

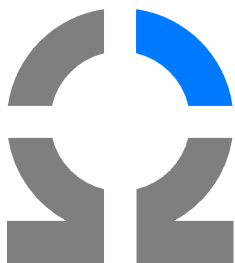
Úvod do geometrického multigridu

Tomášův seminář, 24. března 2011

D. Lukáš

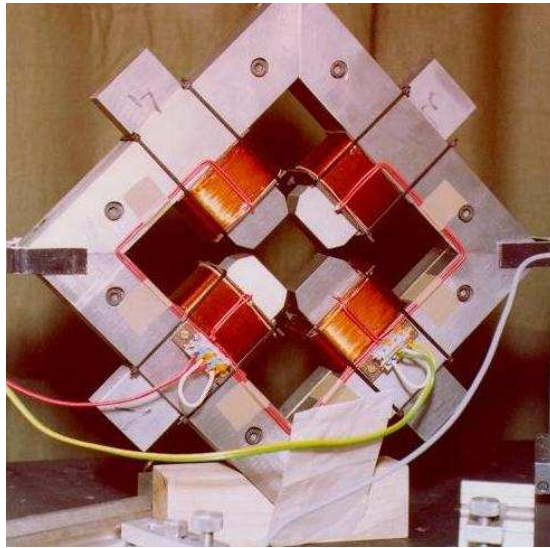
Katedra aplikované matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

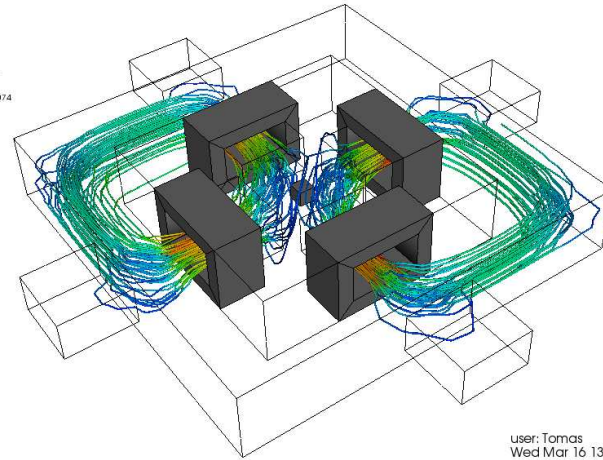


Motivace: Multigrid-MKP má lineární složitost

Výpočet magnetostatického pole (rel. přesnost 10^{-4} , 1 jádro Floreonu)

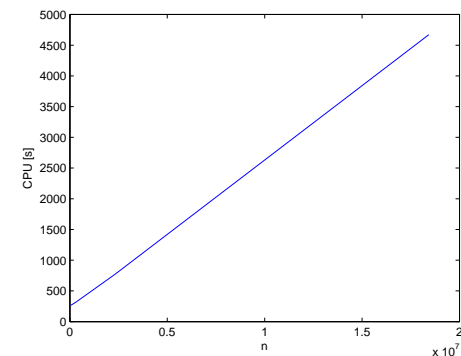


DB: MalfeseCross-forVist.case
Time:0
Streamline
Vmax: 1.485
1.114
0.7426
0.3714
0.0001074
Min: -1.485
Max: 0.0001074



user: Tomas
Wed Mar 16 13:32:27 2011

úroveň	počet hran	PCG iter.	CPU	Mem
0	39.310	1	4 min 23 s	269 MB
1	299.166	3	5 min 20 s	834 MB
2	2.333.312	3	13 min	5,14 GB
3	18.428.912	3	1 h 18 min	39,64 GB



Řídká Gaussova eliminace má pro 2d MKP složitost $O(n^{3/2})$ a pro 3d MKP $O(n^{5/3})$.

Úvod do geometrického multigridu

Osnova

- Vlastní kmity struny
- Richardsonova metoda
- Metoda dvou sítí
- Geometrický multigrid
 - Implementace pro $H^1(\Omega)$ (pružnost, akustika)
 - Implementace pro $H(\mathbf{rot}; \Omega)$ (magnetostatika, elmg. záření)

Úvod do geometrického multigridu

Osnova

- Vlastní kmity struny
- Richardsonova metoda
- Metoda dvou sítí
- Geometrický multigrid
 - Implementace pro $H^1(\Omega)$ (pružnost, akustika)
 - Implementace pro $H(\mathbf{rot}; \Omega)$ (magnetostatika, elmg. záření)

Vlastní kmity struny

Spojité úloha

$$\begin{cases} -v_i''(x) = \sigma_i v_i(x), & x \in (0, 1) \\ v_i(0) = v_i(1) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \sigma_i = (\pi i)^2, \quad v_i(x) = \sin(\pi i x)$$

Spektrum MKP matice

Diskretizační krok $h = \frac{1}{n}$, uzly diskretizace $x_j := \frac{j}{n}$, $j = 0, 1, \dots, n-1, n$.

Dirichletova MKP matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$:

$$\mathbf{A} = \text{tridiag}(-1/h, 2/h, -1/h).$$

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_i = \frac{2}{h} \left[1 - \cos \left(\pi i \frac{1}{n} \right) \right], \quad (\mathbf{v}_i)_j = \sin \left(\pi i \frac{j}{n} \right), \quad i, j = 1, \dots, n-1$$

Odhad z Geršgorinovy věty

$$\Lambda := \frac{4}{h} > \lambda_{\max}(\mathbf{A}) = \frac{2}{h} \left[1 - \cos \left(\pi \frac{n-1}{n} \right) \right]$$

Úvod do geometrického multigridu

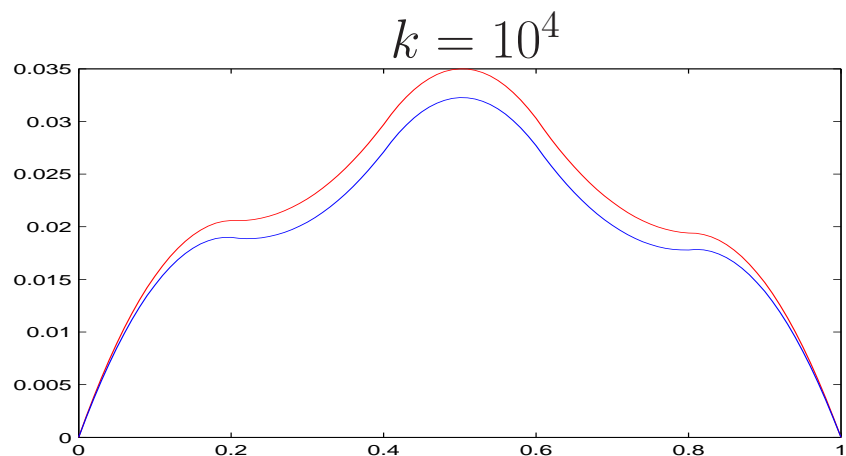
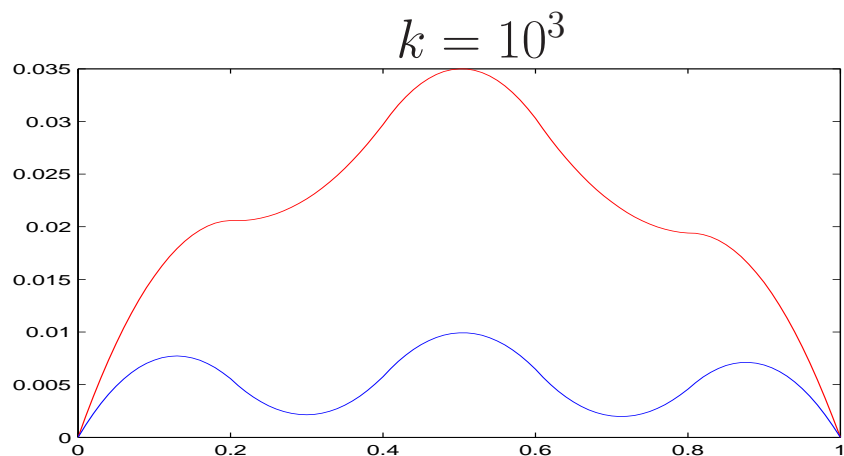
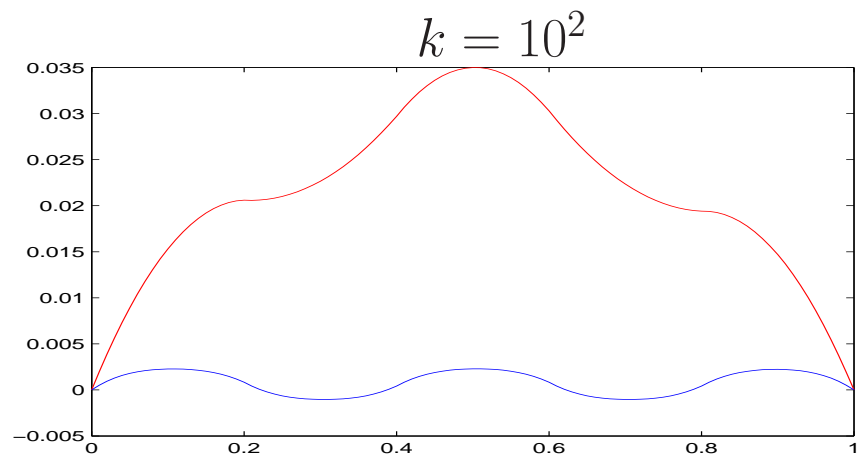
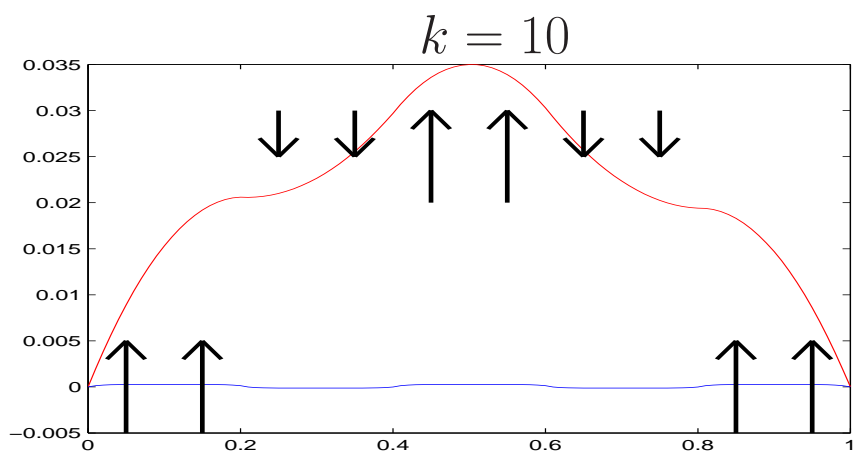
Osnova

- Vlastní kmity struny
- Richardsonova metoda
- Metoda dvou sítí
- Geometrický multigrid
 - Implementace pro $H^1(\Omega)$ (pružnost, akustika)
 - Implementace pro $H(\mathbf{rot}; \Omega)$ (magnetostatika, elmg. záření)

Richardsonova metoda

Jemná MKP diskretizace průhybu struny

řeší $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$ iteracemi $\mathbf{u}^{k+1} := \mathbf{u}^k + \frac{1}{\Lambda} \mathbf{r}^k$, kde $\mathbf{u}^0 := \mathbf{0}$, $\mathbf{r}^k := \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{u}^k$, $\Lambda \geq \lambda_{\max}(\mathbf{A})$.

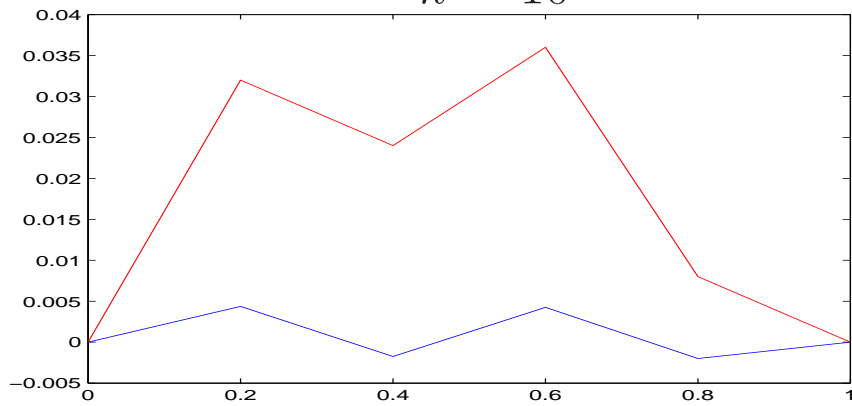


Richardsonova metoda

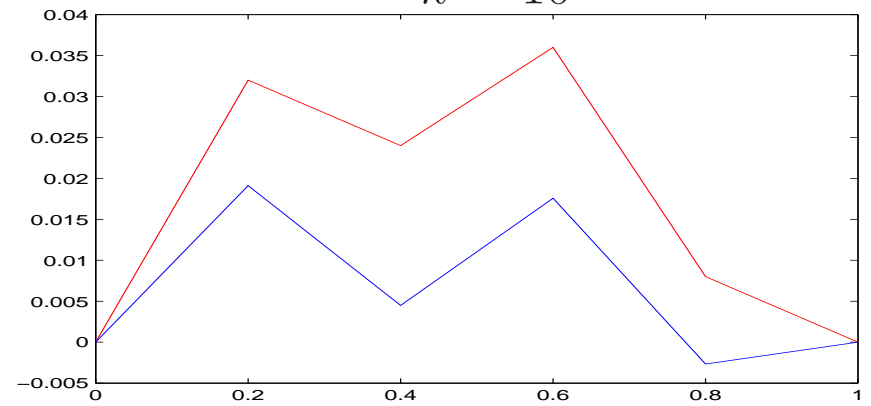
Hrubá diskretizace

řeší $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$ iteracemi $\mathbf{u}^{k+1} := \mathbf{u}^k + \frac{1}{\Lambda} \mathbf{r}^k$, kde $\mathbf{u}^0 := \mathbf{0}$, $\mathbf{r}^k := \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{u}^k$, $\Lambda \geq \lambda_{\max}(\mathbf{A})$.

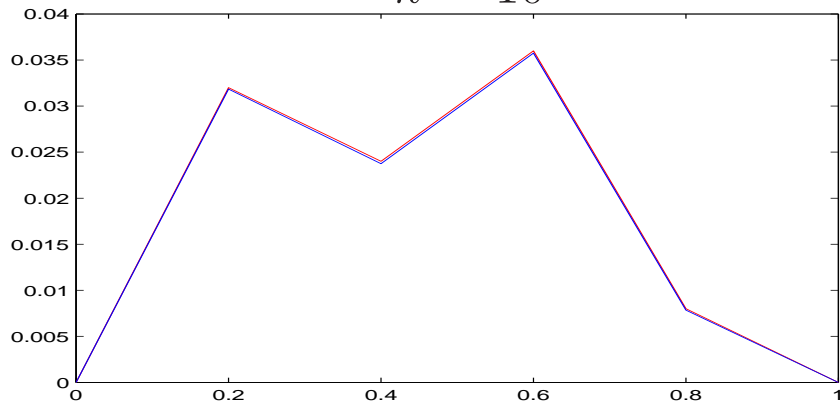
$k = 10$



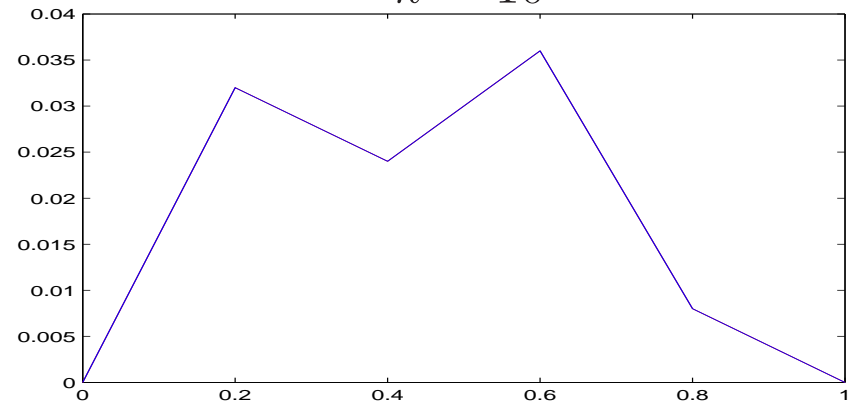
$k = 10^2$



$k = 10^3$



$k = 10^4$



Richardsonova metoda

Zhlazovací účinky

řeší $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$ iteracemi $\mathbf{u}^{k+1} := \mathbf{u}^k + \frac{1}{\Lambda} \mathbf{r}^k$, kde $\mathbf{u}^0 := \mathbf{0}$, $\mathbf{r}^k := \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{u}^k$, $\Lambda \geq \lambda_{\max}(\mathbf{A})$.

Rychlé složky rezidua konvergují rychle

$$\sum_{j=1}^n r_j^{k+1} \mathbf{v}_j = \mathbf{r}^{k+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\Lambda} \mathbf{A} \right) \mathbf{r}^k = \sum_{j=1}^n r_j^k \left(1 - \frac{\lambda_j}{\Lambda} \right) \mathbf{v}_j$$

$$\rho_i := \frac{r_i^{k+1}}{r_i^k} = 1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda} \in (0, 1), \quad \text{kde } \mathbf{r}^k = \sum_{j=1}^n r_j^k \mathbf{v}_j$$

a kde

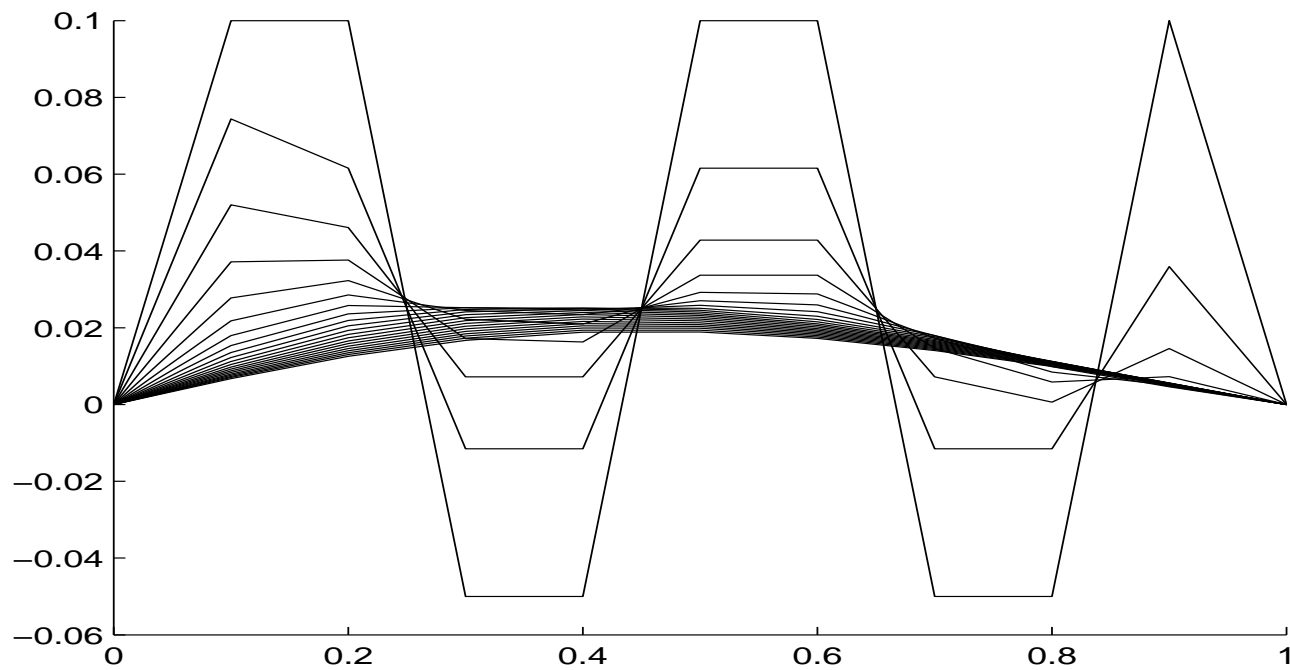
$\lambda_i \dots$ neklesající posloupnost vlastních čísel \mathbf{A} ,

$\mathbf{v}_i \dots$ odpovídající vlastní vektory \mathbf{A} .

Richardsonova metoda

Zhlazovací účinky

Reziduum \mathbf{r}^k pro $k = 0, 1, \dots, 20$



Úvod do geometrického multigridu

Osnova

- Vlastní kmity struny
- Richardsonova metoda
- Metoda dvou sítí
- Geometrický multigrid
 - Implementace pro $H^1(\Omega)$ (pružnost, akustika)
 - Implementace pro $H(\mathbf{rot}; \Omega)$ (magnetostatika, elmg. záření)

Metoda dvou sítí

Princip

- **Smoothing property:** Richardsonova metoda zhlazuje vysoké frekvence v reziduu.
- **Approximation property:** Hladké funkce lze dobře aproximovat na hrubé síti.

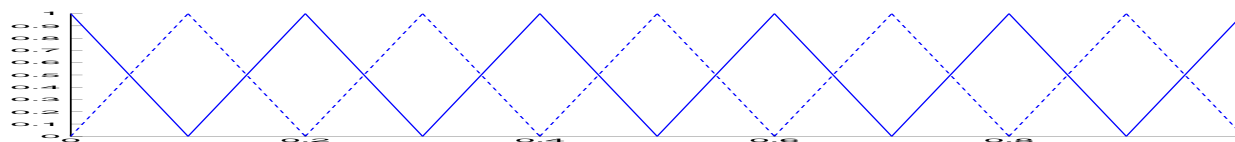
Algoritmus

- Několik Richardsonových iterací na jemné síti (pre-smoothing)
- Gaussova eliminace rezidua na hrubé síti (coarse problem)
- Několik Richardsonových iterací na jemné síti (post-smoothing, kvůli symetrii)

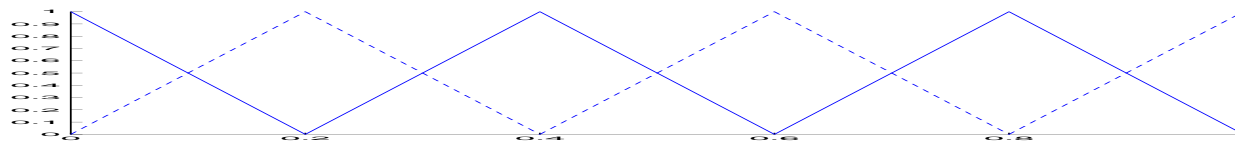
Metoda dvou sítí (geometrický 2-grid)

Komponenty

- Jemná diskretizace na $V^h \subset H^1(0, 1)$: $\mathbf{A}^h, \mathbf{b}^h$, MKP báze $E^h := (e_1^h(x), \dots, e_n^h(x))$



- Hrubá diskretizace na $V^H \subset V^h$: \mathbf{A}^H , MKP báze $E^H := (e_1^H(x), \dots, e_N^H(x))$



- Geršgorinův smoother $\Lambda \geq \lambda_{\max}(\mathbf{A}^h)$
- Prolongace $\mathbf{P}_H \in \mathbb{R}^{n \times N}$ (operátor vnoření): $\mathbf{P}_H \cdot [v_H(x)]_{E^H} = [v_H(x)]_{E^h}$, kde $[v(x)]_E$ je souřadnicový vektor funkce $v(x)$ v bázi E .

Metoda dvou sítí

Algoritmus $\mathbf{u}^h := \text{twogrid}(\mathbf{r}^h)$ (1 iterace)

$\mathbf{u}^h := \mathbf{0}$

% Krok 1. Pre-smoothing

for $s := 1, \dots, \nu$ **do**

$\mathbf{u}^h := \mathbf{u}^h + \frac{1}{\Lambda} \mathbf{r}^h$

$\mathbf{r}^h := \mathbf{b}^h - \mathbf{A}^h \mathbf{u}^h = \mathbf{r}^h - \frac{1}{\Lambda} \mathbf{A}^h \mathbf{r}^h$

end for

% Krok 2. Korekce na hrubé síti

$\mathbf{r}^H := (\mathbf{P}^H)^T \mathbf{r}^h$ (projekce rezidua)

$\mathbf{w}^h := \mathbf{P}^H (\mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{r}^H$ (prolongace hrubé korekce na jemnou síť)

$\mathbf{u}^h := \mathbf{u}^h + \mathbf{w}^h, \mathbf{r}^h := \mathbf{r}^h - \mathbf{A}^h \mathbf{w}^h$

% Krok 3. Post-smoothing (kvůli symetrie)

for $s := 1, \dots, \nu$ **do**

$\mathbf{u}^h := \mathbf{u}^h + \frac{1}{\Lambda} \mathbf{r}^h, \mathbf{r}^h := \mathbf{r}^h - \frac{1}{\Lambda} \mathbf{A}^h \mathbf{r}^h$

end for

Metoda dvou sítí

Prolongace $P^H : V^H \rightarrow V^h$

$$\mathbf{P}^H := ([e_1^H(x)]_{E^h}, \dots, [e_N^H(x)]_{E^h}) = (e_j^H(x_i^h))_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Projekce rezidua: $r^h \in (V^h)^* \rightarrow (V^H)^* \ni r^H$

$$\forall v^H(x) \in V^H : \langle \mathbf{r}^H, v^H(x) \rangle_H = \langle r^h, P^H v^H(x) \rangle_h = \langle (P^H)^* r^h, v^H(x) \rangle_H$$

Pro $v^H(x) := e_i^H(x)$:

$$(\mathbf{r}^H)_i = \langle r^H, e_i^H(x) \rangle_H = \langle r^h, P^H e_i^H(x) \rangle_h = (\mathbf{r}^h)^T \mathbf{P}^H \mathbf{e}_i^H = (\mathbf{e}_i^H)^T (\mathbf{P}^H)^T \mathbf{r}^h = ((\mathbf{P}^H)^T \mathbf{r}^h)_i$$

Metoda dvou sítí

Lineární iterační metoda

$$\mathbf{u}_0^h := \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}_0^h := \mathbf{b}^h$$

$$k := 0$$

while $\|\mathbf{r}_k^h\| / \|\mathbf{r}_0^h\| > \varepsilon$ **do**

$$\mathbf{u}_{k+1}^h := \mathbf{u}_k^h + \text{twogrid}(\mathbf{r}_k^h)$$

$$\mathbf{r}_{k+1}^h := \mathbf{b}^h - \mathbf{A}^h \mathbf{u}_k^h$$

$$k := k + 1$$

end while

Předpodmínění (rezidua) v PCG

$$\mathbf{z}_{k+1}^h := \widehat{\mathbf{A}}^h{}^{-1} \mathbf{r}_{k+1}^h \text{ se nahradí}$$

$$\mathbf{z}_{k+1}^h := \text{twogrid}(\mathbf{r}_{k+1}^h)$$

Metoda dvou sítí

Redukce rezidua

$$\mathbf{r}_{k+1}^h = \underbrace{\left(\mathbf{I}^h - \frac{1}{\Lambda} \mathbf{A}^h \right)^\nu \left[\mathbf{I}^h - \mathbf{A}^h \mathbf{P}^H (\mathbf{A}^H)^{-1} (\mathbf{P}^H)^T \right] \left(\mathbf{I}^h - \frac{1}{\Lambda} \mathbf{A}^h \right)^\nu}_{=:\mathcal{E}_{2G}^h} \mathbf{r}_k^h$$

Metoda dvou sítí

Pokus o analýzu konvergence v 1d: Smoothing property

$$\forall h : \|\mathcal{E}_{2G}^h\| \leq \rho < 1,$$

a tedy metoda dvou sítí konverguje a počet iterací nezávisí na velikosti úlohy

$$k \leq \frac{1}{|\log \rho|} |\log \varepsilon|.$$

Rozložme reziduum do vl. vektorů $\mathbf{v}_i^h := \sin(\pi i j / n)$ s $\lambda_i := (2/h)[1 - \cos(\pi i / n)]$

$$\mathbf{r}^h = \underbrace{\sum_{i=1}^{n/2-1} r_i^h \mathbf{v}_i^h(x)}_{\mathbf{r}_{\text{slow}}^h} + \underbrace{\sum_{i=n/2}^n r_i^h \mathbf{v}_i^h(x)}_{\mathbf{r}_{\text{fast}}^h},$$

Pak

$$\left\| \left(\mathbf{I}^h - \frac{1}{\Lambda} \mathbf{A}^h \right)^\nu \mathbf{r}_{\text{fast}}^h \right\| \leq \max_{i \geq n/2} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda} \right)^\nu \|\mathbf{r}_{\text{fast}}^h\| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^\nu \|\mathbf{r}_{\text{fast}}^h\|.$$

Metoda dvou sítí

Pokus o analýzu konvergence v 1d: Approximation property

Rozložme reziduum do vl. vektorů $\mathbf{v}_i^h := \sin(\pi i j/n)$ s $\lambda_i := (2/h)[1 - \cos(\pi i/n)]$

$$\mathbf{r}^h = \underbrace{\sum_{i=1}^{n/2-1} r_i^h \mathbf{v}_i^h(x)}_{\mathbf{r}_{\text{slow}}^h} + \underbrace{\sum_{i=n/2}^n r_i^h \mathbf{v}_i^h(x)}_{\mathbf{r}_{\text{fast}}^h},$$

Zbývá dokázat, že existuje $\rho_2 < 1$ nezávisle na h tak, že

$$\left\| \left[\mathbf{I}^h - \mathbf{A}^h \mathbf{P}^H (\mathbf{A}^H)^{-1} (\mathbf{P}^H)^T \right] \mathbf{r}_{\text{slow}}^h \right\| \leq \rho_2 \|\mathbf{r}_{\text{slow}}^h\|.$$

...

To jsem nestihl.

Úvod do geometrického multigridu

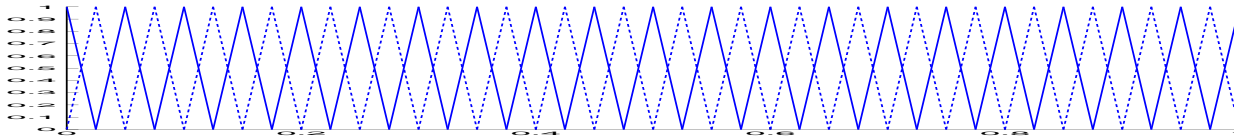
Osnova

- Vlastní kmity struny
- Richardsonova metoda
- Metoda dvou sítí
- Geometrický multigrid
 - Implementace pro $H^1(\Omega)$ (pružnost, akustika)
 - Implementace pro $H(\mathbf{rot}; \Omega)$ (magnetostatika, elmg. záření)

Geometrický multigríd

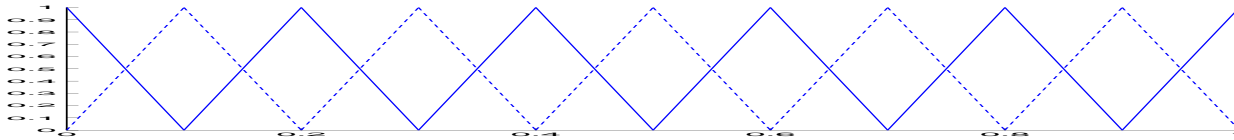
Hierarchie diskretizací $V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^L \subset H^1(0, 1)$

Úroveň L na V^L : $\mathbf{A}^L, \mathbf{b}^L$, MKP báze E^L o dimenzi n^L , smoother Λ^L

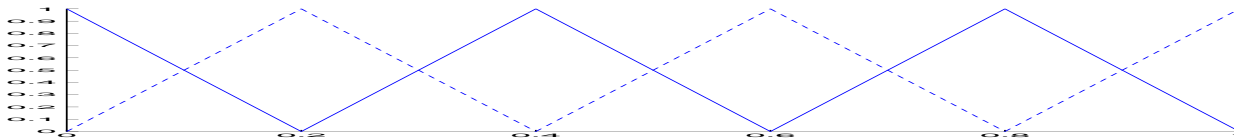


...

Úroveň 1 na V^1 : \mathbf{A}^1 , MKP báze E^1 o dimenzi n^1 , smoother Λ^1 , prolongace \mathbf{P}^1



Úroveň 0 na V^0 : $\mathbf{A}^0, \mathbf{b}^0$, MKP báze E^0 o dimenzi n^0 , $(\mathbf{A}^0)^{-1}$ (LU), prolongace \mathbf{P}^0



Geometrický multigrid

Komponenty

- Hierarchie diskretizací $V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^L \subset H_0^1(0,1)$: $\mathbf{A}^l \in \mathbb{R}^{n^l \times n^l}$ pro $l = 0, 1, \dots, L$ a $\mathbf{b}^L \in \mathbb{R}^{n^L}$
- Hierarchie Geršgorinových smootherů $\Lambda^l \geq \lambda_{\max}(\mathbf{A}^l)$ pro $l = 1, 2, \dots, L$
- Hierarchie prolongací $\mathbf{P}^l \in \mathbb{R}^{n^{l+1} \times n^l}$ (operátory vnoření $V^l \rightarrow V^{l+1}$)
- Hrubý řešič $(\mathbf{A}^0)^{-1}$ (LU rozklad)

Geometrický multigrid

Algoritmus $\mathbf{u}^l := \text{MG}(l, \mathbf{r}^l)$ (1 iterace, V-cyklus)

if $l = 0$ then

$$\mathbf{u}^0 := (\mathbf{A}^0)^{-1} \mathbf{r}^0$$

else

$$\mathbf{u}^l := \mathbf{0}$$

for $s := 1, \dots, \nu$ do

$$\mathbf{u}^l := \mathbf{u}^l + \frac{1}{\Lambda^l} \mathbf{r}^l, \mathbf{r}^l := \mathbf{r}^l - \frac{1}{\Lambda^l} \mathbf{A}^l \mathbf{r}^l$$

end for

$$\mathbf{r}^{l-1} := (\mathbf{P}^{l-1})^T \mathbf{r}^l \text{ (projekce rezidua)}$$

$$\mathbf{w}^l := \mathbf{P}^{l-1} \text{MG}(l-1, \mathbf{r}^{l-1}) \text{ (prolongace hrubé korekce na jemnou síť)}$$

$$\mathbf{u}^l := \mathbf{u}^l + \mathbf{w}^l, \mathbf{r}^l := \mathbf{r}^l - \mathbf{A}^l \mathbf{w}^l$$

for $s := 1, \dots, \nu$ do

$$\mathbf{u}^l := \mathbf{u}^l + \frac{1}{\Lambda^l} \mathbf{r}^l, \mathbf{r}^l := \mathbf{r}^l - \frac{1}{\Lambda^l} \mathbf{A}^l \mathbf{r}^l$$

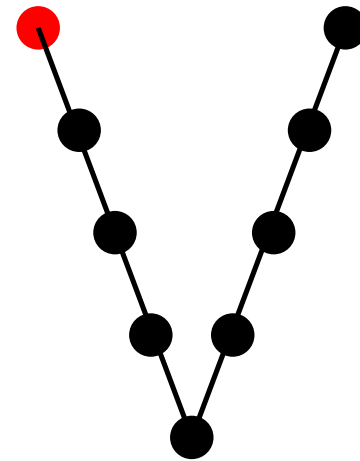
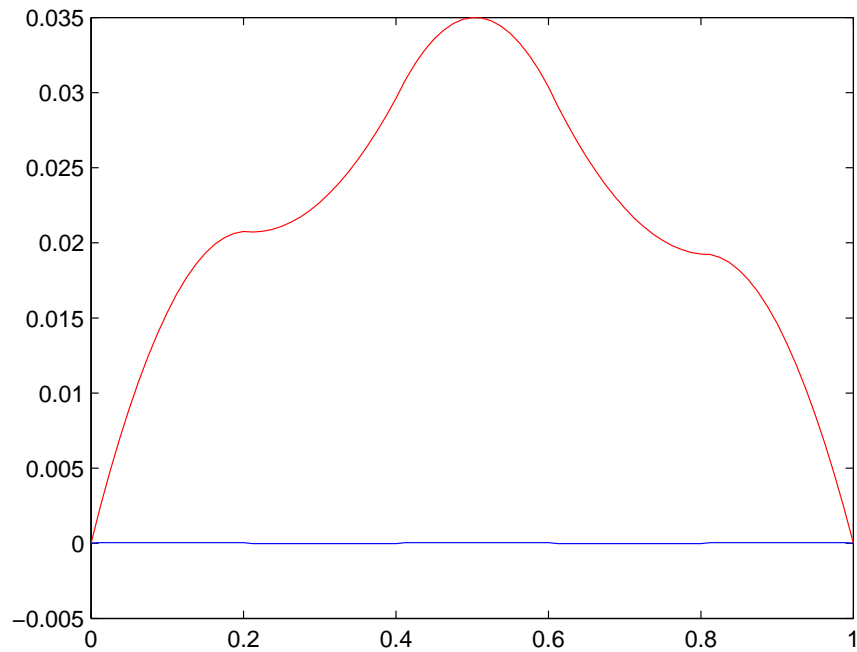
end for

end if

Algoritmus lze snadno implementovat i nerekurzivně: v paměti \mathbf{u}^l a \mathbf{r}^l pro $l = 1, \dots, L$.

Geometrický multigrid: 1. iterace

Pre-smoothing na 4. úrovni

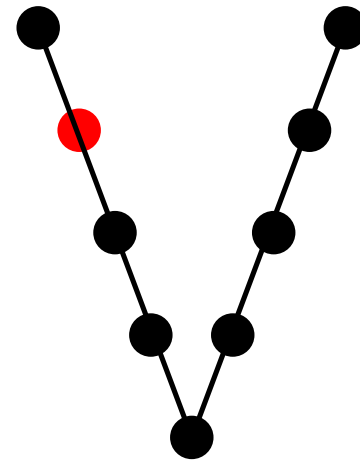
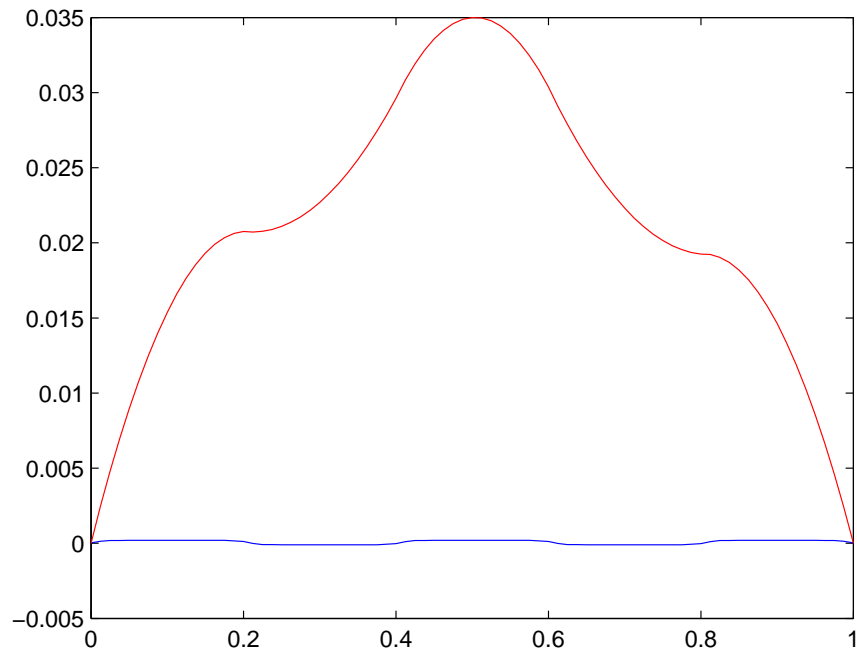


Počet aritmetických operací

$$7n^L$$

Geometrický multigrid: 1. iterace

Pre-smoothing na 3. úrovni

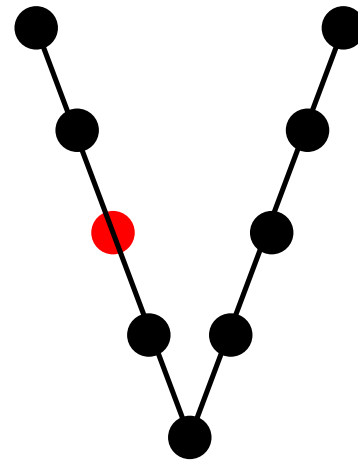
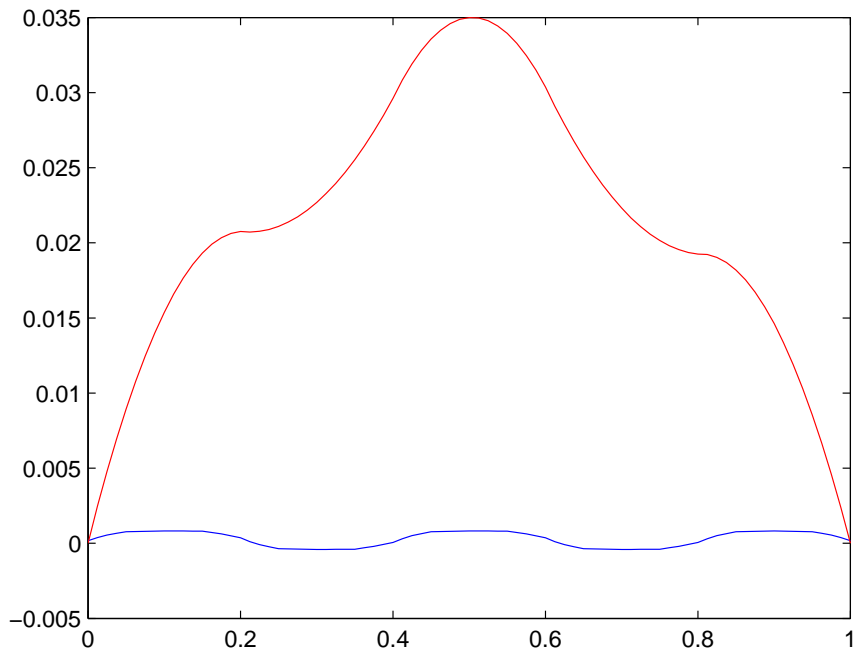


Počet aritmetických operací

$$7 \left(1 + \frac{1}{2}\right) n^L$$

Geometrický multigrid: 1. iterace

Pre-smoothing na 2. úrovni

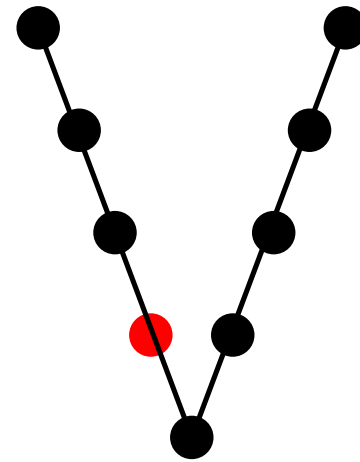
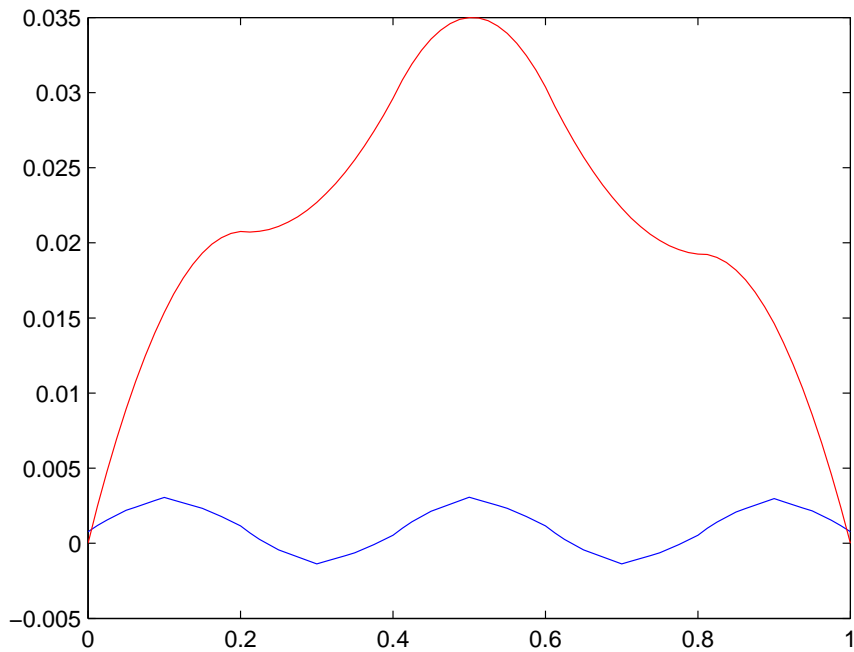


Počet aritmetických operací

$$7 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) n^L$$

Geometrický multigrid: 1. iterace

Pre-smoothing na 1. úrovni

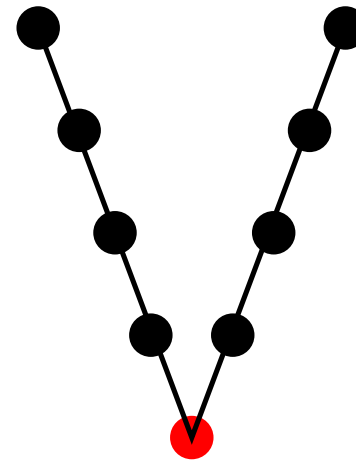
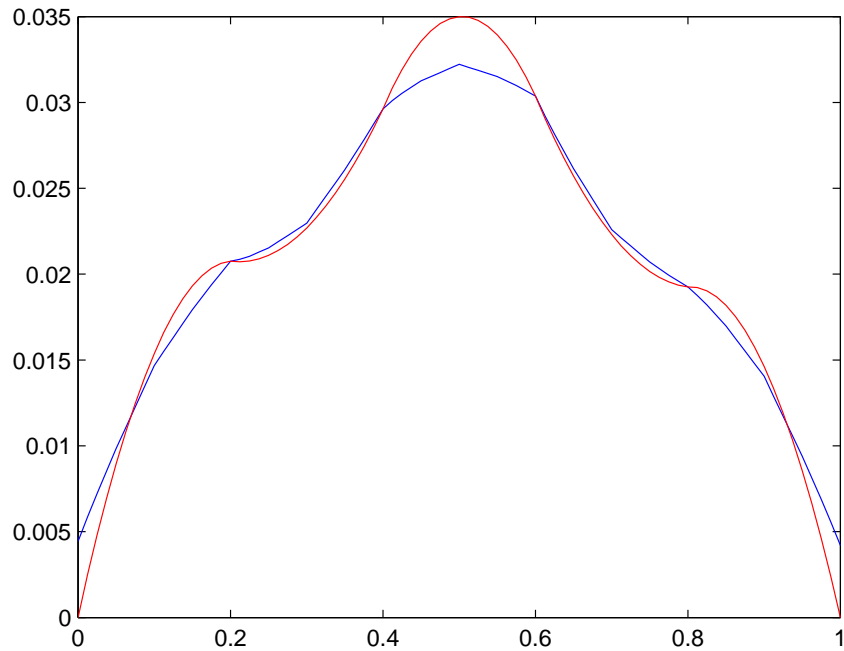


Počet aritmetických operací

$$7 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) n^L$$

Geometrický multigrid: 1. iterace

Gaussova eliminace na 0. úrovni

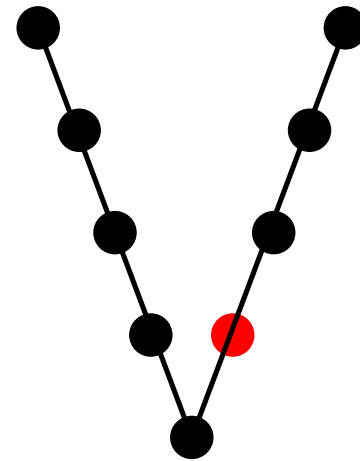
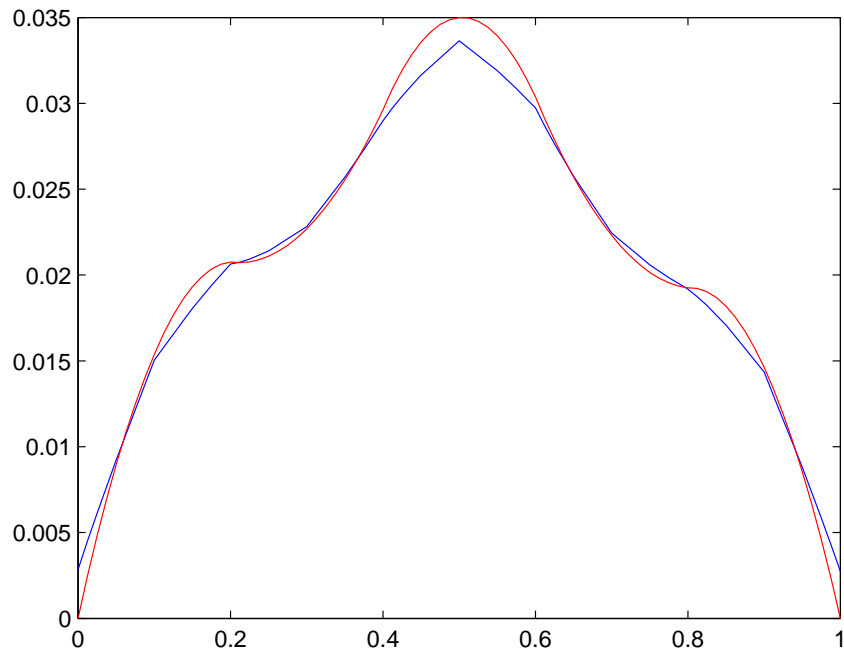


Počet aritmetických operací

$$7 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) n^L + K$$

Geometrický multigrid: 1. iterace

Post-smoothing na 1. úrovni

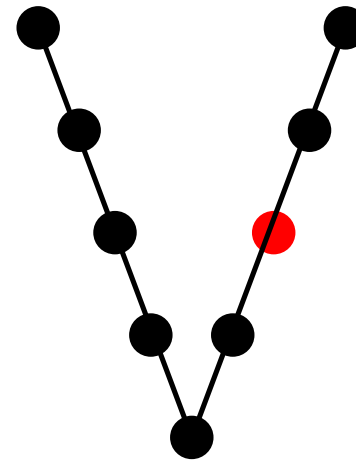
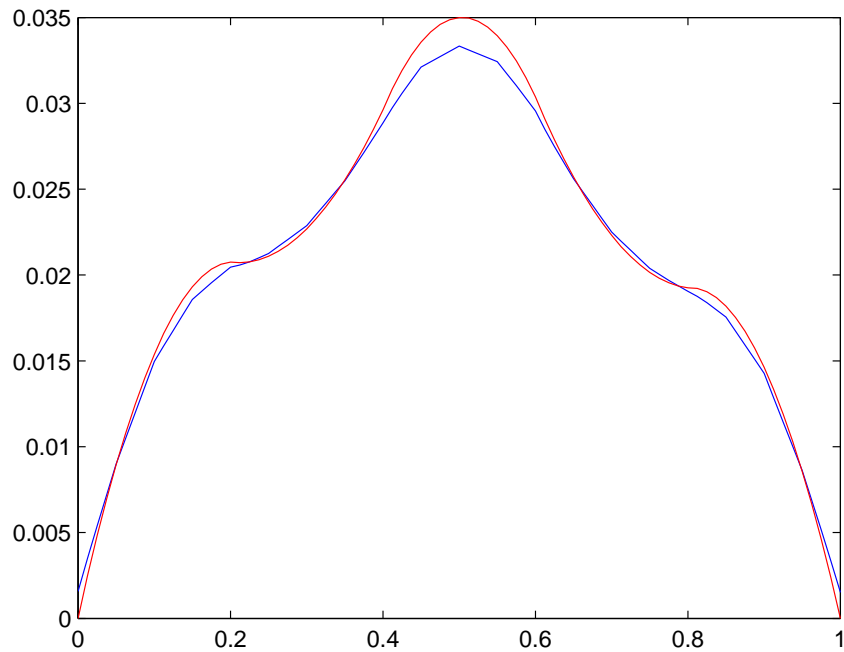


Počet aritmetických operací

$$7 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) n^L + K$$

Geometrický multigrid: 1. iterace

Post-smoothing na 2. úrovni

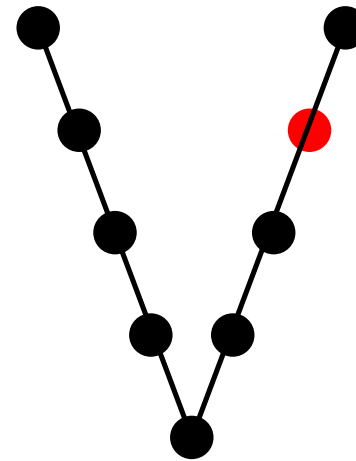
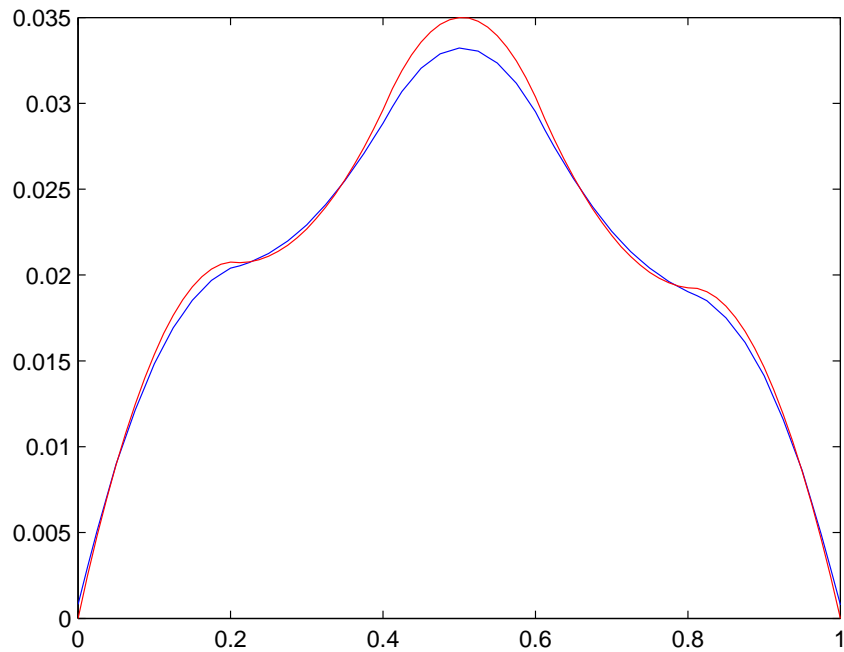


Počet aritmetických operací

$$7 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) n^L + K$$

Geometrický multigrid: 1. iterace

Post-smoothing na 3. úrovni

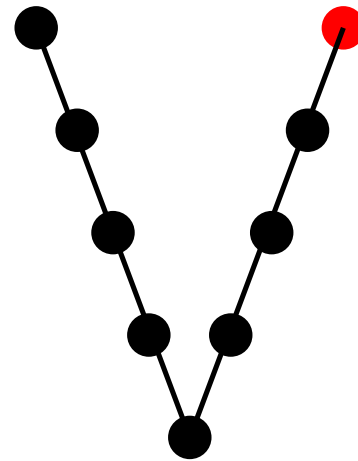
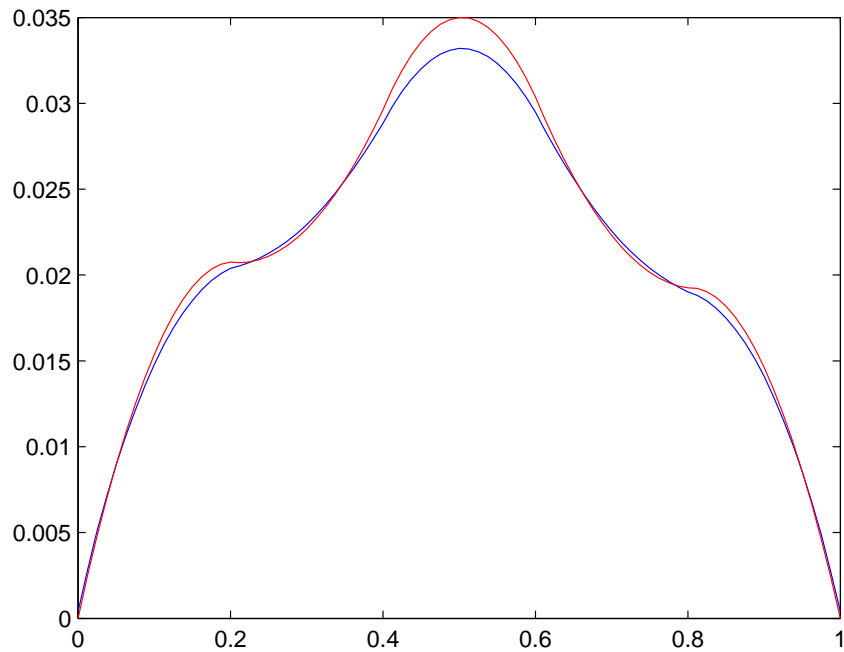


Počet aritmetických operací

$$7 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) n^L + K$$

Geometrický multigrid: 1. iterace

Post-smoothing na 4. úrovni



Počet aritmetických operací

$$14 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)}_{<2} n^L + K = O(n^L)$$

Geometrický multigrid

Lineární iterační metoda

```
 $\mathbf{u}_0^L := \mathbf{0}$   
 $\mathbf{r}_0^L := \mathbf{b}^L$   
 $k := 0$   
while  $\|\mathbf{r}_k^L\| / \|\mathbf{r}_0^L\| > \varepsilon$  do  
   $\mathbf{u}_{k+1}^L := \mathbf{u}_k^L + \text{MG}(L, \mathbf{r}_k^L)$   
   $\mathbf{r}_{k+1}^L := \mathbf{b}^L - \mathbf{A}^L \mathbf{u}_k^L$   
   $k := k + 1$   
end while
```

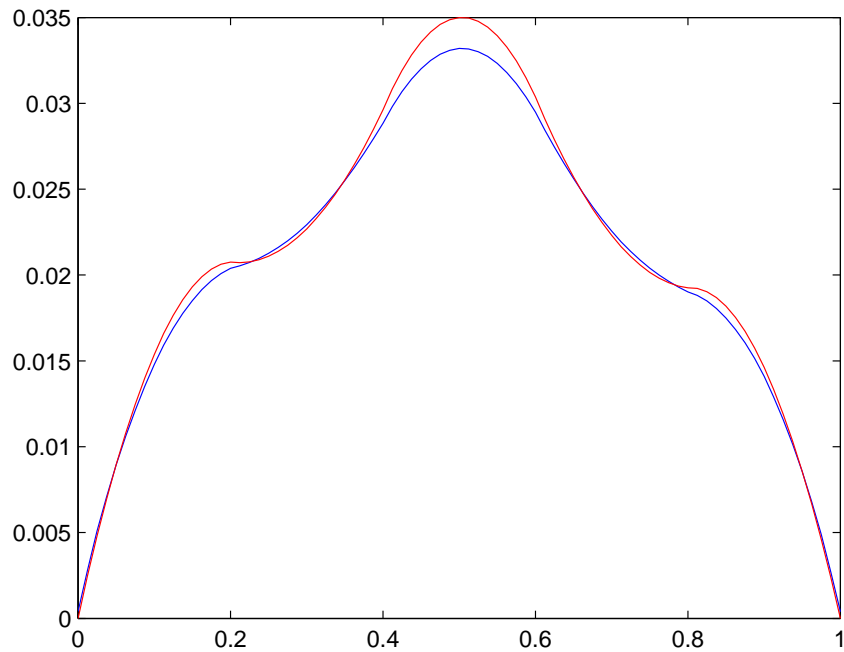
Předpodmínění (rezidua) v PCG

$\mathbf{z}_{k+1}^L := \widehat{\mathbf{A}}^L{}^{-1} \mathbf{r}_{k+1}^L$ se nahradí

$$\mathbf{z}_{k+1}^L := \text{MG}(L, \mathbf{r}_{k+1}^L)$$

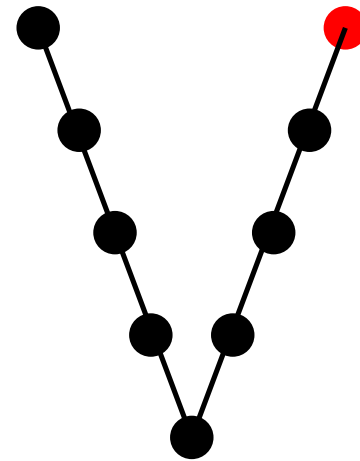
Geometrický multigrid: 1. iterace

Post-smoothing na 4. úrovni



Počet aritmetických operací

$$O(n^L)$$

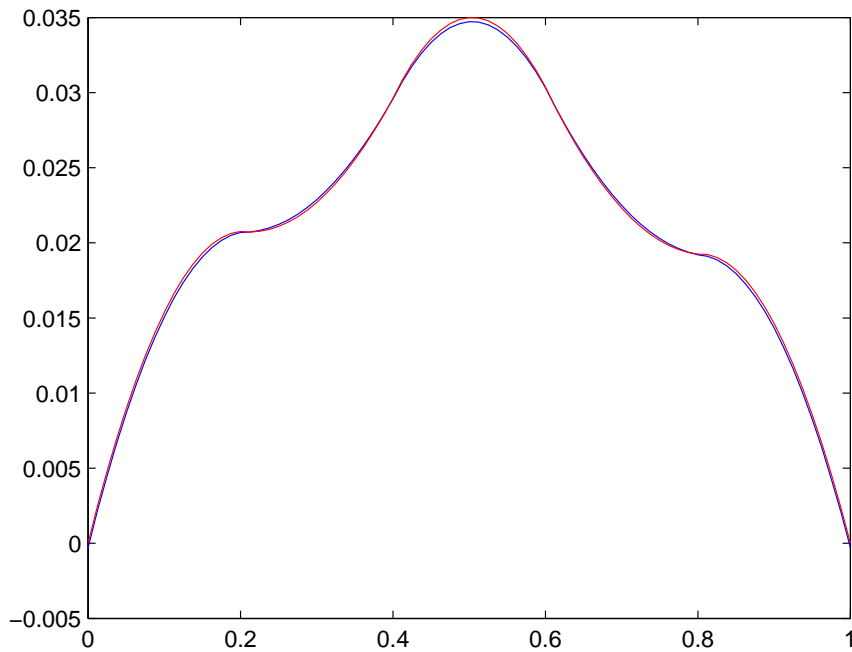


Počet iterací

$$k = O(|\log \varepsilon|), \quad \text{kde } \|\mathbf{r}_k^L\| / \|\mathbf{b}^L\| \leq \varepsilon$$

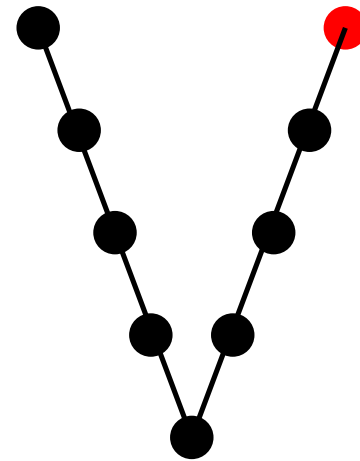
Geometrický multigrid: 2. iterace

Post-smoothing na 4. úrovni



Počet aritmetických operací

$$O(n^L)$$

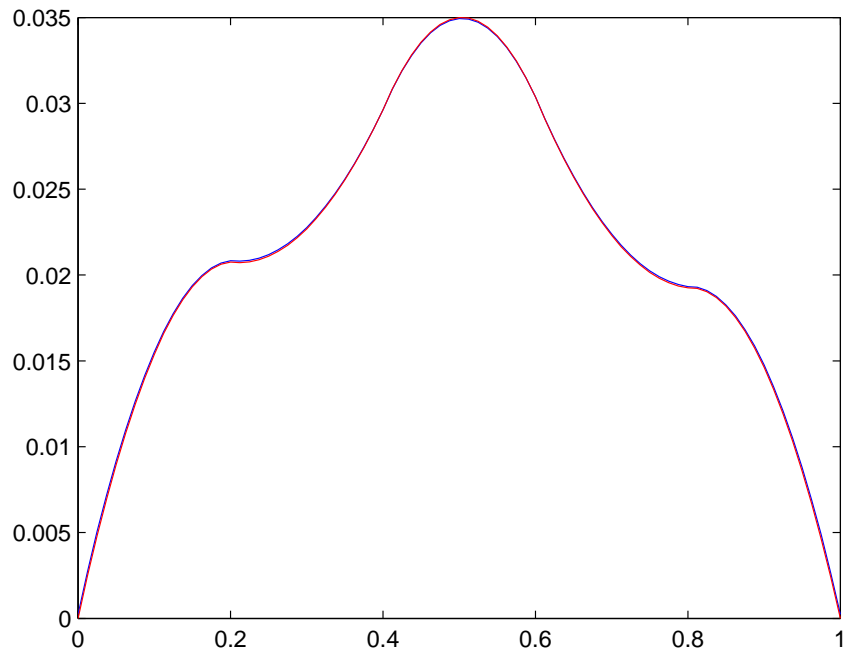


Počet iterací

$$k = O(|\log \varepsilon|), \quad \text{kde } \|\mathbf{r}_k^L\| / \|\mathbf{b}^L\| \leq \varepsilon$$

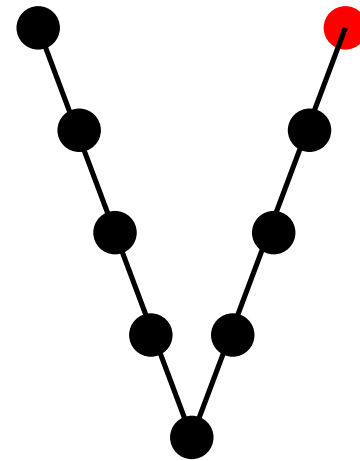
Geometrický multigrid: 3. iterace

Post-smoothing na 4. úrovni



Počet aritmetických operací

$$O(n^L)$$



Počet iterací

$$k = O(|\log \varepsilon|), \quad \text{kde } \|\mathbf{r}_k^L\| / \|\mathbf{b}^L\| \leq \varepsilon$$

Úvod do geometrického multigridu

Osnova

- Vlastní kmity struny
- Richardsonova metoda
- Metoda dvou sítí
- Geometrický multigrid
 - Implementace pro $H^1(\Omega)$ (pružnost, akustika)
 - Implementace pro $H(\mathbf{rot}; \Omega)$ (magnetostatika, elmg. záření)

Implementace geom. multigridu pro $H^1(\Omega)$

- [la.h](#) (šablona double/complex, 3600 řádků)
 - Řídký LU rozklad \mathbf{A}^0 (compressed columns, fill-in, COLAMD),
 - násobení řídká matice krát vektor, přičítání lokálních MKP matic.
- [mesh.cpp](#) (5500 řádků)
 - Hierarchie uzlů, hran, trojúhelníků, čtyřstěnů, hraničních prvků a vzáj. relací,
 - [zjemňování sítě](#) (550 řádků).
- [fespace.cpp](#) (2000 řádků); [feforms.cpp](#), [feintegrators.cpp](#) (300+1000 řádků)
 - Vytváření struktur (compressed column) MKP matic,
 - prolongátory;
 - Sestavování MKP matic a vektorů po prvcích.
- [solver.cpp](#) (600 řádků)
 - [Smoothers](#), algoritmus multigridu.

Implementace geom. multigridu pro $H^1(\Omega)$

Zjemňování sítě trojúhelníků=stěn

počet nových uzlů = počet starých uzlů + počet starých hran

počet nových hran = 2 * počet starých hran + 3 * počet starých trojúhelníků

počet nových trojúhelníků = 4 * počet starých trojúhelníků

for staré hrany **do**

 Rozpul starou hranu na 2 nové.

 Vytvoř nový uzel.

 Vytvoř nové relace hrana→uzly.

end for

for staré trojúhelníky **do**

 Rozčtvř starý trojúhelník na 4 nové.

 Vytvoř tři nové hrany.

 Vytvoř nové relace hrana→uzly, stěna→uzly a stěna→hrany.

end for

Aktualizuj indexy hraničních (orientovaných) hran.

Implementace geom. multigridu pro $H^1(\Omega)$

Zjemňování sítě čtyřstěnů

počet nových uzlů = počet starých uzlů + počet starých hran

poč. nov. hran = 2 * poč. st. hran + 3 * poč. st. trojúhelníků + poč. st. čtyřstěnů

počet nových trojúhelníků = 4 * počet st. trojúhelníků + 8 * počet st. čtyřstěnů

počet nových čtyřstěnů = 8 * počet starých čtyřstěnů

for staré hrany **do**

Rozpul starou hranu na 2 nové, vytvoř nový uzel a nové relace hrana→uzly.

end for

for staré trojúhelníky **do**

Rozčtvř starý trojúhelník na 4 nové, vytvoř tři nové hrany, vytvoř nové relace.

end for

for staré čtyřstěny **do**

Rozděl starý čtyřstěn do 8 nových, vytvoř 8 nových trojúhelníků a 1 novou hranu.

Nové relace hrana→uzly, stěna→{uzly,hrany}, čtyřstěn→{uzly,hrany,stěny}.

end for

Aktualizuj indexy hraničních (orientovaných) stěn.

Implementace geom. multigridu pro $H^1(\Omega)$

Smoother

$$\mathbf{u} := \mathbf{u} + \mathbf{S} \mathbf{r}$$

- Geršgorin: $\mathbf{S} := \frac{1}{\Lambda}$.
- Diagonal scaling: $\mathbf{S} := \text{diag}(\mathbf{A})^{-1}$.
- Aditivní Schwarz (blok. Jacobi): $\mathbf{S} := \alpha \sum_i \mathbf{R}_{N(i)}^T (\mathbf{A}_{N(i),N(i)})^{-1} \mathbf{R}_{N(i)}$,

kde $N(i)$ jsou stupně volnosti adjacentských uzlu/hraně/stěně i ,

$\mathbf{R}_{N(i)}$ je restrikce (subvektor).

Možnost paralelizace, bohužel je nutno zavést tlumení α .

- Multiplikativní Schwarz (blok. Gauss–Seidel):

$$\mathbf{v}_{N(i)} := (\mathbf{A}_{N(i),N(i)})^{-1} \mathbf{r}_{N(i)}$$

$$\mathbf{u}_{N(i)} := \mathbf{u}_{N(i)} + \mathbf{v}_{N(i)}$$

$$\mathbf{r} := \mathbf{r} - \mathbf{A} \mathbf{R}_{N(i)}^T \mathbf{v}_{N(i)}$$

Úvod do geometrického multigridu

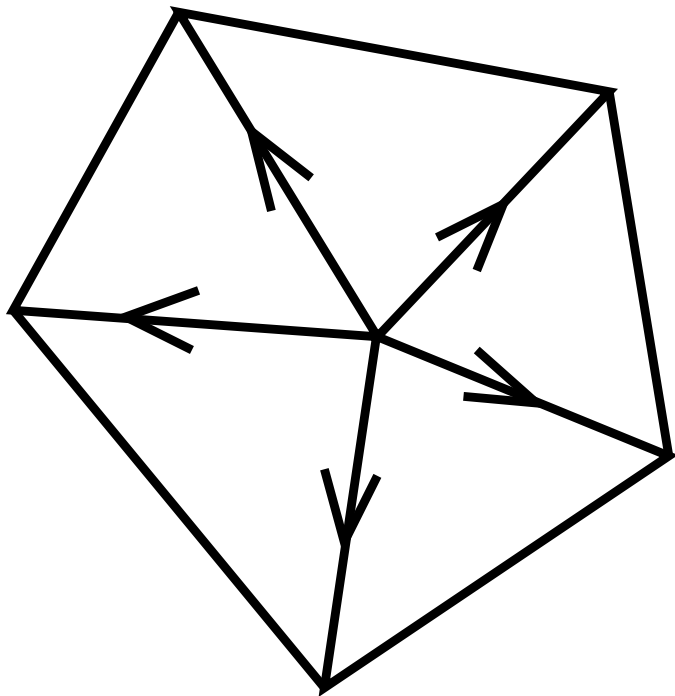
Osnova

- Vlastní kmity struny
- Richardsonova metoda
- Metoda dvou sítí
- Geometrický multigrid
 - Implementace pro $H^1(\Omega)$ (pružnost, akustika, elektrostatika)
 - Implementace pro $H(\mathbf{rot}; \Omega)$ (magnetostatika, elmg. záření)

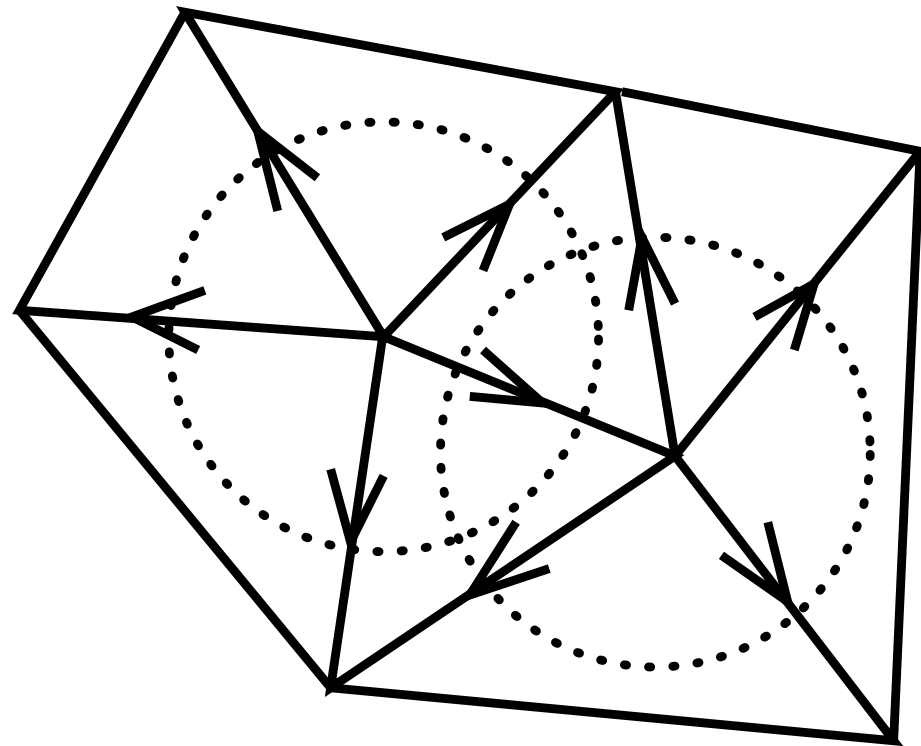
Implementace geom. multigridu pro $H(\text{rot}; \Omega)$

Magnetostatika

Hiptmairův hybridní smoother



Mult. Schwarz podle Arnolda, Falka a Winthera



Úvod do geometrického multigridu

Literatura

- Brenner, Scott – The Mathematics Theory of Finite Elements, kap. 6. Springer, 2010.
- Schöberl – Multigrid Analysis. E-skripta JKU Linec, 2004.
- Bramble, Zhang – The Analysis of Multigrid Methods. E-verze knihy, Wiley, 1993.
- Hiptmair – Multigrid methods for Maxwell's equations. SIAM Journal of Numerical Analysis **36**:204–255, 1999.
- Arnold, Falk, Winther – Multigrid in $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$. Numerische Mathematik **85**:197–217, 2000.
- ...
- Fedorenko – A relaxation method for solving elliptic difference equations. USSR Comput. Math. and Math. Phys. **1**, 1962.