# NM2 – 1d metoda konečných prvků II

**Věta.** (Aubin-Nitscheho trik)

- $u$ řeší $(V)$, $u \in H^2((0,1))$
- $u^h$ řeší $(V^h)$
- $F: H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineární, spoj.
- $p \in V \cap H^2((0,1))$ řeší adjungovanou úlohu
$$a(p,v) = F(v) \quad \forall v \in V$$
- $p^h \in V^h$ : $a(p^h, v^h) = F(v^h) \quad \forall v^h \in V^h$

$$\Rightarrow |F(u) - F(u^h)| \leq M \cdot (h^2 + h^4) \cdot \|p''\|_0 \cdot \|u''\|_0$$

~~$\times \max\{\|p''\|_0, \|u''\|_0\}$~~

kde $M > 0$ je konstanta omezenosti $a(u,v)$.

**Důkaz.**

$$|F(u) - F(u^h)| = |F(\underbrace{u - \hat{u}}_{\in V} + \hat{u}) - F(\underbrace{u^h - \hat{u}}_{\in V^h} + \hat{u})|$$

$$= |F(\underbrace{u - \hat{u}}_{\in V}) - F(\underbrace{u^h - \hat{u}}_{\in V^h}) + \underbrace{F(\hat{u}) - F(\hat{u})}_{0}|$$

$$= |a(p, u - \hat{u}) - a(p^h, u^h - \hat{u}) \pm a(p, u^h - \hat{u})|$$

$$= |a(p, u - u^h) + \underbrace{a(p - p^h, u^h - \hat{u})}_{\text{Gal. orf.}\ = 0}| \overset{\text{Gal. orf.}}{=} |a(p - p^h, u - u^h)|$$

$$\leq M \cdot \|p - p^h\|_1 \cdot \|u - u^h\|_1 \overset{\text{NRPdyBc}}{\leq} M \cdot \sqrt{h^2 + h^4}\, \|p''\|_0 \cdot \sqrt{h^2 + h^4} \cdot \|u''\|_0$$

$\square$

Chceme-li tedy např. zjistit průměrnou hodnotu řešení v nějaké podoblasti, $F(u) := \frac{1}{|\omega|} \int_\omega u(x)\,dx$, můžeme pozorovat kvadratickou rychlost konvergence.

## Podmíněnost MKP-matic

Už víme, že rychlost konvergence iteračních metod pro řešení soustav lineárních rovnic se symetrickou positivně definitní maticí lze odhadnout číslem podmíněnosti matice soustavy. Např.

$$\text{počet iterací} \leq C \cdot |\log \varepsilon| \cdot \begin{cases} K(\mathbb{A}) \\ \sqrt{K(\mathbb{A})} \end{cases}$$

pro Richardsonovu metodu resp. metodu sdružených gradientů, kde $\varepsilon$ je požadovaná relativní přesnost a $K(\mathbb{A}) := \dfrac{\lambda_{max}(\mathbb{A})}{\lambda_{min}(\mathbb{A})} = \|\mathbb{A}\| \cdot \|\mathbb{A}^{-1}\|$ je podíl největšího a nejmenšího vlastního čísla matice $\mathbb{A}$.

Ukážeme, že pro MKP-matici platí: $K(\mathbb{A}) = O(h^{-2})$

Připomeňme si již dříve dokázanou

<u>Lemma.</u> (<u>Friedrichsova nerovnost</u>)

$$\forall v \in V := \{v \in H^1((0,1)) : v(0) = 0\} : \quad |v|_1^2 \geq 2\|v\|_0^2$$

<u>Důkaz.</u> $v(x) = \underbrace{v(0)}_{=0} + \int_0^x v'(y)\,dy$

$$|v(x)| = \left|\int_0^x 1 \cdot v'(y)\,dy\right| \overset{\text{C.-S. v } L^2((0,1))}{\leq} \sqrt{\int_0^x 1^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_0^x [v'(y)]^2\,dy}$$

$$\leq \sqrt{x} \cdot |v|_1$$

$$\|v\|_0^2 = \int_0^1 v^2(x)\,dx \leq \int_0^1 (\sqrt{x} \cdot |v|_1)^2\,dx = \frac{1}{2}|v_1|^2 \qquad \square$$

# NM2 – 1d metoda konečných prvků II

31.3.'21

(40)

## Číslo podmíněnosti matice $\mathbb{A}$

$$(\mathbb{A})_{ij} := a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 k(x)\, \varphi_i'(x)\, \varphi_j'(x)\, dx$$

kde $\varphi_i, \varphi_j \in V^h \subset V$ ~ spojité po částech lin. báze nad ekvidistantní diskretizací

Hledáme $\lambda, \Lambda > 0$ : $\forall v^h \in V^h$ :

$$\lambda \cdot \underbrace{\|\bar{v}\|^2}_{=\bar{v}^T\cdot\bar{v}} \leq \underbrace{a(v^h, v^h)}_{=\bar{v}^T\cdot\mathbb{A}\cdot\bar{v}} \leq \Lambda \cdot \underbrace{\|\bar{v}\|^2}_{=\bar{v}^T\cdot\bar{v}},$$

kde $v^h(x) = \sum_{j=1}^{m} (\bar{v})_j\, \varphi_j(x)$ tj. $\bar{v}$ je KP-souřadnicový vektor.

$\Lambda$: $$a(v^h, v^h) \leq \|k\|_\infty \cdot \int_0^1 v^{h\prime}(x)^2\, dx = \|k\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h}\right)^2 dx$$

$$= \|k\|_\infty \cdot \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1}^{m} \{ v_{i-1}^2 + v_i^2 \underbrace{- 2 v_{i-1} v_i}_{\leq v_{i-1}^2 + v_i^2} \}$$

$$\leq \|k\|_\infty \cdot \frac{2}{h} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \{ v_{i-1}^2 + v_i^2 \}}_{\leq 2\cdot\|\bar{v}\|^2} \leq \boxed{\underbrace{\|k\|_\infty \cdot \frac{4}{h}}_{=:\Lambda}} \cdot \|\bar{v}\|^2$$

$\lambda$: $$a(v^h, v^h) \geq k_0 \cdot |v^h|_1^2 \overset{\text{Friedrichs}}{\geq} k_0 \cdot 2 \cdot \int_0^1 v^h(x)^2\, dx = 2k_0 \cdot \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v^h(x)\, dx$$

$$= 2k_0 \cdot \sum_{i=1}^{m} \int_0^h \left(v_{i-1} + \frac{v_i - v_{i-1}}{h} x\right)^2 dx = 2k_0 \cdot \sum_{i=1}^{m} \int_0^h v_{i-1}^2 + \frac{1}{h^2}(v_i - v_{i-1})^2 x^2 + \frac{2}{h} v_{i-1}(v_i - v_{i-1}) x \, dx$$

$$= 2k_0 \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{m} \left\{ \cancel{(v_{i-1})^2} + \frac{1}{3}(v_i - v_{i-1})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} v_{i-1}(v_i - \cancel{v_{i-1}}) \right\}$$

$$= 2k_0 \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{1}{3} v_{i-1}^2 + \frac{1}{3} v_i^2 + \frac{1}{3} v_{i-1} v_i \right\} \overset{(*)}{=} \frac{2}{3} k_0 \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{m} \left\{ v_{i-1}^2 + v_i^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} v_{i-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} v_i\right)^2} - \frac{1}{2} v_{i-1}^2 - \frac{1}{2} v_i^2 \right\}$$

$$a(v^h, v^h) \geq \frac{2}{6} k_0 \cdot h \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{M} \{v_{i-1}^2 + v_i^2\}}_{\geq \|\bar{v}\|^2} \geq \boxed{\underbrace{k_0 \cdot \frac{h}{3}}_{=:\lambda}} \|\bar{v}\|^2$$

A tedy

$$\boxed{K(\mathbb{A}) \leq \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\|k\|_\infty}{k_0} \cdot 12 \cdot h^{-2}}$$

<u>Číslo podmíněnosti matice hmotnosti $\mathbb{M}$</u>

$$\mathbb{M}_{ij} := \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx \quad : \boxed{K(\mathbb{M}) \leq 8}$$

Matice hmotnosti se objevuje v úloze $L^2((0,1))$-ortogonální projekce $\begin{cases} \text{Hledám } u \in L^2((0,1)): \\ \int_0^1 uv = b(v) \ \forall v \in L^2((0,1)) \end{cases}$

nebo v explicitních metodách časové diskretizace rovnice vedení tepla, s čímž se setkáme na konci semestru, či vlnové rovnice.

Hledáme $\lambda, \Delta > 0 \ \forall v^h \in V^h$:

$$\lambda \|\bar{v}\|^2 \leq \int_0^1 v^h(x)^2\,dx \leq \Delta \|\bar{v}\|^2$$

$$\Delta: \int_0^1 v^h(x)^2\,dx = \sum_{i=1}^{M} \frac{h}{3}\{v_{i-1}^2 + v_i^2 + \underbrace{v_{i-1}v_i}_{\leq v_{i-1}^2 + v_i^2}\} \leq \frac{2}{3} h \sum_{i=1}^{M} \{v_{i-1}^2 + v_i^2\}$$

$$\leq \boxed{\underbrace{\frac{4}{3} h}_{=:\Delta}} \cdot \|\bar{v}\|^2$$

$$\lambda: \int_0^1 v^h(x)^2\,dx = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{M} \underbrace{\{v_{i-1}^2 + v_i^2 + v_{i-1}v_i\}}_{\overset{(*)}{\geq} \frac{1}{2}(v_{i-1}^2 + v_i^2)} \geq \frac{h}{6} \cdot \sum_{i=1}^{M} \underbrace{\{v_{i-1}^2 + v_i^2\}}_{\geq \|\bar{v}\|^2} \geq \boxed{\underbrace{\frac{h}{6}}_{=:\lambda}} \cdot \|\bar{v}\|^2$$