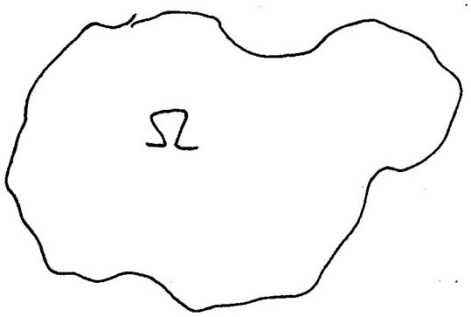
7.4.'21

(92)

NM2 – Mat. model a variační formulace vedení tepla ve více dimenzích (stacionární)

Uvažujme těleso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (resp. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$)



Veličiny

- teplota $u(x) : \Omega \to \mathbb{R}$
- teplotní spád ve směru s

$$\varepsilon(x,s) := \frac{du}{ds}(x) \quad , \|s\| = 1$$

- tepelný tok: Množství tepla procházející ve směru s jednotkovou plochou (za jednotku času)

$$\tau(x,s) := \lim_{|S(x,s)| \to 0} \frac{Q(x,S)}{|S(x,s)|} \quad , \text{kde } |S| \text{ je obsah plochy.}$$

Označme pro $i = 1,2,3$ $\quad \varepsilon_i(x) := \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \; , \; \bar{\varepsilon}(x) := \nabla u(x)$

$$\tau_i(x) := \tau(x, e_i) \quad , \text{kde } e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ atd.}$$

$$\bar{\tau}(x) := (\tau_1(x), \tau_2(x), \tau_3(x))$$

Fourierův zákon

- izotropní: $\boxed{\tau(x,s) = -k(x) \cdot \varepsilon(x,s)} \quad \forall s, \|s\| = 1$
- anizotropní: $\boxed{\bar{\tau}(x) = -\mathbb{K}(x) \cdot \bar{\varepsilon}(x)}$

kde $k_{ij}(x) > 0$ resp. $\mathbb{K}(x)$ poz. def. jsou koeficienty tepelné vodivosti.

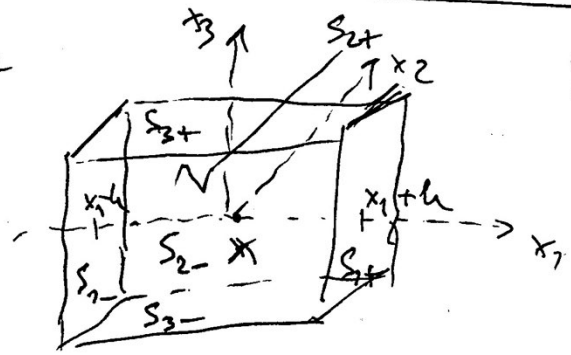
Zákon zachování tepla

$K(x,h) := \{ z = (z_1, z_2, z_3) : |z_i - x_i| < h \} \subset \Omega$ .. krychle se středem v $x \in \Omega$ a ~~stranou~~ hranou $2h > 0$.

$\forall x \in \Omega \quad \forall h > 0 \;,\; K(x,h) \subset \Omega$:

$$\boxed{\underbrace{\int_{S_{1+}} \vec{\tau}_1 \, ds - \int_{S_{1-}} \vec{\tau}_1 \, ds + \int_{S_{2+}} \vec{\tau}_2 \, ds - \int_{S_{2-}} \vec{\tau}_2 \, ds + \int_{S_{3+}} \vec{\tau}_3 \, ds - \int_{S_{3-}} \vec{\tau}_3 \, ds}_{\text{teplo vycházející z povrchu } \partial K(x,h)} = \underbrace{\int_K f \, dx}_{\text{teplo vzniklé v objemu } K(x,h)}}$$

kde



$S_{1+}, \dots, S_{3-}$ jsou stěny K

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ .. tepelná hustota (zdrojů)

Podělme tepelnou bilanci $\frac{1}{8h^3}$ a parametrizujme stěny i objem:

$$\frac{1}{4h^2} \Bigg\{ \int_{x_2-h}^{x_2+h} \int_{x_3-h}^{x_3+h} \frac{\tau_1(x_1+h, z_2, z_3) - \tau_1(x_1-h, z_2, z_3)}{2h} \, dz_3 \, dz_2$$

$$+ \int_{x_1-h}^{x_1+h} \int_{x_3-h}^{x_3+h} \frac{\tau_2(z_1, x_2+h, z_3) - \tau_2(z_1, x_2-h, z_3)}{2h} \, dz_3 \, dz_1$$

$$+ \int_{x_1-h}^{x_1+h} \int_{x_2-h}^{x_2+h} \frac{\tau_3(z_1, z_2, x_3+h) - \tau_3(z_1, z_2, x_3-h)}{2h} \, dz_2 \, dz_1 \Bigg\}$$

$$= \frac{1}{8h^3} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \int_{x_2-h}^{x_2+h} \int_{x_3-h}^{x_3+h} f(z_1, z_2, z_3) \, dz_3 \, dz_2 \, dz_1$$

Pro funkce $f \in C(\bar{\Omega})$, $\bar{\tau} \in [C^1(\bar{\Omega})]^3$ dostáváme pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě:

$$\boxed{+ \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i}(x)}_{= + \operatorname{div} \vec{\tau}} = f(x)}$$

NM2 – Mat. model a var. formulace (stacionárního) vedení tepla ve více dimenzích

Okrajové podmínky

Hranici $\Gamma := \partial\Omega$ rozdělíme na dvě disjunktní části Γ_D, Γ_N : $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$

$$\overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N = \Gamma$$

a předepíšeme smíšené okrajové podmínky

- $u(x) = \hat{u}(x) \quad \forall x \in \Gamma_D$ .. Dirichletova podm.
- $\underbrace{\bar{\tau}(x) \cdot \bar{n}(x)}_{=: \tau_n(x)} = \hat{\tau}(x) \quad \forall x \in \Gamma_N$ .. Neumannova podm.

Dostáváme okrajovou úlohu (izotropní Four. z.):

$$\boxed{(P) \begin{cases} -\operatorname{div}[k(x)\,\nabla u(x)] = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = \hat{u}(x), & x \in \Gamma_D, \\ -k(x)\dfrac{du}{dn}(x) = \hat{\tau}(x), & x \in \Gamma_N, \end{cases}}$$

kde $\bar{n}(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$, ~~je~~ $\|\bar{n}(x)\| = 1$, je vnější jednotková normála v $x \in \partial\Omega$ k Ω.

Pro heterogenní materiál lze z bilanční rovnice odvodit podmínky přechodu:

- spojitost $u(x)$
- spojitost $\tau_n(x)$

Variační formulace

Vezměme testovací funkci $v(x) \in C^1(\bar{\Omega})$: $\boxed{v(x) = 0 \text{ na } \Gamma_D}$

Pak

$$\int_\Omega \underbrace{-\operatorname{div}[k(x)\nabla u(x)]}_{\cancel{= k\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}}} \cdot v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad (*)$$

$$\cancel{= k\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_3}{\partial x_3}\right)}$$

Připomeňme si 3d analogii Newton-Leibnitzovy formule, tzv. Gaussovu větu

$$\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \psi(x)\, n_i(x)\, ds(x)$$

Dosazením $\psi(x) := \varphi(x) v(x)$ dostáváme Greenovu větu

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) v(x)\, dx = -\int_\Omega \varphi(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v(x)\, n_i(x)\, ds(x)$$

Greenovu větu aplikujeme na levou stranu $(*)$ třikrát

pro $\boxed{i = 1,2,3\ ;\ \varphi_i(x) := -k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \tau_i(x)}$:

$$\int_\Omega \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} v + \int_\Omega \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} v + \int_\Omega \frac{\partial \tau_3}{\partial x_3} v \overset{\text{(Gr. v.)}}{=} -\int_\Omega \left(\tau_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \tau_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \tau_3 \frac{\partial v}{\partial x_3}\right)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left(\tau_1 v n_1 + \tau_2 v n_2 + \tau_3 v n_3\right)$$

$$= \int_\Omega k(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_{\Gamma_D} \tau_n(x) \underbrace{v(x)}_{=0}\, ds(x) + \int_{\Gamma_N} \underbrace{\tau_n(x)}_{=\hat{\tau}(x)} v(x)\, ds(x)$$

a dostáváme variační identitu

$$\int_\Omega k(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx - \int_{\Gamma_N} \hat{\tau}(x) v(x)\, ds(x)$$

NM2 – Mat. modelování a var. formulace (stacionárního) vedení tepla ve vícedimenzích

Variační formulace úlohy (P)

$$(V)\begin{cases} \text{Hledáme } u(x) \in U_D := \{ w \in H^1(\Omega) : \underset{\text{stopa}}{Tw} = \hat{u}(x) \text{ na } \Gamma_D \}; \\ \underbrace{\int_\Omega k(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx}_{=:a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f(x)v(x)\,dx - \int_{\Gamma_N} \hat{\tau}(x)Tv(x)\,ds(x)}_{=:b(v)} \\ \forall v(x) \in V := \{ v \in H^1(\Omega) : Tv = 0 \text{ na } \Gamma_D \} \end{cases}$$

přičemž $U_D = V + \hat{u}$.

Odvodili jsme, že $u \in C^2(\bar{\Omega})$ řešící (P) ($k \in C^1(\bar{\Omega}), \dots$) bude řešit taky (V). Podobně jako v 1d lze ukázat i opačnou implikaci např.

$$u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) \text{ řeší } \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$u \text{ řeší } -\Delta u = f$$

Důkaz. $$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v \overset{\text{Gr. v.}}{=} \int_\Omega -\Delta u\, v + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\underbrace{Tv}_{=0} \overset{(V)}{=} \int_\Omega f v$$

Pro dané $x \in \Omega$ zvolíme posloupnost $C^1(\Omega)$ funkcí $v_n(y)$ takových, že $v_n(x) = 1$ a „$\operatorname{supp} v_n(y) \xrightarrow{n\to\infty} \{x\}$".

Konečně lze použít Rieszovu nebo Lax-Milgramovu (pro $\mathbb{K}(x)$ nesymetrické) větu a dokázat existenci jednoznačného řešení úlohy (V), které spojitě závisí na datech $f(x)$ a $\hat{\tau}(x)$ a $\hat{u}(x)$. K tomu ověříme:

- omezenost bilineární formy $b(v)$.

$$|b(v)| = \left|\int_\Omega f v - \int_{\Gamma_N} \hat{\tau} v\right| \leq \left|\int_\Omega f v\right| + \left|\int_{\Gamma_N} \hat{\tau} T v\right| \overset{\text{Cauchy Schw.}}{\leq} \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|\hat{\tau}\|_{0,\Gamma_N} \|Tv\|_{0,\Gamma_N}$$

Více o stopách

$$\leq \underbrace{\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_T \|\hat{\tau}\|_{L^2(\Gamma_N)}\right\}}_{=:B>0} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$\forall v \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $\hat{\tau} \in L^2(\Gamma_N)$

- omezenost bilineární formy $a(u,v)$

$$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega k(x)\, \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx\right|$$

$k \in L^\infty(\Omega)$

$$\leq \|k(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \left|\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3}\right) dx\right|$$

Cauchy-Schw.

$$\leq \|k\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{0,\Omega} \cdot \left\|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right\|_{0,\Omega} + \dots + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\|_{0,\Omega} \cdot \left\|\frac{\partial v}{\partial x_3}\right\|_{0,\Omega}\right)$$

$|u|_1 := \sqrt{\sum_i \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_0^2}$

$$\leq \|k\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot |u|_{1,\Omega} \cdot |v|_{1,\Omega} \leq \underbrace{\|k\|_\infty}_{=:M} \cdot \|u\|_1 \cdot \|v\|_1$$

$\forall u, v \in H^1(\Omega)$, $k \in L^\infty(\Omega)$