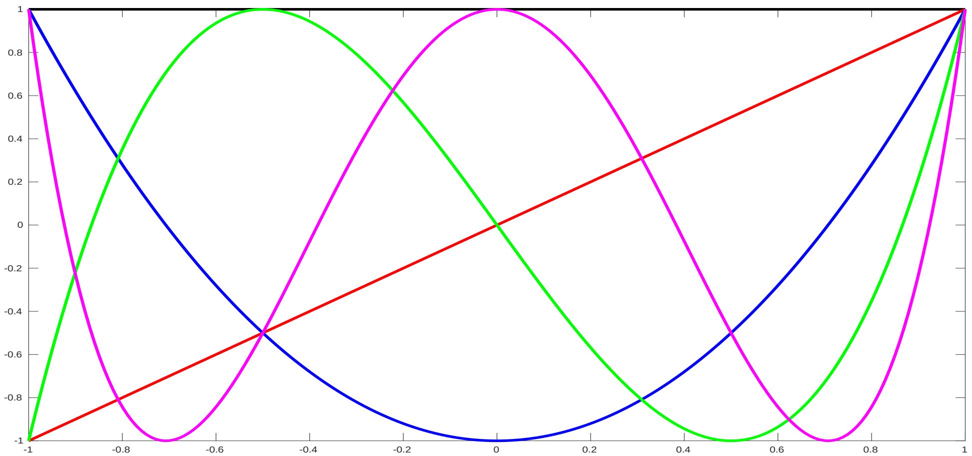
$n := 10.$

Lagrangeova interpolace

Čebyševovy polynomy

Definice (3-člennou) rekurencí:

$$T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x, \quad T_n(x) := 2\,x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \text{ pro } n \geq 2.$$



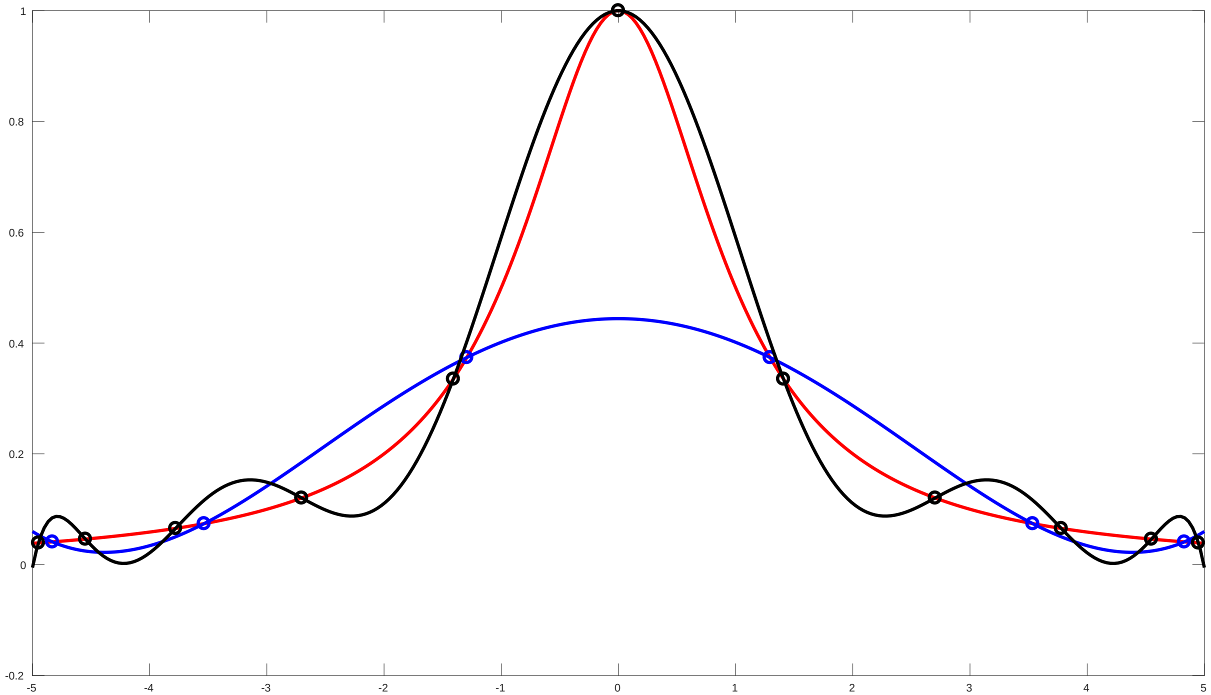
Pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ Čeb. polynomy splňují: $T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right)$. Kořeny T_{n+1}, $\xi_i^{(n+1)} = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$, $i = 0, \ldots, n$, minimalizují výraz z interpolační chyby:

$$\boldsymbol{\xi}^{(n+1)} = \operatorname*{arg\,min}_{\mathbf{x}\in\langle -1,1\rangle^{n+1}} \max_{x\in\langle -1,1\rangle} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|.$$

Lagrangeova interpolace

Interpolace Rungeho funkce v kořenech ξ_i Čeb. polynomů

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \langle -5, 5 \rangle, \quad x_i := -5 + 10\,\xi_i,\ i = 0, 1, \ldots, n.$$



$n := 5,$
$n := 10.$

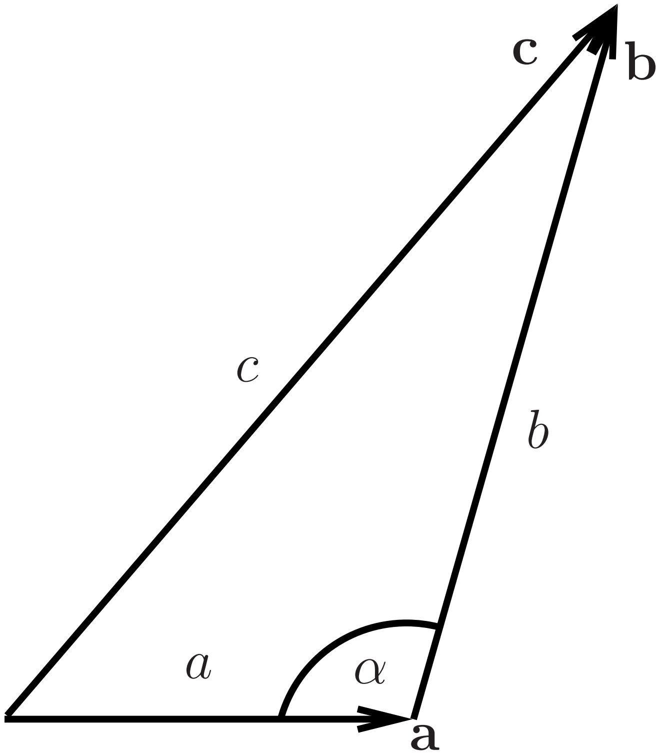
Stabilní a rychlé numerické metody
pro řešení náročných inženýrských úloh

Osnova 2. přednášky: Interpolace a numerická integrace

- Lagrangeova interpolace
- Ortogonální systémy polynomů
- Numerická integrace (kvadratura)

Ortogonální systémy polynomů

Skalární součin = kritérium kolmosti



Vektorový počet

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Kvadrát velikosti vektoru, Kosinová věta

$$c^2 = \|\mathbf{c}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 =$$

$$= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 =$$

$$= \underbrace{(a_1)^2 + (a_2)^2}_{=\|\mathbf{a}\|^2} + \underbrace{(b_1)^2 + (b_2)^2}_{=\|\mathbf{b}\|^2} + 2 \underbrace{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}_{=:\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos(\alpha)\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$$

$$= a^2 + b^2 + 2\cos(\alpha)\, a\, b$$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$: Pythagorova $\equiv$ Kosinová věta

Ortogonální systémy polynomů

Eukleidovský skalární součin, norma, ortogonalita, ortonormalita

Bilineární forma $(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

se nazývá **Eukleidovský skalární součin**. Ten indukuje **Eukleidovskou normu**

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou **ortogonální** (v Eukl. skalárním součinu), pokud

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

a jsou **ortonormální** (v Eukl. skalárním součinu), pokud navíc

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1.$$

Úhel mezi vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zobecníme takto

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}$$

Ortogonální systémy polynomů

Zobecnění pojmů

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ a symetrickou bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, jejíž příslušná kvadratická forma $Q(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ je pozitivně definitní (kladná).

- B je **skalární součin na** $\mathcal{V}$.
- Nenulové **vektory** $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ jsou **ortogonální vzhledem k** B, pokud

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_B := B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

- B **indukuje normu vektoru** $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$\|\mathbf{v}\|_B := \sqrt{B(\mathbf{u}, \mathbf{u})}.$$

Příklad: $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ **je skalární součin na** $\mathbb{R}^2$**.**

B je zjevně symetrická bilineární forma. Příslušná kvadr. forma

$$Q(\mathbf{x}) := B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2(x_1)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_2)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0$$

pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tedy Q je pozitivně definitní.

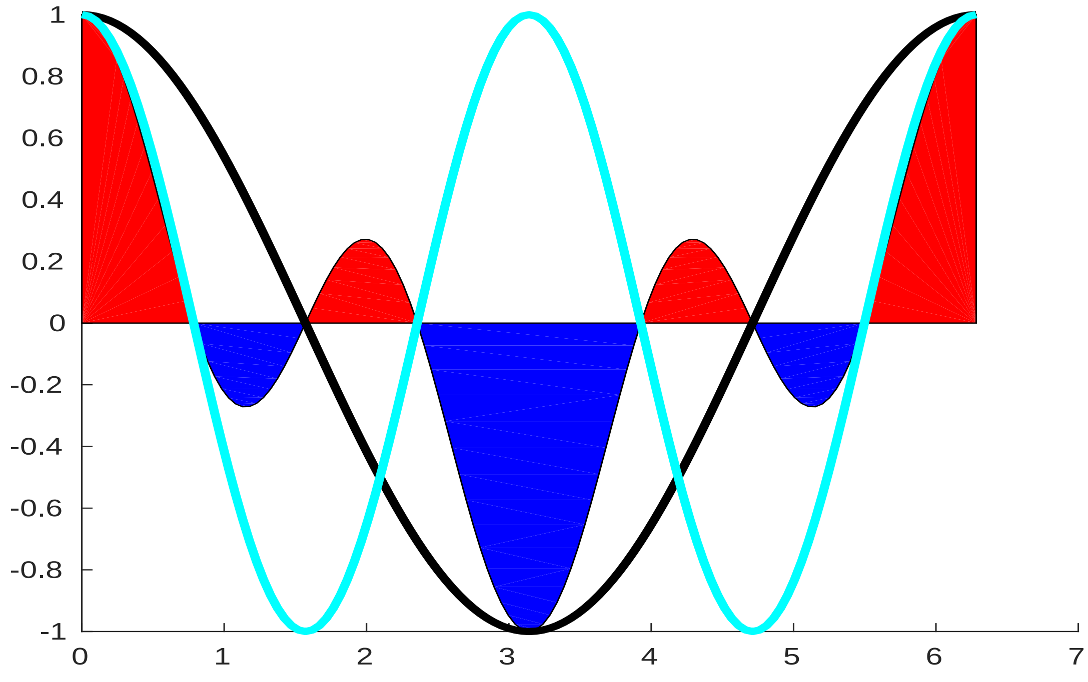
Ortogonální systémy polynomů

Kolmé funkce (báze pro MP3, JPEG, viz příště)

Funkce $(\cos(kx))_{k=0}^{\infty}$, $(\sin(kx))_{k=1}^{\infty}$ jsou navzájem kolmé vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(f,g) := (f,g)_{L^2(0,2\pi)} := \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

Např. $(\cos(x), \cos(2x)) = 0$



Ortogonální systémy polynomů

$L^2_w(a,b)$ skalární součin

Mějme $(a,b) \in \mathbb{R}$, interval (ne nutně omezený), a váhovou funkci $w : (a,b) \to \mathbb{R}$:

$$w(x) > 0 \quad \text{„skoro všude" v } (a,b), \qquad \int_a^b w(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

Pak následující bilineární forma tvoří skalární součin na prostoru (např. spojitých) funkcí:

$$(f,g)_{L^2_w(a,b)} := \int_a^b w(x)\,f(x)\,g(x)\,dx.$$

Dále nás budou zajímat zejména tyto případy:

- $(-1,1)$, $w(x) := 1$ (Legendreovy polynomy/kvadratura),
- $(-1,1)$, $w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (Čebyševovy polynomy/kvadratura),
- $(0,1)$, $w(x) := -\ln x$ („Gauss-log" kvadratura),
- $(0,\infty)$, $w(x) := \mathrm{e}^{-x}$ (Laguerrovy polynomy/kvadratura),
- $(-\infty,\infty)$, $w(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$ (Hermiteovy polynomy/kvadratura).

Ortogonální systémy polynomů

Gram–Schmidtův ortogonalizační/ortonormalizační algoritmus v $\mathbb{R}^n$

Mějme bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$. Ortogonalizujme ji.

$$\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{f}_i := \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\mathbf{f}_j, \text{ kde } \alpha_{ij} = \frac{(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)}{\|\mathbf{f}_j\|^2}, \text{ pro } i \in \{2, \dots, n\}.$$

Arnoldiho (spec. Gram-Schmidt) algoritmus v $\mathcal{P}^n$, 3-členná rekurence

$$p_0(x) := 1,$$

$$p_i(x) := x\, p_{i-1}(x) - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij}\, p_j(x), \text{ kde } \alpha_{ij} = \frac{(x\, p_{i-1}(x), p_j(x))}{(p_j(x), p_j(x))}, \text{ pro } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pro $L^2_w(a,b)$ skal. součin dostáváme 3-člennou rekurenci t.j.

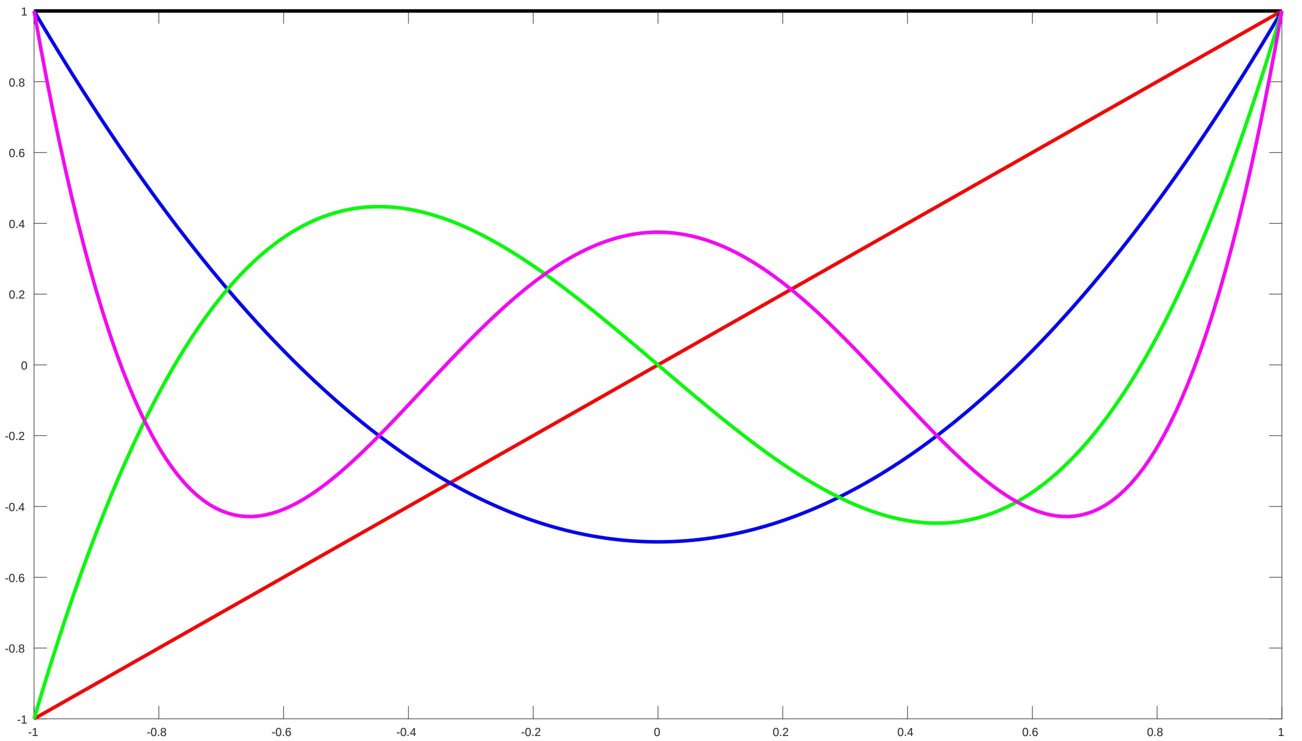
$$\alpha_{i,i-2} = \alpha_{i,i-3} = \cdots = \alpha_{i,0} = 0.$$

Ortogonální systémy polynomů

Legendreovy polynomy

$$a := -1, \quad b := 1, \quad w(x) := 1:$$

$$P_0(x) := 1, \quad P_1(x) := x, \quad P_n(x) := \frac{2n-1}{n}\, x\, P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}\, P_{n-2}(x) \text{ pro } n \geq 2.$$

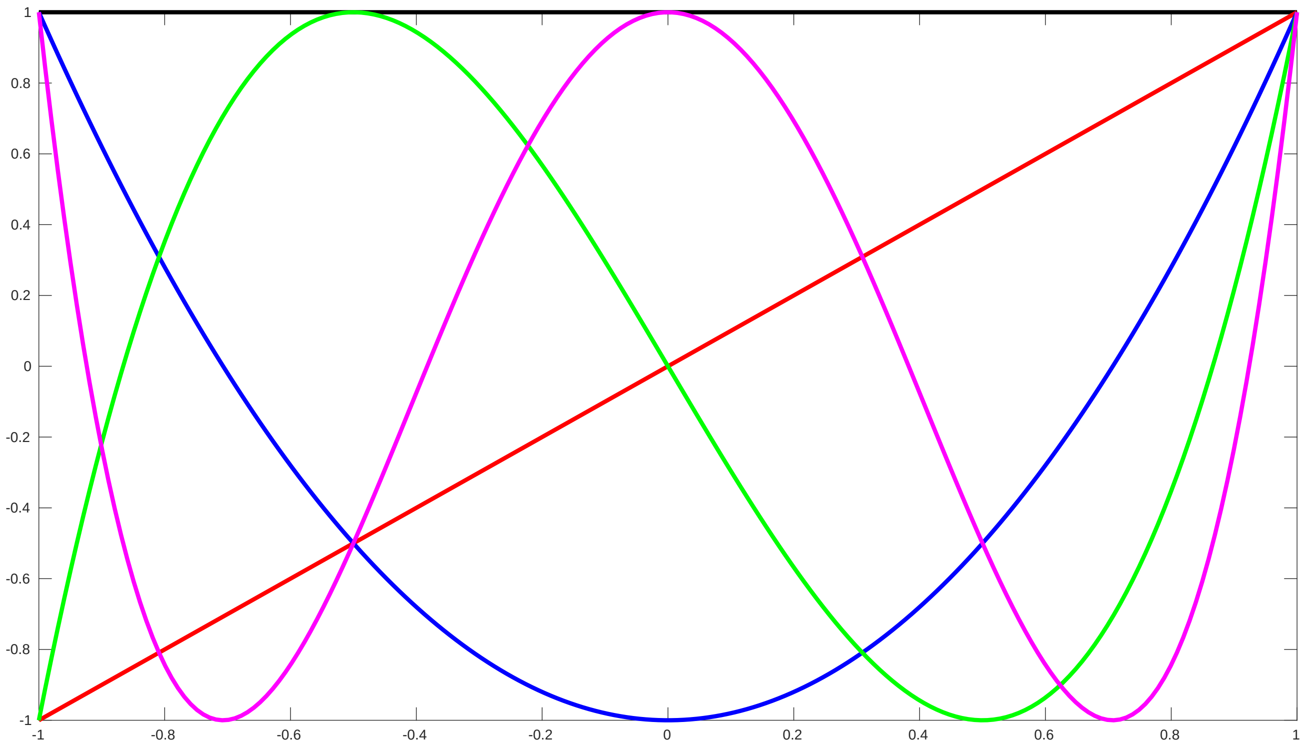


Ortogonální systémy polynomů

Čebyševovy polynomy

$$a := -1, \quad b := 1, \quad w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}:$$

$$T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x, \quad T_n(x) := 2\,x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \text{ pro } n \geq 2.$$

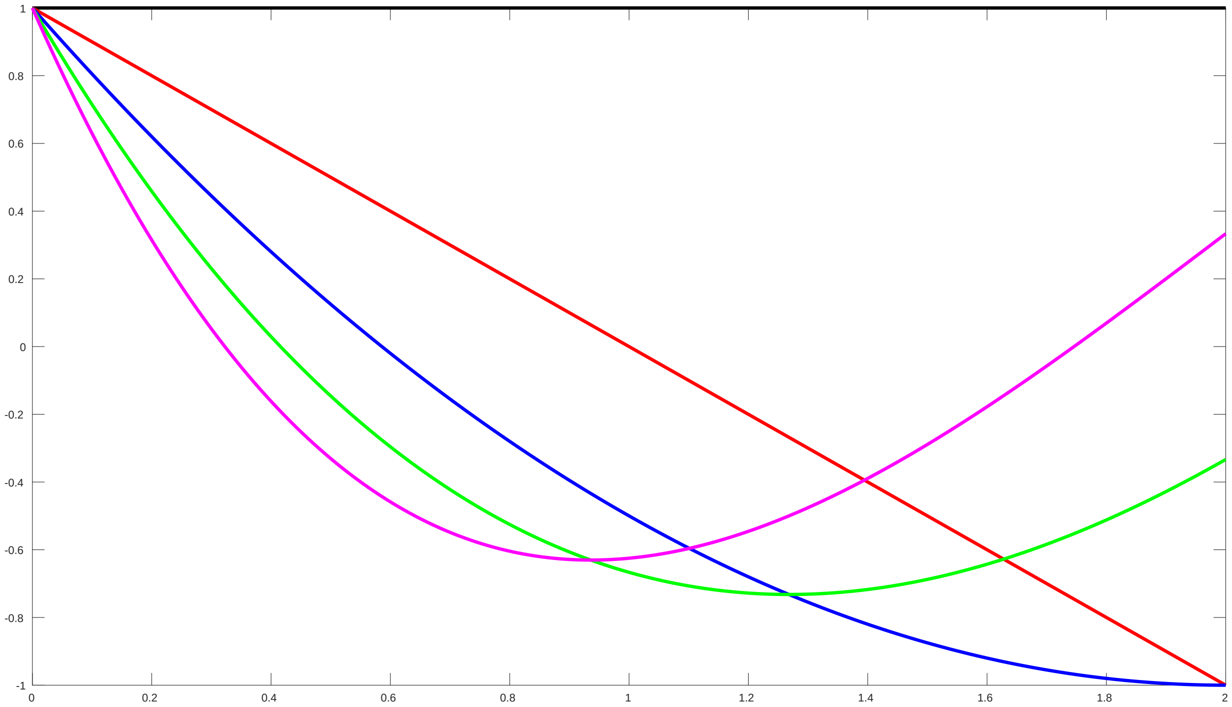


Ortogonální systémy polynomů

Laguerrovy polynomy

$$a := 0, \quad b := \infty, \quad w(x) := \mathrm{e}^{-x} :$$

$$L_0(x) := 1, \quad L_1(x) := 1-x, \quad L_n(x) := \frac{2\,n-1-x}{n}\,L_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} L_{n-2}(x) \text{ pro } n \geq 2.$$

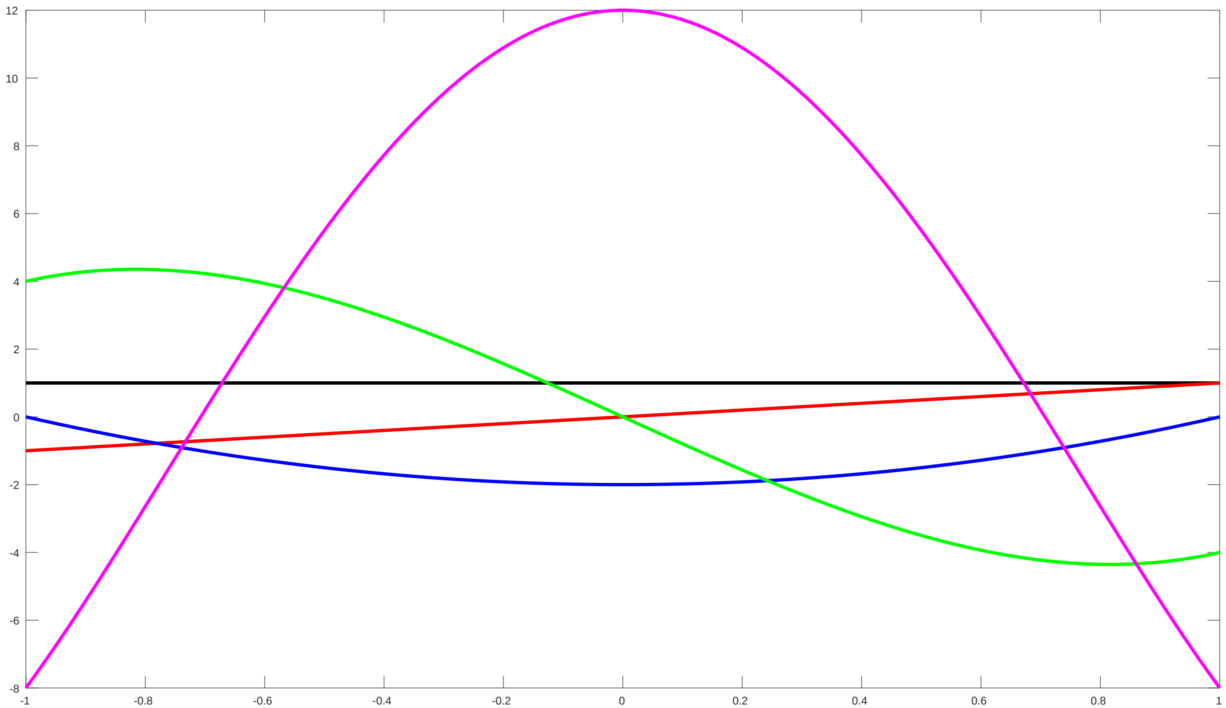


Ortogonální systémy polynomů

Hermiteovy polynomy

$$a := -\infty, \quad b := \infty, \quad w(x) := \mathrm{e}^{-x^2} :$$

$$H_0(x) := 1, \quad H_1(x) := x, \quad H_n(x) := 2\,x\,H_{n-1}(x) - 2\,(n-1)\,H_{n-2}(x) \text{ pro } n \geq 2.$$



Ortogonální systémy polynomů

Výpočet kořenů polynomu

Kořeny polynomu

$$p_n(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + \cdots + c_{n-1}\,x^{n-1} + c_n\,x^n,\ \ c_n \neq 0,$$

jsou totožné s kořeny polynomu

$$\widetilde{p}_n(x) := \underbrace{\frac{c_0}{c_n}}_{=:\widetilde{c}_0} + \underbrace{\frac{c_1}{c_n}}_{=:\widetilde{c}_1}\,x + \underbrace{\frac{c_2}{c_n}}_{=:\widetilde{c}_2}\,x^2 + \cdots + \underbrace{\frac{c_{n-1}}{c_n}}_{=:\widetilde{c}_{n-1}}\,x^{n-1} + x^n,$$

a ty jsou rovny vlastním číslům tzv. companion matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{c}_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{c}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \widetilde{c}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \widetilde{c}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Stabilní a rychlé numerické metody pro řešení náročných inženýrských úloh

Osnova 2. přednášky: Interpolace a numerická integrace

- Lagrangeova interpolace
- Ortogonální systémy polynomů
- Numerická integrace (kvadratura)

Numerická integrace (kvadratura)

Princip: Nahradíme integrand interpolantem.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-\xi_j^{(n)}}{\xi_i^{(n)}-\xi_j^{(n)}}\,dx$$

$$= \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} w_i^{(n)} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i^{(n)}\right),$$

kde např.

$$-1 \le \underbrace{\xi_0^{(n)} < \cdots < \xi_n^{(n)}}_{\text{integrační body}} \le 1, \qquad \underbrace{w_i^{(n)}}_{\text{int. váhy}} := \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{\xi-\xi_j^{(n)}}{\xi_i^{(n)}-\xi_j^{(n)}}\,d\xi$$

Newtonova(-Cotesova) kvadratura: $\xi_i^{(n)} := -1 + 2\frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.

Gaussova(-Legendreova) kvadratura: $\xi_i^{(n)}$ jsou kořeny Legendreova polynomu $P_{n+1}(x)$.

Numerická integrace (kvadratura)

Gaussova kvadratura

Uvažujme skalární součin $L^2_w(a,b)$ a integrál

$$I := (f,1)_{L^2_w(a,b)} = \int_a^b w(x)\, f(x)\, dx.$$

Integrační body volíme jako kořeny příslušného ortogonálního polynomu $p_{n+1}(x)$. Platí:

- Všechny kořeny p_{n+1} jsou reálné, leží v intervalu (a,b) a jsou navzájem různé.
- Kvadratura s těmito kořeny je přesná pro všechny polynomy z $\mathcal{P}^{2n+1}$.
- Je-li interval (a,b) omezený a $f(x)$ je v (a,b) analytická, pak Gaussova kvadratura konverguje exponenciálně.

Numerická integrace (kvadratura)

Gaussova vers. Newtonova kvadratura

$$\int_0^1 \sin(\pi\, x)\, dx = \frac{2}{\pi} \approx \mathbf{0.636619772367581}$$

n	Gaussova kvadratura	Newtonova kvadratura
0	1.000000000000000	1.000000000000000
1	**0.6**16190508479558	0.000000000000000
2	**0.63**7061877299981	**0.6**66666666666667
3	**0.63661**4752129754	**0.6**49519052838329
4	**0.636619**807472219	**0.636**1648221771
5	**0.636619772**201192	**0.636**366109282591
6	**0.63661977236**8151	**0.6366**25442624238
7	**0.63661977236758**	**0.6366**23230976873
8	**0.636619772367581**	**0.636619**719933897
31	**0.636619772367581**	**0.63661977236**3701
63	**0.636619772367581**	**0.63**8671875

Numerická integrace (kvadratura)

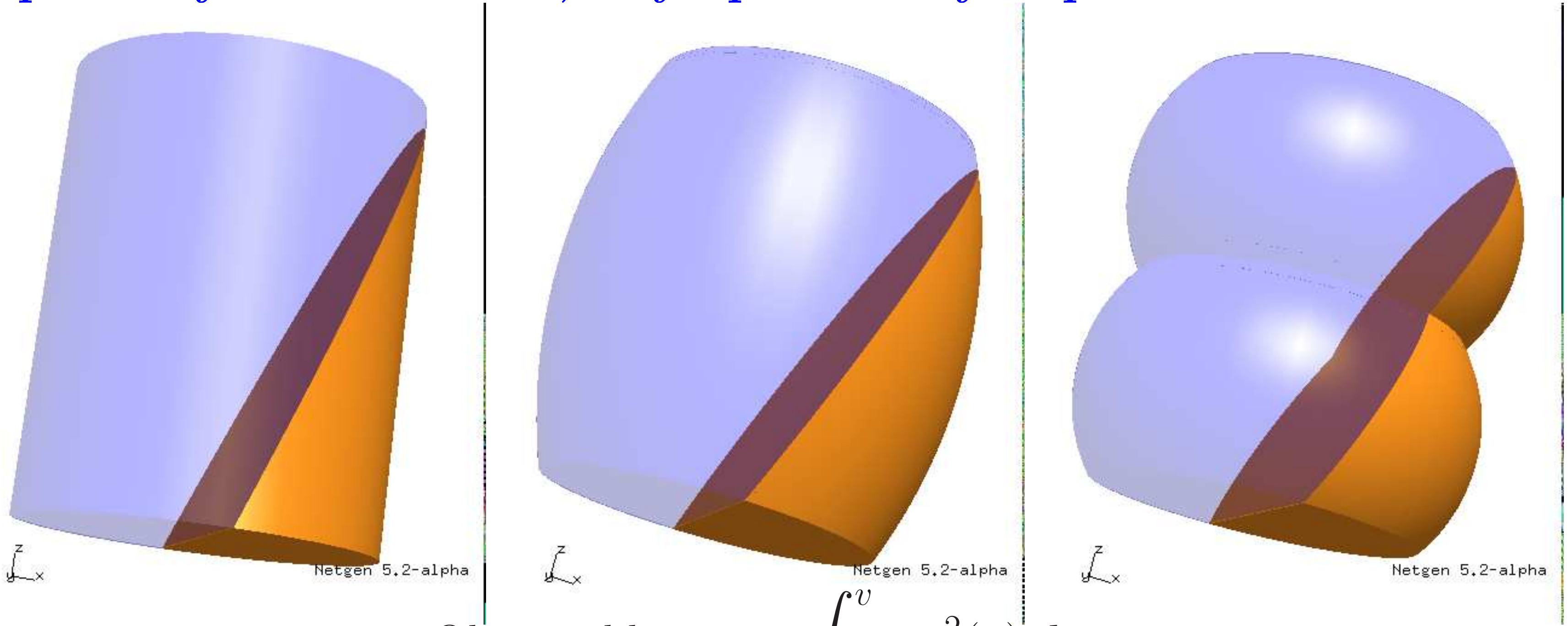
Gaussova vers. Newtonova kvadratura

$$\int_{-5}^{5} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\arctan(5) \approx \mathbf{2.74680153389003179}$$

n	Gaussova kvadratura	Newtonova kvadratura
0	10	10
1	1.07142857142857	0.384615384615385
2	4.79166666666667	6.79487179487179
3	1.8546365914787	**2.**08144796380091
4	3.53473960195448	**2.**37400530503979
5	**2.**30850279211885	**2.**30769230769231
6	3.08061040107096	3.8704486734708
7	**2.**540609588215	**2.**89899440974838
8	**2.**89351348551755	1.50048890712791
31	**2.746**78609298465	222.242927655308
63	**2.7468015338**4364	21050053.9804688

Numerická integrace (kvadratura)

Kolik piva zbývá ve sklenici, když pivo zakrývá půlku dna?



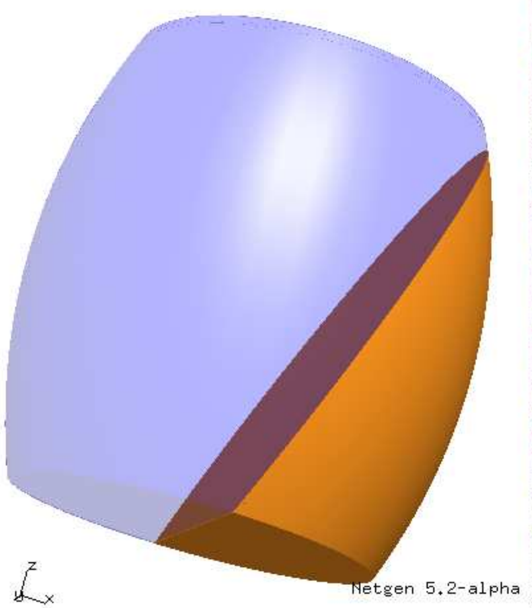
$$\text{Objem sklenice} = \int_0^v \pi\, r^2(z)\, dz,$$

$$\text{Objem piva} = \int_0^v \underbrace{\left[r^2(z)\ \arccos\left(\frac{r(v)}{v}\, \frac{z}{r(z)} \right) - \frac{r(v)}{v}\, z \sqrt{r^2(z) - \frac{r^2(v)}{v^2}\, z^2} \right]}_{=:f(z)} dz,$$

kde $r(z) : \langle 0, v \rangle \mapsto \mathbb{R}_+$ je tvar (pláště) sklenice a v je výška sklenice.

Numerická integrace (kvadratura)

Kolik piva zbývá ve sklenici, když pivo zakrývá půlku dna?



Např. $v := 1$, $r(z) := \frac{1}{4}(1 + z(1 - z))$:

$$\text{Objem sklenice} = \int_0^1 \pi\, r^2(z)\, dz = \frac{41}{120}\pi \approx \mathbf{1.07337748997651}$$

$$\text{Objem piva} = \int_0^1 f(z)\, dz \approx \int_0^1 p_n(z)\, dz = \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(z_i) =: I_n$$

kde $p_n(z)$ je polynom stupně n, který prochází $f(z)$ v kořenech $z_0, z_1, \ldots, z_n \in (0,1)$ Legendreova ortogonálního polynomu $P_{n+1}(z)$.

n	I_n	n	I_n	n	I_n
0	0.0774095141729434**7**	6	**0.066436**71413731998	15	**0.06643791**490228415
1	**0.06**553899985493714	7	**0.066437**29131780218	19	**0.06643792**997094274
2	**0.066**37347291541409	8	**0.066437**57022093867	23	**0.066437934**48415233
3	**0.0664**2069316066881	9	**0.066437**71627809419	31	**0.066437936**85101656
4	**0.06643**189208136203	10	**0.066437**79783358168	39	**0.0664379373**5796341
5	**0.06643**538893431605	11	**0.066437**84582290042	47	**0.06643793750**795548

Numerická integrace (kvadratura)

Nevlastní integrály: Gauss-Čebyševova kvadratura

$$I := \int_{-1}^{1} \frac{\sin(-x^2 + 2x + 3)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

n	I_n	n	I_n
0	0.443341580595411	9	**-0.0391346664**7139735
1	0.293198425234708	10	**-0.039134664648**3662
2	**-0.**113861235187953	11	**-0.0391346646488**48
3	**-0.03**8508399433212	12	**-0.03913466464889**1
4	**-0.03**86567452146315	13	**-0.039134664648890**3
5	**-0.0391**533120636902	14	**-0.039134664648890**5
6	**-0.03913**5492939562	15	**-0.039134664648890**3
7	**-0.0391346**109969149	16	**-0.039134664648890**4
8	**-0.039134664**349165		

Numerická integrace (kvadratura)

Nevlastní integrály: Gauss-Log kvadratura

$$I := \int_0^1 (-\ln x)\, \sin(-x^2 + 2x + 3)\, dx$$

n	I_n
0	**-0.2**91607881313853
1	**-0.23**1540043743048
2	**-0.2330**58284359943
3	**-0.23309**5330568843
4	**-0.2330943**64132324
5	**-0.233094358**761784
6	**-0.233094358**948475

Numerická integrace (kvadratura)

Nevlastní integrály: Gauss-Laguerrova kvadratura

$$I := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \sin(-x^2 + 2x + 3)\, dx$$

n	I_n
0	**-0.**756802495307928
1	**-0.**682845220356001
2	**-0.**139030561815973
3	**-0.**371584471181417
4	**-0.**448356834527666
5	**-0.**417148989312759
6	**-0.2**35589968451425
7	**-0.2**77817284587353
8	**-0.2**8564025525704

Numerická integrace (kvadratura)

Nevlastní integrály: Gauss-Hermiteova kvadratura

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \sin(-x^2 + 2x + 3)\, dx$$

n	I_n
0	**0.**250128701725529
1	**0.**165419497430028
2	-0.286982191582418
3	**0.**281071459595821
4	-0.0778606771918533
5	**0.0**410626030907351
6	**0.0**560746196873777
7	**0.0**0924459925113985
8	**0.0**395469713393161