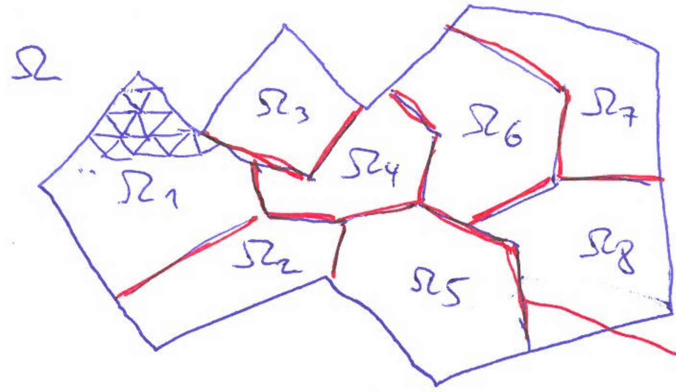
Metody rozložení oblasti bez překrytí (DDM)

Rozložme polygonální výpočetní oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d=2,3$, do podoblastí $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ bez překrytí, tj.

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\Omega_i}, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j$$

a tak, aby dekompozice respektovala triangulaci $\mathcal{T}^h(\Omega)$ a materiálovou funkci $k(x) := k_i > 0$, $x \in \Omega_i$



$$h := \max_{T \in \mathcal{T}^h} \operatorname{diam} T$$

$$H := \max_{i \in \{1,\dots,N\}} \operatorname{diam} \Omega_i$$

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^{N} \underbrace{\Gamma_i}_{\partial\Omega_i} \setminus \partial\Omega \quad \text{... interface, kostra, skeleton}$$

Uvažujme úlohu

$$(P) \begin{cases} \text{Hledám } u \in H_0^1(\Omega): \\ \sum_{i=1}^{N} k_i \int_{\Omega_i} \nabla u \nabla v = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \xrightarrow{\text{MKP}} \mathbb{A} \cdot \overline{u} = \overline{b}$$

I. Uspořádejme MKP-bázové funkce (uzly vnitřním Ω) po subdoménách

Algebraicky:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} A_1 & & & & A_{1\Gamma} \\ & A_2 & & & A_{2\Gamma} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & A_N & A_{N\Gamma} \\ \hline A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma 2} & \cdots & A_{\Gamma N} & A_\Gamma \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \vdots \\ \overline{u}_N \\ \hline \overline{u}_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \vdots \\ \overline{b}_N \\ \hline \overline{b}_\Gamma \end{bmatrix}$$

Variačně:

$u^h(x) = u_1^h(x) + \dots + u_N^h(x) + u_\Gamma^h(x)$:

- $\underbrace{\sum_{j=1}^{N} a(u_j^h, v_i^h)}_{=0 \text{ pro } i \neq j} + a(u_\Gamma^h, v_i^h) = b(v_i^h) \quad \forall v_i^h \in V_i^h$
- $\sum_{j=1}^{N} a(u_j^h, v_\Gamma^h) + a(u_\Gamma^h, v_\Gamma^h) = b(v_\Gamma^h) \quad \forall v_\Gamma^h \in V_\Gamma^h$

kde $\overline{u}_i$ jsou hodnoty (MKP-souřadnice) $u^h(x)$ ve vnitřních uzlech Ω_i a $\overline{u}_\Gamma$ jsou hodnoty $u^h(x)$ v uzlech na skeletonu Γ.

II. Řešme úlohu Gaussovou eliminací (a zpětnou sub.)

Algebraicky:

1. $A_i \bar{u}_i^P = b_i$ (paralelně)

2. $S \bar{u}_r = \bar{b}_r - \sum_{i=1}^{N} A_{ri} \bar{u}_i^P$ ... kritické místo

3. $A_i \bar{u}_i^H = -A_{ir} \bar{u}_r$ (paralelně)

To je ekvivalentní LDL^T-rozkladu

$$A = \begin{bmatrix} I_{nI} & 0 \\ A_{rI}(A_I)^{-1} & I_{nr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_I & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{nI} & (A_I)^{-1} A_{Ir} \\ 0 & I_{nr} \end{bmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{bmatrix} A_I, & A_{Ir} \\ A_{rI}, & A_r \end{bmatrix}$$

změna báze: $\varphi_i^\Gamma \longrightarrow \mathcal{H}^h(\varphi_i^\Gamma)$

... diskrétní harmonické rozšíření

Variačně

Ad 1, 3: $\begin{cases} u_j^{P,h}(x) \in V_i^h : \\ a(u_j^{P,h}, v_i^h) = b(v_i^h) \quad \forall v_i^h \in V_i^h \end{cases}$

je MKP-diskretizace úlohy (homogenní Dirichlet.) $\begin{cases} -k_i \Delta u_i^P(x) = f(x) & v\ \Omega_i \\ u_i^P(x) = 0 & \text{na } \Gamma_i \end{cases}$

Ad 2: $\begin{cases} u_\Gamma^h(x) \in V_\Gamma^h : \\ s(u_\Gamma^h, v_\Gamma^h) = E(v_\Gamma^h) \quad \forall v_\Gamma^h \in V_\Gamma^h \end{cases}$

je MKP-diskretizace úlohy

$$\begin{cases} -k_i \Delta u_\Gamma = 0 & v\ \Omega_i \\ u_\Gamma = 0 & \text{na } \partial\Omega \\ u_\Gamma \text{ spojité přes } \Gamma_i \setminus \partial\Omega & \\ k(x) \dfrac{du_\Gamma}{dn} \text{ poskočí o } c(x) & \text{přes } \Gamma_i \setminus \partial\Omega \end{cases}$$

$s(u_\Gamma^h, v_\Gamma^h) := a(\mathcal{H}^h(u_\Gamma^h), \mathcal{H}^h(v_\Gamma^h))$

kde $\tilde{u}_\Gamma^h := \mathcal{H}^h(u_\Gamma^h)$ je MKP-aproximace úlohy tzv. diskrétní harm. rozšíření

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 0 & v\ \Omega_i \\ \tilde{u} = 0 & \text{na } \partial\Omega \\ \tilde{u} = u_\Gamma^h & \text{na } \Gamma \end{cases}$$

Cílem metod rozložení oblasti je najít paralelní spol předpodmínění $\hat{A}^{-1}$ tak, aby

$$K(\hat{A}^{-1}A) = O\left(\left(1+\ln\frac{H}{h}\right)^{2}\right)$$

← někdy 1 nebo 3

Pozn. $\frac{H}{h} \cong \left(\frac{m}{N}\right)^{d}$ tj. $K(\hat{A}^{-1}A) = O\left(\left(1+d\ln\left(\frac{m}{N}\right)\right)^{2}\right)$

kde m.. celkový počet neznámých; $\frac{m}{N}$ počet neznámých na subdom

DDM – předpodmínění spočívá v nahrazení $\hat{S} \simeq S$.

$$\boxed{\hat{A} := \begin{bmatrix} I_{m^I} & 0 \\ A_{\Gamma I}(A_I)^{-1} & I_{m^\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_I & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m^I} & (A_I)^{-1}A_{I\Gamma} \\ 0 & I_{m^\Gamma} \end{bmatrix}}$$

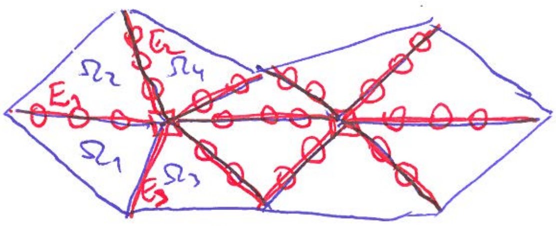
resp.

Ad 2. $\boxed{\hat{S}\,\hat{u}_\Gamma = \bar{b}_\Gamma - \sum_{i=1}^{N} A_{\Gamma i}\bar{u}_i^{P}}$

Platí: $\boxed{K(\hat{A}^{-1}A) = K(\hat{S}^{-1}S) \overset{!}{=} O\left(\left(1+\ln\frac{H}{h}\right)^{2}\right)}$

2d BPS (Bramble, Pasciak, Schatz 1986)

Nechť doménová dekompozice je také triangulace



M .. počet hran E_i

III. Uspořádejme bázové funkce φ_i^Γ na skeletonu po hranách

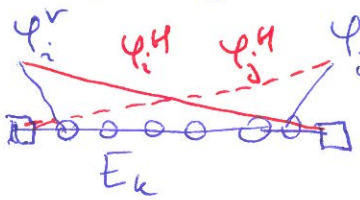
$$S = \left[\begin{array}{ccccc|c} S_{11}^{EE} & S_{12}^{EE} & S_{13}^{EE} & 0 & \cdots & S_1^{EV} \\ S_{21}^{EE} & S_{22}^{EE} & & & & \vdots \\ S_{31}^{EE} & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & S_{MM}^{EE} & S_M^{EV} \\ \hline & & \text{sym.} & & & S^{VV} \end{array}\right] =: \begin{bmatrix} S^{EE} & S^{EV} \\ S^{VE} & S^{VV} \end{bmatrix}$$

Platí: $\nexists k: E_i, E_j \subset \Gamma_k \Rightarrow S_{ij}^{EE} = 0$

IV. Změna báze $\varphi_i^V \to \varphi_i^H \dots$

lineární interpolace R^E z vrcholů (rohní uzly) na adjacentní podoblasti

1d analogie



$$S = \begin{bmatrix} I_{m^E} & 0 \\ -R^E & I_{m^V} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S^{EE} & \tilde{S}^{EV} \\ \tilde{S}^{VE} & \tilde{S}^{VV} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m^E}, & -(R^E)^T \\ 0, & I_{m^V} \end{bmatrix}$$

konvence

$\tilde{S}^{VV} = A^H$ … MKP-matice úlohy na hrubé (DD) ~~tri~~triangulaci

$$(A^H)_{ij} = a(\varphi_i^H, \varphi_j^H)$$

2d BPS předpodmínění

$$\boxed{\hat{S} := \begin{bmatrix} I_{m^E} & 0 \\ -R^E & I_{m^V} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} S_{11}^{EE} & & & 0 & \\ & S_{22}^{EE} & & & \\ & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & S_{MM}^{EE} & \\ \hline & & 0 & & A^H \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} I_{m^E} & -(R^E)^T \\ 0 & I_{m^V} \end{bmatrix}}$$

neboli

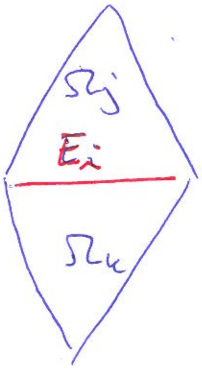
$$\boxed{\hat{S}^{-1} = \sum_{i=1}^{M} (R_i^E)^T (S_{ii}^{EE})^{-1} R_i^E + \begin{bmatrix} (R^E)^T \\ I_{m^V} \end{bmatrix} \cdot (A^H)^{-1} (R^E, I_{m^V})}$$

lokální úlohy

hrubý problém (komunikace)

$\boxed{S_{ii}^{EE} \overline{w}_i^E = \overline{c}_i^E}$ (paralelně)

$\Updownarrow$ $E_i \subset \Gamma_j, \Gamma_k$



$$\left[\begin{array}{cc|c} A_j & 0 & \\ 0 & A_k & \text{sym.} \\ \hline A_{ij}^{EI} & A_{ik}^{EI} & A_i^{EE} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \overline{w}_j \\ \overline{w}_k \\ \hline \overline{w}_i^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \hline \overline{c}_i^E \end{bmatrix}$$

--- MKP-diskretizace úlohy

$$\begin{cases} -k_j \Delta w_j = 0 & \text{v } \Omega_j \\ -k_k \Delta w_k = 0 & \text{v } \Omega_k \\ w_j \cancel{w_k} = 0 & \text{na } \Gamma_j \setminus E_i \\ w_k = 0 & \text{na } \Gamma_k \setminus E_i \\ w_j = w_k & \text{na } E_i \\ k_j \dfrac{dw_j}{dn_j} + k_k \dfrac{dw_k}{dn_k} = c_i^E & \text{na } E_i \end{cases}$$

3d BPS (Bramble, Pasciak, Schatz 1989; Dryja 1988; Smith 1991)

M ... počet stěn F_i ; W ... wire-basket ; W_i ... wire-basket Ω_i

III. Uspořádejme bázové funkce φ_i^Γ na skeletonu po stěnách

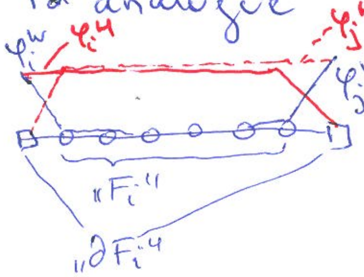
$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} S_{11}^{FF} & \cdots & & & \\ \vdots & S_{22}^{FF} & & & S^{FW} \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & S_{MM}^{FF} & \\ \hline & & S^{WF} & & S^{WW} \end{array}\right] =: \begin{bmatrix} S^{FF} & S^{FW} \\ S^{WF} & S^{WW} \end{bmatrix}$$

Platí: $\nexists k: F_i, F_j \subset \Gamma_k \Rightarrow S_{ij}^{FF} = 0$

IV. Změna báze $\varphi_i^W \rightarrow \varphi_i^H$

lin. transformace R^W přidá na vnitřní uzly stěn F_i průměrné hodnoty z uzlů z ∂F_i

1d analogie



$$S = \begin{bmatrix} I_{m^F} & 0 \\ -R^W & I_{m^W} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S^{FF} & \tilde{S}^{FW} \\ \tilde{S}^{WF} & \tilde{S}^{WW} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m^F} & -(R^W)^T \\ 0 & I_{m^W} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{S}^{WW} = S^H$$

Úloha $S^H \bar{u}^H = \bar{c}^H$ je stále náročná, nahradí se úlohou $\hat{S}^H \bar{u}^H = \bar{c}^H$ $(\hat{P}^H)$

$$(\hat{P}^H) \quad \boxed{\min_{\bar{u}^H} \Big\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \underbrace{\left(1 + \log \frac{H_i}{h_i}\right) h_i k_i}_{=: d_i} \min_{\eta_i \in \mathbb{R}} \|\bar{u}_i^H - \eta_i\|^2 - \bar{c}^H \cdot \bar{u}^H \Big\}}$$

Hrubý problém

$$\eta_i = \frac{1}{m^{W_i}} \sum_{k=1}^{m^{W_i}} (\bar{u}_i^H)_k \quad \text{... průměr z } \bar{u}_i^H \text{ přes } \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$$

$$\varphi(\bar{u}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N d_i \sum_{j=1}^{m^{W_i}} \left[(\bar{u}_i^H)_j - \frac{1}{m^{W_i}} \sum_{k=1}^{m^{W_i}} (\bar{u}_i^H)_k \right]^2 - \bar{c}^H \cdot \bar{u}^H$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_e^H}(\bar{u}^H) = \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{\substack{i=1 \\ x_e \in W_i}}^N d_i \sum_{j=1}^{m^{W_i}} \cancel{2} \cdot \left[(\bar{u}_i^H)_j - \frac{1}{m^{W_i}} \sum_{k=1}^{m^{W_i}} (\bar{u}_i^H)_k \right] \cdot \left[\delta_{je} - \frac{1}{m^{W_i}} \right] - c_e$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ x_e \in W_i}}^N d_i \sum_{j=1}^{m^{W_i}} \left[(\bar{u}_i^H)_j \delta_{je} - \frac{1}{m^{W_i}} (\bar{u}_i^H)_j - \frac{\delta_{je}}{m^{W_i}} \sum_{k=1}^{m^{W_i}} (\bar{u}_i^H)_k + \frac{1}{(m^{W_i})^2} \sum_{k=1}^{m^{W_i}} (\bar{u}_i^H)_k \right] - c_e$$

$$= \boxed{\sum_{\substack{i=1 \\ x_e \in W_i}}^N d_i \Big[(\bar{u}_i^H)_e \underbrace{- \eta_i - \eta_i + \eta_i}_{-\eta_i} \Big] - c_e \overset{!}{=} 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\bar{u}^H)_e = \frac{1}{\sum_{\substack{i=1 \\ x_e \in W_i}}^N d_i} \Big[c_e + \sum_{\substack{i=1 \\ x_e \in W_i}}^N d_i \eta_i \Big]}$$

Dosadíme $(\bar{u}^H)_k$ do rovnice $\eta_i = \frac{1}{n^{w_i}} \sum_{k=1}^{n^{w_i}} (\bar{u}^H_i)_k$:

$$\boxed{\eta_i = \frac{1}{n^{w_i}} \sum_{k=1}^{n^{w_i}} \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ x_k^{w_i} \in W_j}}^{N} d_i} \left[(\bar{c}^H_i)_k + \sum_{\substack{j=1 \\ x_k^{w_i} \in W_j}}^{N} d_j \eta_j \right] , \quad i = 1, \dots, N}$$

Hrubý $\boxed{\hat{S}^H \bar{u}^H = \bar{c}^H}$ problém

1) $\boxed{\bar{B}\bar{\eta} = \bar{e}} \leftarrow \bar{c}^H$

2) $\bar{u}^H \leftarrow \bar{\eta}, \bar{c}^H$

řídká soustava s jedním stupněm volnosti na subdoménu

3d BPS předpodmínění

$$\boxed{\hat{S} := \begin{bmatrix} I_{m^F} & 0 \\ -R^W & I_{m^W} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} S^{FF}_{11} & 0 & \\ 0 & \ddots \; S^{FF}_{Mn} & 0 \\ \hline & 0 & \hat{S}^H \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} I_{m^F} & -(R^W)^T \\ 0 & I_{m^W} \end{bmatrix}}$$

neboli

$$\boxed{\hat{S}^{-1} := \sum_{i=1}^{M} (R_i^W)^T (S^{FF}_{ii})^{-1} R_i^W + \begin{bmatrix} (R^W)^T \\ I_{m^W} \end{bmatrix} \cdot (\hat{S}^H)^{-1} \cdot [R^W, I_{m^W}]}$$

lokální úlohy (paralelní) hrubý problém (komunikace)

3d Metody Neumann-Neumann (DeRoeck, LeTallec 1991)

Schurův doplněk lze sestavit z lokálních Neumannových matic

$$S = \sum_{i=1}^{N} N_i S_i (N_i)^T \quad , \text{kde} \quad S_i := A_i^\Gamma - A_i^{\Gamma I} (A_i)^{-1} A_i^{I\Gamma}$$

a N_i zobrazuje lok. indexy uzlů na Γ_i na globální (rozptýlená jednotková matice)

MKP-diskretizace Steklov-Poincarého operátoru $S_i u_i^\Gamma := \frac{d\tilde{u}_i}{dn}$, kde $\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_i = 0 \text{ v } \Omega_i \\ \tilde{u}_i = u_i^\Gamma \text{ na } \Gamma_i \end{cases}$

Zvolme škálování $D_i := \left[\frac{1}{k_i} \sum_{\substack{j=1 \\ \Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset}}^{N} k_j \right]^{-1}$ a rozdělení jednotky $\sum_{i=1}^{N} N_i D_i N_i^T = I_{m^\Gamma}$

Předpodmínění $\bar{z} := \hat{S}^{-1} \bar{r}$:

1) $\bar{r}_i := D_i^T N_i^T \bar{r}$ ... distribuce rezidua

2) $S_i \bar{u}_i = \bar{r}_i$ ... paralelní řešení lokálních Neumannových úloh

3) $\bar{z} := \sum_{i=1}^{N} N_i D_i \bar{u}_i$ ... průměrování lokálních výsledků

Balancing Domain Decomposition (Mandel 1993; Mandel, Brezina 1995)

Přidá k metodě Neumann–Neumann hrubý problém.

$$\mathrm{Ker}\, S_i = \mathrm{Im}\, Z_i \quad , \text{ kde } Z_i \text{ jsou}$$
- konstanty $(\bar{1})$ pro Laplace
- rigid body modes (pružnost)

Coarse space (v duchu ~~multi~~ two gridu)

$$V^H := \{ \bar{v} \in \tilde{V}^\Gamma : \bar{v} = \sum_{i=1}^N N_i D_i \bar{z}_i, \text{ kde } \bar{z}_i \in \mathrm{Im}\, Z_i \}$$

$\tilde{V}^\Gamma$ … diskrétní harmonická rozšíření MKP-báze na skeletonu

Projekce rezidua $F \in V^*$ na $F^H \in (V^H)^* \supset V^*$:

$$\boxed{\langle F^H, \bar{v}^H \rangle = \langle F, \bar{v}^H \rangle \quad \forall \bar{v}^H \in V^H}$$
$$\langle F^H, \bar{v}^H \rangle = \langle S \bar{u}^H, \bar{v}^H \rangle$$

$$\equiv \forall i : (N_i D_i Z_i)^T \cdot S \cdot \sum_j N_j D_j Z_j \bar{\lambda}_j = (N_i D_i Z_i)^T F$$

Předpodmínění BDD, $\bar{z} := \hat{S}^{-1} \bar{r}$:

1) $\forall i \in \{1, \dots, N\} : Z_i^T D_i^T N_i^T \cdot S \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^N N_j D_j Z_j \bar{\lambda}_j}_{=: \bar{u}^H} = Z_i^T D_i^T N_i^T \bar{r}$

$\bar{s} := \bar{r} - S \cdot \bar{u}^H$

… Balancing $\bar{r}$ … projekce rezidua na $(V^H)^*$ ≡ hrubý problém (komunikace)

2) $\forall i \in \{1, \dots, N\} : S_i \bar{u}_i = D_i^T N_i^T \bar{s}$ … řešení lokálních Neum. úloh (paralelní)

3) ~~$\forall i \in \{1,\dots,N\}$~~: $\bar{u} := \sum_{j=1}^N N_j D_j \bar{u}_j$

$\bar{t} := \bar{r} - S \cdot \bar{u}$

$\forall i \in \{1, \dots, N\} : Z_i^T D_i^T N_i^T \cdot S \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^N N_j D_j Z_j \bar{\mu}_j}_{=: \bar{w}^H} = Z_i^T D_i^T N_i^T \cdot \bar{t}$

$\bar{z} := \bar{u} + \bar{w}^H$

Balance rez. and average results (komunikace)