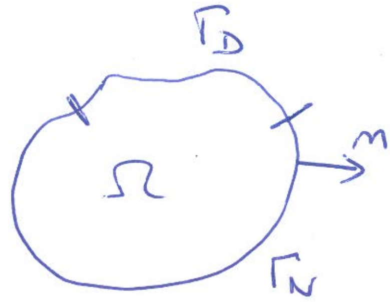
NM3 – Analýza MKP ve 2d a 3d

Modelová úloha



$$(P)\begin{cases} -\operatorname{div}\left[k(x)\nabla u(x)\right] = f(x), & x\in\Omega \\ u(x) = u_0(x), & x\in\Gamma_D \\ k(x)\dfrac{du}{dn}(x) = g(x), & x\in\Gamma_N \end{cases}$$

Variační formulace

$$(V)\begin{cases} \text{Hledám } u(x)\in V_{u_0} := \{w\in H^1(\Omega) : w = u_0 \text{ na } \Gamma_D \text{ ve smyslu stop}\}: \\ \underbrace{\int_\Omega k(x)\nabla u(x)\nabla v(x)\,dx}_{=:a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f(x)v(x)\,dx + \int_{\Gamma_N} g(x)v(x)\,ds(x)}_{=:b(v)} \quad \forall v(x)\in V_0 \end{cases}$$

Homogenizace úlohy: $u(x) = \underset{\in V_0}{u_H(x)} + \underset{\in V_{u_0}}{\tilde{u}_0(x)}$

$$(V)\begin{cases} \text{Hledám } u_H(x)\in V_0 : \\ a(u_H, v) = \underbrace{b(v) - a(\tilde{u}_0, v)}_{=:\tilde{b}(v)} \quad \forall v\in V_0 \end{cases}$$

Lemma.

- $\Omega\in\mathcal{L}$, tj. $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $d=2,3$, je oblast, tj. neprázdná, otevřená, omezená, souvislá, s lipschitzovskou hranicí
- $k\in L^\infty(\Omega)$: $\exists k_0>0$: $k(x)\geq k_0$ s.v. v Ω
- $f\in L^2(\Omega)$
- $g\in L^2(\Gamma_N)$
- $\exists \tilde{u}_0\in H^1(\Omega)$: $\tilde{u}_0 = u_0$ na Γ_D ve smyslu stop

$\Rightarrow$

- a je spojitá sym. bilin. forma na $H^1(\Omega)$, která je V_0-eliptická
- b je spoj. lin. forma na $H^1(\Omega)$
- V_0 je Hilbert. prostor

Důkaz.

Viz Variační metody. $\square$

<u>Důsledek</u>. $\exists!\, u_H \in V_0$ řešící (V).

Navíc $\|u_H\|_a = \sup\limits_{\substack{v \in V_0:\\ a(v,v)=1}} \tilde{b}(v)$.

<u>Důkaz</u>.

Plyne z lemmatu a Rieszovy věty. □

Galerkinova metoda

$$V^h := \langle \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \dots, \varphi_m(x) \rangle \subset H^1(\Omega)$$

$$V_0^h := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle \subset V_0 \quad \text{báze}$$

$$\tilde{u}_0(x) = \sum_{j=n+1}^{m} (\overline{u}_0)_j \varphi_j(x)$$

$$(V^h) \begin{cases} \text{Hledám } u_H^h(x) \in V_0^h: \\ a(u_H^h(x), v^h(x)) = \tilde{b}(v^h(x)) \quad \forall v^h \in V_0^h \end{cases} \iff \boxed{\mathbb{A} \cdot \overline{u}_H = \overline{b} - \hat{\mathbb{A}} \cdot \overline{u}_0}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} (\tilde{\mathbb{A}})_{ij} &:= a(\varphi_j, \varphi_i) \\ (\tilde{b})_i &:= b(\varphi_i) \end{aligned}\right\} i,j = 1,\dots,n,n+1,\dots,m \; ; \quad \tilde{\mathbb{A}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1\cdots n & n+1\cdots m \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \hat{\mathbb{A}} \\ \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ m \end{array}$$

$$\tilde{b} = \left[\begin{array}{c} \overline{b} \\ \hline \vdots \end{array}\right] \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ m \end{array}$$

$$u_H^h(x) = \sum_{j=1}^{n} (\overline{u}_H)_j \varphi_j(x)$$

Metoda konečných prvků

Nechť Ω je navíc polygonální (konečné sjednocení mnohostěnů)

<u>Definice</u>. Uvažujme $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{K \in T^h} K$ takové, že $\forall K, K_i, K_j \in T^h$:

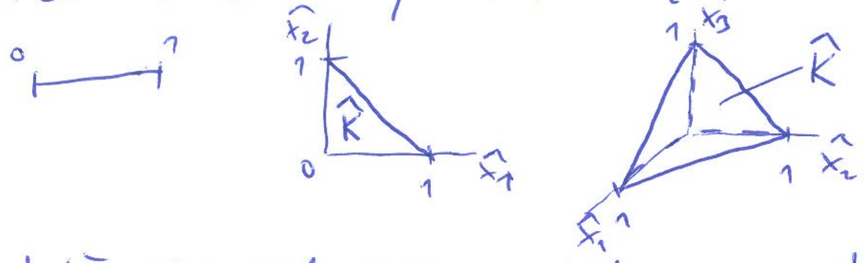
- K je mnohostěn, $\operatorname{int} K \neq \emptyset$
- $\operatorname{int} K_i \cap \operatorname{int} K_j = \emptyset$ pro $i \neq j$
- $F := K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, pak F je uzel/hrana/stěna.
- $\operatorname{diam}(K) \leq h$.

T^h je <u>triangulací</u> Ω.

NM3 – Analýza MKP ve 2d a 3d

Uvažujme pouze triangulaci do simplexů.

Referenční simplex $\hat{K} := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^d : \hat{x}_i \geq 0\ \forall i \text{ a } \sum_{i=1}^{d} \hat{x}_i \leq 1\}$



Nechť $\forall K \in \mathcal{T}^h\ \exists \mathbb{B}_K \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulární, $b_K \in \mathbb{R}^d$: $K = T_K(\hat{K})$,

kde $T_K(\hat{x}) := \mathbb{B}_K \hat{x} + b_K$

MKP prostory

$$V^h := \{v^h \in C(\overline{\Omega}) \mid \forall K \in \mathcal{T}^h : v^h|_K \text{ lineární (afinní)}\}$$

$$V_0^h := \{v^h \in V^h \mid v^h(x) = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$$

Lemma. Nechť $\Omega \in \mathcal{L}$ polygonální, $\mathcal{T}^h$ triangulace Ω, $v : \Omega \to \mathbb{R}$. Pak

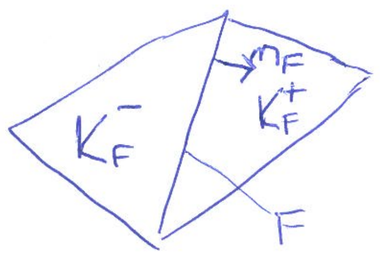
$$v \in H^1(\Omega) \iff \begin{cases} \text{a) } \forall K \in \mathcal{T}^h : v|_K \in H^1(K) \\ \text{a b) } \forall F := \underset{\in \mathcal{T}^h}{K_F^+} \cap \underset{\in \mathcal{T}^h}{K_F^-} \text{ stěna ve 3d / strana ve 2d:} \\ \qquad \gamma_F v|_{K_F^+} = \gamma_F v|_{K_F^-} \end{cases}$$

Důkaz. „$\Leftarrow$"

Z a) plyne, že $v \in L^2(\Omega)$ a $w_i|_K := \frac{\partial v|_K}{\partial x_i}$: $w_i \in L^2(\Omega)$.

Stačí ukázat, že $w_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ je zobecněná derivace v Ω.

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\ \forall i : \int_\Omega w_i \varphi = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi \overset{\text{Green. věta}}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left\{ -\int_K v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\partial K} v \varphi n_i \right\}$$



$$= -\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \underbrace{\int_{\partial \Omega} v \varphi n_i}_{= 0} + \sum_F \int_F \underbrace{(v|_{K_F^+} - v|_{K_F^-})}_{\overset{a)}{=} 0} \varphi (n_F)_i$$

„$\Rightarrow$"

$\forall i\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega):\ \int_\Omega w_i \varphi \overset{w_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}\ \cancel{v\ \Omega}}{=} -\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$

Green. // věta

$$\sum_{K\in\mathcal{T}^h}\left\{-\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} v\varphi n_i}_{=0} + \sum_F \int_F \left(v_{|K_F^+} - v_{|K_F^-}\right)\varphi (n_F)_i .$$

Tudíž $\forall i\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega):\ \sum_F \int_F \left(v_{|K_F^+} - v_{|K_F^-}\right)\varphi (n_F)_i = 0$.

Pro každé F $\exists i: (n_F)_i \neq 0$ a

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(F):\ \int_F \left(v_{|K_F^+} - v_{|K_F^-}\right)\varphi = 0 .$$

Testovací lemma v $L^2(F)$ dává $\gamma_F v_{|K_F^+} = \gamma_F v_{|K_F^-}$. $\square$

Testovací lemma v $C(\overline{\Omega})$.

$$\left.\begin{array}{l} f \in C(\overline{\Omega}) \\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega): \int_\Omega f\varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ v } \Omega$$

a ze spojitosti dále v $\overline{\Omega}$.

Důkaz. (sporem)

Předpokládejme, že ex. $x_0 \in \Omega: f(x_0) \underset{(<)}{>} 0$.

Ze spojitosti f je f kladná (záporná) i na nějakém okolí $B_\delta(x_0) \subset \Omega$. Zvolme $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tak, že $\varphi(x) > 0$ na $B_\delta(x_0)$ a $\varphi(x) = 0$ jinde, např.

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-(|x-x_0|/\delta)^2}}, & |x-x_0| < \delta \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Pak $\int_\Omega f\varphi \underset{(<)}{>} 0$, což je spor s $\int_\Omega f\varphi = 0$. $\square$

Důsledek.

$$V^h \subset H^1(\Omega), \quad V_0^h \subset V_0$$

Stupně volnosti (neznámé) volíme v uzlech K.

NM3 – Analýza MKP ve 2d a 3d

16.10.'15

Označme $h_K := \operatorname{diam} K$, $\hat{h} := \operatorname{diam} \hat{K} = \begin{cases} 1, & \text{v 1d} \\ \sqrt{2}, & \text{ve 2d/3d} \end{cases}$

$\rho_K := \sup\{\operatorname{diam} S : S \text{ koule obsažená v } K\}$

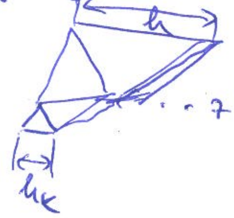
$\hat{\rho} := \sup\{\operatorname{diam} \hat{S} : \hat{S} \text{ koule obsažená v } \hat{K}\} = \begin{cases} 1 & \text{v 1d/2d} \\ ? & \text{ve 3d} \end{cases}$

Definice. Rodina triangulací $\{\mathcal{T}^h\}_{h>0}$ je regulární, pokud $\exists \sigma \geq 1 \ \forall h > 0 : \max\limits_{K \in \mathcal{T}^h} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$,

a kvazi-uniformní, pokud $\exists \tilde{\tau} > 0 \ \forall h > 0 : \min\limits_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \geq \tilde{\tau} \cdot h$

Př.

.. zlá regularita



.. zlá kvazi-uniformita

Číslo podmíněnosti matice hmotnosti M

Lemma. $\{\mathcal{T}^h\}_{h>0}$ ~~regulár~~ rodina regulárních kvazi-uniform. triangulací Ω. Pak

$$\exists c, C > 0 \ \forall v^h \in V^h : \ c\, h^d \|\bar{v}\|^2 \leq \int_\Omega (v^h(x))^2 dx \leq C h^d \|\bar{v}\|^2,$$

nezávislé na h

kde $v^h(x) = \sum_{j=1}^{m} (\bar{v})_j \varphi_j(x)$.

Důkaz. $\int_\Omega [v^h(x)]^2 dx = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K (\hat{v} \circ T_K^{-1})^2(x)\, dx = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_{\hat{K}} \hat{v}^2(\hat{x}) |\det B_K| d\hat{x}$

Zaveďme $\Psi(\bar{v}^K) := \int_{\hat{K}} \left[\sum_{i=1}^{d+1} v_i^K \hat{\varphi}_i(\hat{x})\right]^2 d\hat{x} / \|\bar{v}^K\|^2 \in C(\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{\bar{0}\}, \mathbb{R}_+)$ $(*)$

a tedy $\exists k := \min\limits_{\|\bar{v}^K\|=1} \Psi(\bar{v}^K) > 0$ a $\exists K := \max\limits_{\|\bar{v}^K\|=1} \Psi(\bar{v}^K) > 0$.

Jelikož $\forall t > 0 : \Psi(t\bar{v}^K) = \Psi(\bar{v}^K)$, (homogenní funkce)

pak $\forall \bar{v}^K : k\|\bar{v}^K\|^2 \leq \int_{\hat{K}} \hat{v}^2(\hat{x})\, d\hat{x} \leq K \|\bar{v}^K\|^2$ $(**)$

Dosazením $v^h(x) \equiv \hat v(\hat x) := 1$ do (*):

$$\boxed{|\det \mathbb{B}_K| = \frac{\operatorname{meas} K}{\operatorname{meas} \hat K} \leqq \tilde C (h_K)^d}, \quad \text{kde } \tilde C = \begin{cases} 1 & \text{v 1d} \\ 2 & \text{ve 2d} \\ 6 & \text{ve 3d} \end{cases}$$

Zároveň

$$\operatorname{meas} K \geqq \tilde c (\rho_K)^d, \quad \text{kde } \tilde c = \begin{cases} 1 & \text{v 1d} \\ \pi & \text{ve 2d} \\ \frac{4}{3}\pi & \text{ve 3d} \end{cases}$$

Z regularity T^h plyne $\rho_K \geqq \frac{1}{\sigma} h_K$

a tedy $\boxed{|\det B_K| \geqq \frac{1}{\operatorname{meas} \hat K} \cdot \frac{\tilde c}{\sigma^d} \cdot (h_K)^d}$

Společně s (*) a (**) dostáváme:

$$k \frac{\tilde c}{\operatorname{meas} \hat K} \frac{1}{\sigma^d} (h_K)^d \|\bar v^K\|^2 \leqq \int_K [v^h(x)]^2 \, dx = \int_{\hat K} \hat v^2(\hat x) \, d\hat x \cdot |\det B_K| \leqq K \tilde C (h_K)^d \|\bar v^K\|$$

V třídě regulárních triangulací je omezený počet sousedních elementů P, tj.

$$\underbrace{k \frac{\tilde c}{\operatorname{meas} \hat K} \frac{1}{\sigma^d}}_{=: c/\gamma^d} \underbrace{(h_K)^d}_{\geqq \gamma^d h^d} \|\bar v\|^2 \leqq \int_\Omega [v^h(x)]^2 \, dx \leqq \underbrace{P K \tilde C}_{=: C} \underbrace{(h_K)^d}_{\leqq h^d} \|\bar v\|^2 \qquad \square$$

Důsledek. $\boxed{\kappa(\mathbb{M}) = O(1)}$

Číslo podmíněnosti matice tuhosti $\mathbb{A}$.

Lemma. $\|B_K^{-1}\| \leqq \hat h / \rho_K$.

Důkaz. $\|B_K^{-1}\| = \sup\limits_{\xi \neq 0} \underbrace{\frac{\|B_K^{-1} \xi\|}{\|\xi\|}}_{\text{homogenní v } \xi} = \frac{1}{\rho_K} \sup \{ \|B_K^{-1}\xi\| : \|\xi\| = \rho_K \}$

$\forall \xi : \|\xi\| = \rho_K \Rightarrow \exists x, y \in K : \|x - y\| = \rho_K$

Zároveň $\|B_K^{-1} \xi\| = \|T_K^{-1}(x - y)\| \leqq \hat h$ $\square$

Lemma. (Poincarého nerovnost)

$$\left.\begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{L} \\ \omega \subset \Omega \text{ nebo } \omega \subset \partial\Omega : \operatorname{meas} \omega > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists K > 0 \ \forall v \in H^1(\Omega):$$

$$K \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 + \left(\int_\omega v\right)^2 \right\} \geqq \int_\Omega v^2$$

NM3 – Analýza MKP ve 2d a 3d

16.10.'15

Lemma. Buď $\{T^h\}_{h>0}$ třída reg. a kvasi-uniformních triangulací Ω. Pak

$$\exists c, C > 0 \ \forall v^h \in V_0^h : \ c h^d \|\bar{v}\|^2 \leq \int_\Omega |\nabla v^h(x)|^2 dx \leq C h^{d-2} \|\bar{v}\|^2,$$

nezáv. na h

kde $v^h(x) = \sum_{j=1}^m (\bar{v})_j \varphi_j(x)$

Důkaz. Dolní odhad plyne z dolního odhadu pro M a z Poincarého nerovnosti pro $\omega := \Gamma_D$.

Horní odhad.

$$\int_\Omega |\nabla v^h(x)|^2 dx = \sum_{K \in T^h} \int_K |\nabla v^h(x)|^2 dx = \sum_{K \in T^h} \int_{\hat{K}} |B_K^{-T} \nabla \hat{v}(\hat{x})|^2 \cdot |\det B_K| \, d\hat{x}$$

Funkce $\Psi(\bar{v}^K) := \int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2 d\hat{x} / \|\bar{v}^K\|^2$ je omezená (Weierstr. theorem)

tj. $\exists K := \max_{\|\bar{v}^K\|=1} \Psi(\bar{v}^K) > 0 : \int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2 \leq K \cdot \|\bar{v}^K\|^2$

Víme už, že $|\det B_K| \leq \tilde{C} (h_K)^d$, kde $\tilde{C} = \begin{cases} 1 & 1d \\ 2 & 2d \\ 6 & 3d \end{cases}$

a že $\|B_K^{-T}\|^2 \leq (\hat{h}/\rho_K)^2$

a tedy

$$\int_K |\nabla v^h(x)|^2 dx = \int_{\hat{K}} |B_K^{-T} \nabla \hat{v}(\hat{x})|^2 \cdot |\det B_K| \, d\hat{x}$$

$$\leq \left(\frac{\hat{h}}{\rho_K}\right)^2 \cdot \tilde{C} (h_K)^d \cdot K \|\bar{v}^K\|^2 \overset{T^h \text{ regul.}}{\leq} \tilde{C} \hat{h} \sigma^2 \underbrace{(h_K)^{d-2}}_{\leq h^{d-2}} \|\bar{v}^K\|^2.$$

Horní odhad plyne díky omezenosti ~~sousedních~~ počtu sousedních elementů. $\square$

Důsledek. $\boxed{\kappa(A) = O(h^{-2})}$

Konvergence MKP

30.10.'15 ⑧

Lemma. (Bramble–Hilbert)

Buď
- $\Omega \in \mathcal{L}$
- $k \in \mathbb{N}_0$
- $f \in (H^{k+1}(\Omega))^*$ tj. – f lineární – $\exists c_f > 0 \ \forall v \in H^{k+1}(\Omega)$: $|f(v)| \leq c_f \cdot \|v\|_{k+1,\Omega}$
- $\forall q \in P^k$: $f(q) = 0$ (polynomy nejvýše k-řádu)

$\Rightarrow \exists C > 0 \ \forall v \in H^{k+1}(\Omega)$: $|f(v)| \leq C |v|_{2,\Omega}$

Důkaz pro $k = 1$.

Vezměme $v \in H^2(\Omega)$ a $q \in P^1$, pak

$$|f(v)| = |f(v+q)| \leq c_f \cdot \|v+q\|_{2,\Omega}$$

Odhadněme $\|v+q\|_{2,\Omega}$ seminormou $|v|_{2,\Omega}$:

$$\|v+q\|^2_{2,\Omega} = \underbrace{\|v+q\|^2_{0,\Omega}}_{\text{Poincaré}} + |v+q|^2_{1,\Omega} + \underbrace{|v+q|^2_{2,\Omega}}_{\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j} \equiv 0}$$

$$\leq c_P \left\{ |v+q|^2_{1,\Omega} + \left(\int_\Omega (v+q) \right)^2 \right\} + |v+q|^2_{1,\Omega} + |v|^2_{2,\Omega}$$

$$= c_P \left(\int (v+q) \right)^2 + (1+c_P)|v+q|^2_{1,\Omega} + |v|^2_{2,\Omega}$$

$$|v+q|^2_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \left(\frac{\partial(v+q)}{\partial x_i} \right)^2 \overset{\text{Poincaré}}{\leq} \sum_{i=1}^d c_P \left\{ \sum_{j=1}^d \int_\Omega \left(\overset{q \text{ lin.}}{\frac{\partial^2(v+q)}{\partial x_i \partial x_j}} \right)^2 + \left(\int_\Omega \frac{\partial(v+q)}{\partial x_i} \right)^2 \right\}$$

A tedy

$$\|v+q\|^2_{2,\Omega} \leq c_P \underbrace{\left(\int_\Omega (v+q) \right)^2}_{0 \text{ pro } a_0 := -\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (v - \sum_{i=1}^d a_i x_i)} + c_P \cdot \sum_{i=1}^d \underbrace{\left(\int_\Omega \frac{\partial(v+q)}{\partial x_i} \right)^2}_{=0 \text{ pro } a_i := -\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}} + \underbrace{(1 + (1+c_P) \cdot c_P)}_{=:C} |v|^2_{2,\Omega}$$

Zvolme $q(x) = a_0 + \sum_{i=1}^d a_i x_i$

□

NM3 – Analýza MKP ve 2d a 3d

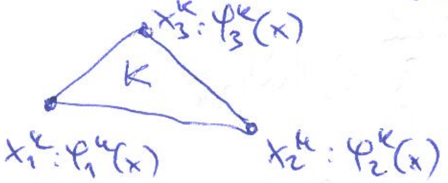
Lemma. (Chyba MKP-interpolace)

- $\Omega \in \mathcal{L}$ p polygon. hranicí
- $\mathcal{T}^h$ triangulace Ω
- $I^h : C(\bar\Omega) \mapsto V^h$ interpolační op., tj. $(I^h u)(x)\big|_K := \sum_{i=1}^{d+1} u(x_i^K)\,\varphi_i^K(x)$

$\Longrightarrow$

a) $\exists C_0 > 0$ (nez. na h) $\forall u \in H^2(\Omega)$:
$$\|u - I^h u\|_{0,\Omega} \le C_0\, h^2\, |u|_{2,\Omega}$$

b) Je-li navíc $\mathcal{T}^h$ $\mathfrak{F}$-regulární, pak $\exists C_1 > 0$ (nez. na h) $\forall u \in H^2(\Omega)$:
$$|u - I^h u|_{1,\Omega} \le C_1\, h\, |u|_{2,\Omega}$$



Důkaz.

ad a)
$$\|u - I^h u\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K [u(x) - (I^h u)(x)]^2\, dx = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} |\det B_K| \cdot \int_{\hat K} (\hat u - \hat I \hat u)^2(\hat x)\, d\hat x \qquad (1)$$

kde $\hat I$: ~~$C(\hat K) \mapsto$~~ je lin. interp. operátor v uzlech ref. simplexu $\hat K$.

Pro $\hat w \in L^2(\hat K)$ zvolme $f(\hat u) := \int_{\hat K} (\hat u - \hat I \hat u) \cdot \hat w\, d\hat x$, lin. funkcionál:
$$|f(\hat u)| \overset{\text{C.-S. v } L^2(\hat K)}{\le} \|\hat u - \hat I \hat u\|_{0,\hat K} \cdot \|\hat w\|_{0,\hat K} \le \Big(\underbrace{\|\hat u\|_{0,\hat K}}_{\le \|\hat u\|_{2,\hat K}} + \underbrace{\|\hat I \hat u\|_{0,\hat K}}_{\le |\hat K| \cdot \|\hat I \hat u\|_{0,\infty,\hat K}}\Big) \cdot \|\hat w\|_{0,\hat K}$$
$$\overset{\text{Sobolev. věta o vnoření}}{\le} \underbrace{(1 + |\hat K|\, \hat c_s)\, \|\hat w\|_{0,\hat K}}_{c_f} \cdot \|\hat u\|_{2,\hat K}$$

Pro $\hat u$ lineární: ~~f(\hat u)~~ $\hat u = \hat I \hat u$, a tedy $f(\hat u) = 0$.

Z Bramble-Hilbertova lemma pro $\hat w := \hat u - \hat I \hat u$:
$$\|\hat u - \hat I \hat u\|_{0,\hat K}^{\cancel{2}} \le (1 + (1 + \hat c_p)\hat c_p)(1 + |\hat K|\, \hat c_s)\, \cancel{\|\hat u - \hat I \hat u\|_{0,\hat K}} \cdot |\hat u|_{2,\hat K} \qquad (2)$$

Zbývá převést $|\hat u|_{2,\hat K}$ na $|u|_{2,K}$:
$$|\hat u|_{2,\hat K}^2 = \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\hat K} \Big(\frac{\partial^2 \hat u}{\partial \hat x_i \partial \hat x_j}(\hat x)\Big)^2 d\hat x = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{1}{|\det B_K|} \int_K \Big[\sum_{k,l=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}(x) \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial \hat x_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial \hat x_j}}_{\le (h_K)^2}\Big]^2 dx$$
$$\le [c(d)]^2 \cdot (h_K)^4 \cdot \frac{1}{|\det B_K|} \cdot |u|_{2,K}^2 \qquad (3)$$

Tvrzení plyne z (1), (2), (3) a z $h_K \le h$, přičemž
$$C_0 := (1 + (1 + \hat c_p)\hat c_p)(1 + |\hat K|\, \hat c_s) \cdot c(d).$$

ad b) $$|u-I^h u|_{1,\Omega}^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}^h} |\det B_K| \int_{\hat K} \|B_K^{-T}\cdot\nabla(\hat u - \hat I\hat u)\|^2 d\hat x$$

$$\leq \sum_{K\in\mathcal{T}^h} |\det B_K|\cdot \underbrace{\|B_K^{-1}\|^2}_{\text{viz (A)} \leq \left(\frac{\hat h}{\rho_K}\right)^2} \cdot \int_{\hat K}\|\nabla(\hat u - \hat I\hat u)\|^2 d\hat x \qquad (4)$$

Pro $\hat w \in [L^2(\hat K)]^d$ zvolme $f(\hat u) := \int_{\hat K} \nabla(\hat u - \hat I \hat u)\cdot \hat w \, d\hat x$, lin. funkcionál

$$|f(\hat u)| \leq \Big(\underbrace{\|\nabla\hat u\|_{0,\hat K}}_{\leq \|\hat u\|_{2,\hat K}} + \underbrace{\|\nabla(\hat I\hat u)\|_{0,\hat K}}_{\leq \frac{1}{\hat\rho}\cdot 2\cdot\|\hat u\|_{\infty,\hat K} \overset{\text{Sobolev. v. o vnoření}}{\leq} \frac{2}{\hat\rho}\cdot\hat C_S\cdot\|\hat u\|_{2,\hat K}}\Big)\cdot\|\hat w\|_{0,\hat K} \leq \underbrace{\left(1+\frac{2}{\hat\rho}\hat C_S\right)\cdot\|\hat w\|_{0,\hat K}}_{C_f}\|\hat u\|_{2,\hat K}$$

$f(\hat u) = 0$ pro $\hat u$ lineární.

Z Bramble-Hilbertova lemmatu pro $\hat w := \nabla(\hat u - \hat I\hat u)$:

$$\|\nabla(\hat u - \hat I\hat u)\|_{0,\hat K}^{\cancel{2}} \leq (1+(1+\hat C_P)\hat C_P)\left(1+\frac{2}{\hat\rho}\hat C_S\right)\cancel{\|\nabla(\hat u - \hat I\hat u)\|_{0,\hat K}}\cdot|\hat u|_{2,\hat K} \qquad (5)$$

Z (4), (5), (3): ~~a z $h_K \leq h$~~:

$$|u-I^h u|_{1,\Omega}^2 \leq (1+(1+\hat C_P)\hat C_P)^2\left(1+\frac{2}{\hat\rho}\hat C_S\right)^2 (\hat h)^2 \overset{(c(d))^2}{\cdot} \sum_{K\in\mathcal{T}^h}\underbrace{\frac{1}{(\rho_K)^2}(h_K)^4}_{\overset{\mathcal{T}^h \text{ reg.}}{\leq} \sigma^2 (h_K)^2}\cdot|u|_{2,K}^2$$

a z $h_K \leq h$ plyne tvrzení, přičemž

$$C_1 := (1+(1+\hat C_P)\hat C_P)\cdot\left(1+\frac{2}{\hat\rho}\hat C_S\right)\hat h\cdot c(d)\cdot\sigma. \qquad \square$$

Věta. (Konvergence MKP)

- $\Omega \in \mathcal{L}$ s polyg. hranicí
- $\mathcal{T}^h$ .. σ-regulární triangulace Ω
- $u_H^* \in V_0^* \cap H^2(\Omega)$ řešení (V)
- $u_H^h \in V_0^h$ řešení (V^h)

$$\Longrightarrow \boxed{\|u_H - u_H^h\|_{1,\Omega} \leq \frac{M}{m}\sqrt{C_0^2h^4 + C_1^2h^2}\cdot|u_H|_{2,\Omega}},$$

kde $M \geq m > 0$ jsou konstanty V-omezenosti $a(\cdot,\cdot)$, resp. V_0-eliptičity $a(\cdot,\cdot)$.

Důkaz.

$$\|u_H - u_H^h\|_{1,\Omega} \overset{\text{Céaovo lemma}}{\leq} \frac{M}{m}\cdot\|u_H - I^h u_H\|_{1,\Omega} \overset{\text{Chyba MKP-interp.}}{\leq} \frac{M}{m}\cdot\sqrt{(C_0)^2h^4 + (C_1)^2h^2}\cdot|u_H|_{2,\Omega}$$

$\square$

NM3 - Analýza MKP ve 2d a 3d

Lemma. (Aubin '67, Nitsche '68)

- $\Omega \in \mathcal{L}$
- V .. podprostor $H^1(\Omega)$
- V^h (MKP) podprostor V
- Odpovídající úlohy (V) a (V^h) mají jednoznačná řešení $u(x), u^h(x)$
- $\forall g \in L^2(\Omega)\ \exists! \varphi_g \in V$ řešící adjung. úlohu $(V^*)\quad a(w, \varphi_g) = \int_\Omega g w \quad \forall w \in V$
- a je omezená bilin. forma na V $\quad \exists M > 0\ \forall u, v \in V: |a(u,v)| \leq M \cdot \|u\|_1 \cdot \|v\|_1$

$$\Rightarrow \|u-u^h\|_0 \leq M \|u-u^h\|_1 \times \max_{g \in L^2(\Omega)} \inf_{v^h \in V^h} \frac{\|\varphi_g - v^h\|_1}{\|g\|_0}$$

Důkaz.

$$\Big|\int_\Omega g \underbrace{(u-u^h)}_{=:w}\Big| \overset{(V^*)}{=} |a(u-u^h, \varphi_g)| = |a(u-u^h, \varphi_g - v^h)|$$

Gal. ortog.: $a(u-u^h, v^h) = 0$

$$\leq M \|u-u^h\|_1 \cdot \|\varphi_g - v^h\|_1$$

$$\|u-u^h\|_0 \overset{\text{dualita}}{=} \max_{\substack{g \in L^2(\Omega)\\ g \neq 0}} \frac{\int_\Omega g(u-u^h)}{\|g\|_0} \leq M \|u-u^h\|_1 \cdot \max_{\substack{g \in L^2(\Omega)\\ g\neq 0}} \Big\{ \frac{1}{\|g\|_0} \cdot \inf_{v^h \in V^h} \|\varphi_g - v^h\|_1 \Big\}$$

realizuje se pro $g := u - u^h$

$\square$

Def. Úloha (V) je H^2-regulární, pokud

$\exists c = c(\Omega, a)\ \forall f \in L^2(\Omega)\ \exists! u \in H^2(\Omega)$ řešící (V) a takové, že

$$\|u\|_2 \leq c \cdot \|f\|_0,$$

$$(V) \begin{cases} \text{Hledám } u \in V \text{ kde } H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega): \\ \int_\Omega k \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Lemma. (Kadlec '64; ...) (o regularitě)

- k dost hladká ($\in C^1(\bar\Omega)$)
- Ω konvexní nebo s C^2 hranicí

$\Rightarrow$ Dirichletova úloha (V) je H^2-regulární.

Důsledek Aubin-Nitscheho lemma. Předp. regulární, kvazi-unif. triangulaci.

Je-li navíc adjungovaná úloha (V^*) H^2-regulární, pak

$$\exists C>0 : \|u-u^h\|_0 \leq M\cdot C\cdot h\cdot \|u-u^h\|_1 .$$

Je-li navíc i úloha (V) H^2-regulární, pak $\boxed{\|u-u^h\|_0 \leq MC^2h^2|u|_2 = O(h^2)}$

Důkaz: $\inf\limits_{v^h\in V^h}\|\varphi_g - v^h\|_1 \underset{\text{interpolace}}{\leq} Ch|\varphi_g|_2 \underset{H^2\text{-reg.}(V^*)}{\leq} cCh\|g\|_0$

A odtud: $\|u-u^h\|_0 \leq McCh\underbrace{\|u-u^h\|_1}_{\substack{\leq Ch|u|_2 \\ H^2\text{-reg.}(V)}}$

$\square$

Poznámka (Aubin-Nitsche pro lin. funkcionály)

$F\in\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$

$$\boxed{|F(u)-F(u^h)|} = |F(u-u^h)| = |a(u,\varphi)-a(u^h,\varphi^h) \pm a(u^h,\varphi)|$$

(V^*) $a(w,\varphi) = F(w)\ \forall w\in V$

(V^{h*}) $a(w^h,\varphi^h) = F(w^h)\ \forall w^h\in V^h$

$$= |a(u-u^h,\varphi) + \underbrace{a(u^h,\varphi-\varphi^h)}_{=0}| = |a(u-u^h,\varphi-\varphi^h)|$$

$-\varphi^h$ viz Galerk. ortog.

$$\leq M\cdot\underbrace{\|u-u^h\|_1}_{\leq C\cdot h\cdot|u|_2}\cdot\underbrace{\|\varphi-\varphi^h\|_1}_{\leq C\cdot h\cdot|\varphi|_2} = \boxed{O(h^2)}$$

Je-li (V) resp. (V^*) H^2-reg.