NM2 - projekty

Report ke každému z projektů obsahuje:

- odvození variační formulace a Galerkinovy úlohy,
- popis sestavení diskretizovaného problému (např. MKP soustavy lineárních rovnic),
- numerické experimenty.

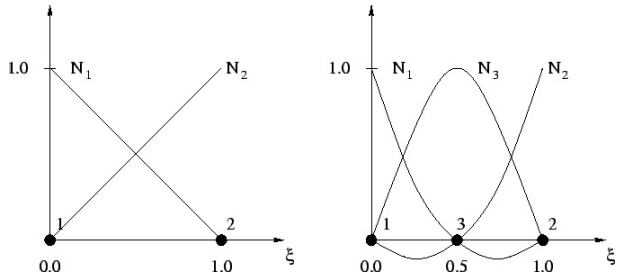
Do 9.4.2017 si rozmyslete postup vypracování svého projektu, na cvičení jednotlivá zadání podrobně projdeme. Report k projektu stačí odevzdat elektronicky, termín odevzdání je nejpozději 6.5.2017, obhajoby projektů budou probíhat na cvičení 14.5.2017. Pro implementaci doporučuji použít MATLAB a co nejvíce využít kódy ze cvičení. Práci na projektech pro dva si mezi sebou rozdělte spravedlivě! :-)

Zadání 1 (Kvadratické konečné prvky) - 2 studenti

Řešte úlohu

$$\begin{aligned} -ku''(x) &= \sin(x) \quad \text{pro } x \in (0, 4\pi) \\ u(0) &= \widehat{u} \\ -ku'(4\pi) &= \widehat{\tau}, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{R}^+$, $\widehat{u} \in \mathbb{R}^+$, $\widehat{\tau} \in \mathbb{R}$. Použijte kvadratické konečné prvky.



Zadání 2 (Homogenizace 1d materiálu) - 1 student

Řešte úlohu

$$\begin{aligned} -\left(k(x)\,u'(x)\right)' + pu'(x) &= f \quad \text{v } \Omega = (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

kde $k(x)$ je po částech konstantní ε-periodická funkce, $p \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathbb{R}$. Volte nejprve $p = 0$ a ověřte experimentálně pro $\varepsilon \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$, že MKP řešení úlohy konverguje při zjemňování materiálu k řešení úlohy

$$\begin{aligned} -k_h u''(x) &= f \quad \text{v } \Omega = (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

kde

$$k_h = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{k(x)} \mathrm{d}x}$$

je homogenizovaný (konstantní) materiál. Zjistěte experimentálně, zda totéž platí i pro $p > 0$.

Pro celou posloupnost experimentů volte stejnou ekvidistantní síť. Zajistěte, aby ke skokům v materiálu docházelo pouze v bodech diskretizace.

Zadání 3 (Úloha na vlastní funkce) - 1 až 2 studenti

Řešte úlohu

$$\begin{aligned} -\triangle u(x) &= \lambda u(x) \quad \text{v } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u(x) &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

pomocí metody konečných prvků. Vypište několik největších vlastních čísel a vykreslete jim odpovídající vlastní funkce.

Zadání 4 (Nestacionární úloha) - 2 studenti

Řešte úlohu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + k \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pro } x \in (0,1)\,,\ t \in (0,T) \\
u(0,t) &= f_0(t) \\
u(1,t) &= f_1(t) \\
u(x,0) &= g(x)\,,
\end{aligned}$$

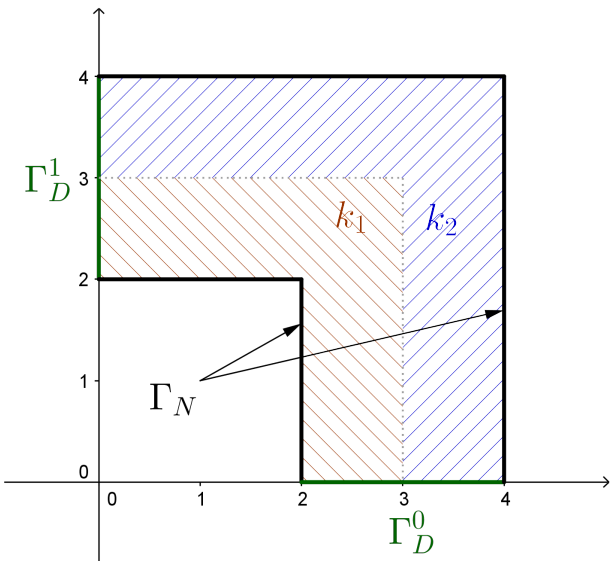
kde $k \in \mathbb{R}^+$, $T \in \mathbb{R}^+$, $f_0(t) : (0,T) \to \mathbb{R}$, $f_1(t) : (0,T) \to \mathbb{R}$ a $g(t) : (0,1) \to \mathbb{R}$, pomocí 2d metody konečných prvků. Znázorněte průběh funkce $u(x,t)$ na oblasti $\Omega = (0,1) \times (0,T)$.

Zadání 5 (Tok a tlak na „L“ oblasti) - 1 až 2 studenti

Řešte úlohu

$$\begin{aligned}
-\mathrm{div}\left(k(x) \cdot \nabla u(x)\right) &= 0 \quad \text{v } \Omega = (0,4) \times (0,4) \setminus (0,2) \times (0,2) \\
u(x) &= 0 \quad \text{na } \Gamma_D^0 \\
u(x) &= 1 \quad \text{na } \Gamma_D^1 \\
k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= 0 \quad \text{na } \Gamma_N,
\end{aligned}$$

pomocí 2d metody konečných prvků. Znázorněte stavovou funkci $u(x)$ pro $k_1 > k_2 > 0$ a pro $k_2 > k_1 > 0$. Pomocí diferencí odhadněte také obě složky tokové funkce $f(x) = -k(x) \cdot \nabla u(x)$.



Zadání 6 (Galerkinova metoda s polynomiální bází) - 1 student

Řešte úlohu

$$\begin{aligned}
-ku''(x) + pu'(x) + qu(x) &= f(x) \quad \text{pro } x \in (0,1) \\
u(0) &= \widehat{u}_1 \\
u(1) &= \widehat{u}_2,
\end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}^+$, $q \in \mathbb{R}^+$, $\widehat{u}_1 \in \mathbb{R}$, $\widehat{u}_2 \in \mathbb{R}$, $f(x) : (0,1) \to \mathbb{R}$ pomocí Galerkinovy metody s vhodnou polynomiální bází.