NM2 – 1d metoda konečných prvků (MKP)

23.3.'21

(32)

Uvažujme variační formulaci

$$(V)\begin{cases} \text{Hledám } u(x) \in \hat{u} + V: \\ \underbrace{\int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,dx}_{=:a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x)\,dx + \hat{\tau}v(1)}_{=:b(v)} \quad \forall v(x) \in V \end{cases}$$

kde
- $V := \{v \in H^1((0,1)) : v(0) = 0\}$
- $k \in L^\infty((0,1))$: $\exists k_0 > 0 : k(x) \geq k_0$ skoro všude v $(0,1)$,
- $f \in L^2((0,1))$
- $\hat{u}, \hat{\tau} \in \mathbb{R}$

Diskretizace

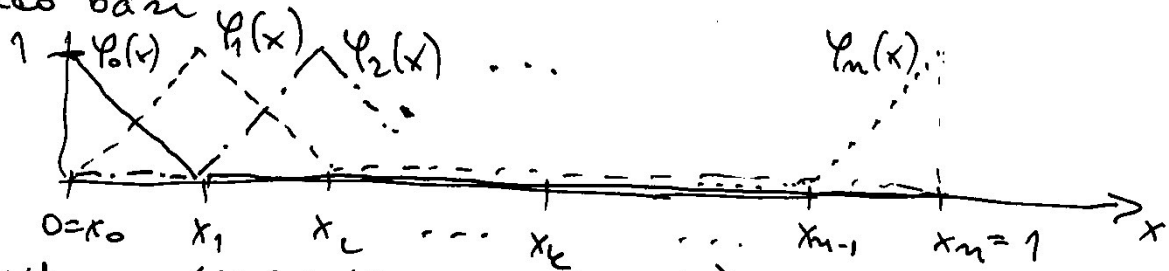
Rozdělme $\langle 0,1 \rangle$ do navzájem disjunktních (až na krajní) intervalů (x_i, x_{i+1}) tak, aby případné skoky ve funkci $k(x)$ „lícovaly" s tímto dělením.

Pro jednoduchost uvažujme n dílků (prvků, elementů) ekvidistantních

tj. $x_i = i \cdot h$, kde $h = 1/n$.

Metoda konečných prvků

je speciální Galerkinova metoda, v níž volíme tuto bázi



$$V^h := \langle \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \rangle$$

$$(V^h)\begin{cases} \text{Hledáme } u^h(x) = \hat{u} \cdot \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x) : \\ a(u^h(x), \varphi_i(x)) = b(\varphi_i(x)) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

Úloha (V^h) je ekvivalentní se soustavou lin. r.:

$$\boxed{\mathbb{A}\cdot\bar{u} = \bar{b} - \hat{\mathbb{A}}\cdot\hat{u}}$$

kde
$$\tilde{\mathbb{A}} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \quad\cdots\quad m \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \\ m \end{array} & \left[\begin{array}{c|ccc} \times & & & \\ \hline \hat{\mathbb{A}} & & \mathbb{A} & \\ & & & \end{array}\right] \end{array}, \quad \tilde{b} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \times \\ \hline \bar{b} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ \\ m \end{array}, \quad \tilde{u} = \left[\begin{array}{c} \hat{u} \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array}\right]\begin{array}{l} 0 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 \\ \bar{u} \\ \\ \\ \end{array} \\ m \end{array}$$

$$\tilde{\mathbb{A}}_{ij} := a(\varphi_j, \varphi_i), \quad \tilde{b}_i := b(\varphi_i), \quad i,j \in \{0,1,2,\dots,m\}$$

Sestavení $\tilde{\mathbb{A}}$, $\tilde{b}$ po prvcích (odtud název MKP)

Předpokládejme $k(x)$, $f(x)$ po prvcích konstantní.

$$\tilde{\mathbb{A}}_{ij} = \int_0^1 k(x)\,\varphi_j'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx = \sum_{e=1}^{m} k_e \underbrace{\int_{x_{e-1}}^{x_e} \varphi_j'(x)\cdot\varphi_i'(x)\,dx}_{\neq 0,\ \text{pokud (resp. pak) } i,j\in\{e-1,e\}}$$

Lok. matice

$$\mathbb{A}^e := \frac{k_e}{h}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b}_i = \dots = \sum_{e=1}^{m} f_e \underbrace{\int_{x_{e-1}}^{x_e} \varphi_i(x)\,dx}_{\neq 0,\ \text{pak } i\in\{e-1,e\}} + \hat{\tau}\,\delta_{im}$$

Lok. vektor

$$\bar{b}^e := \frac{f_e\cdot h}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algoritmus

```
Ã := 0 , b̃ := 0̄
for e=1:m
    Ã((e-1):e,(e-1):e) += A^e
    b̃((e-1):e) += b̄^e
end for
b̃(m) += τ̂
A := Ã(1:m,1:m) , b̄ := b̃(1:m)
ū := A\b̄ ;
ũ := [û ; ū] ; plot(0:h:1, ũ^T)
```

NMZ – 1d metoda konečných prvků

23.3.'21

Věta. (Sobolevova o spojitém vnoření)

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, oblast s lipschitzovskou hranicí
- $k \in \mathbb{N} : 2k > d$

$\Rightarrow$
- $H^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$
  a
- $\exists C > 0 \ \forall v \in H^k(\Omega)$: $\|v\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C \cdot \|v\|_{H^k(\Omega)}$

Důsledek

- $H^1((0,1)) \subset C(\langle 0,1 \rangle)$, a tudíž $V^h \subset V$ ✓
- Operátor ~~inter.~~ po částech lineární (MKP-) interpolace je korektně definován

$$I^h : \tilde{V} \mapsto \tilde{V}^h \quad (\text{resp. } I^h : V \to V^h)$$

$$\boxed{I^h(u)(x) := \sum_{i=0}^{m} u(x_i)\varphi_i(x)}$$

- Ze Céaova lemma plyne:

$$\boxed{\|u-u^h\|_a \leq \|u - I^h u\|_a, \quad \|u-u^h\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{M}{m}\|u - I^h u\|_{H^1(0,1)}}$$

Věta. (1d MKP realizuje MKP-interpolaci)

$$\boxed{u^h = I^h u}$$

Důkaz. Ze Céaova lemma víme, že

$\forall w^h \in \hat{u} + V^h : a(u-u^h, u-u^h) \leq a(u-w^h, u-w^h)$

Jedná se vlastně o energetickou formulaci, neboť

$$a(u-u^h, u-u^h) = a(u^h,u^h) - 2\underbrace{a(u,u^h)}_{=:b(u^h)} + \underbrace{a(u,u)}_{\text{konstanta}},$$

o které víme, že má právě jedno řešení. (To víme také z věty o ortog. projekci).

Dokážeme, že toto řešení je $u^h := I^h u$.

~~(indukce)~~
(indukcí) ✓

$$a(u-w^h, u-w^h) = \sum_{e=1}^{m} k_e \int_{x_{e-1}}^{x_e} \Big(u'(x) - \frac{w_e - w_{e-1}}{h}\Big)^2 dx$$

Stačí ukázat, že $w^h = I^h u$ minimalizuje jednotlivé sčítance.

$$\downarrow$$

min!

$w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathbb{R}$

1) $$\int_0^h \Big(u'(x) - \frac{w_1 - \hat{u}}{h}\Big)^2 dx$$

$$= \int_0^h u'(x)^2 dx - \frac{2}{h}(w_1 - \hat{u}) \int_0^h u'(x)\,dx + \frac{1}{h^2}(w_1 - \hat{u})^2 \underbrace{\int_0^h 1\,dx}_{=h} \to \min_{w_1 \in \mathbb{R}}$$

Jednoznačné minimum nastává pro

$$w_1 - \hat{u} = \int_0^h u'(x)\,dx = u_1 - \hat{u} \Rightarrow w_1 = u_1$$

~~indukcí kroků~~:
~~indukcí krok~~.

e) $$\int_{x_{e-1}}^{x_e} \Big(u'(x) - \frac{w_e - u_{e-1}}{h}\Big)^2 dx$$

$$= \int_{x_{e-1}}^{x_e} u'(x)^2 dx - \frac{2}{h}(w_e - u_{e-1}) \int_{x_{e-1}}^{x_e} u'(x)\,dx + \frac{1}{h}(w_e - u_{e-1})^2$$

$$\to \min_{w_e \in \mathbb{R}}!$$

Jednoznačné minimum nastává pro

$$w_e - u_{e-1} = \int_{x_{e-1}}^{x_e} u'(x)\,dx = u_e - u_{e-1} \Rightarrow w_e = u_e \qquad \square$$

Rychlost konvergence MKP budeme tedy zkoumat pomocí kvality MKP-interpolace. Důkaz bude podobný jako odvození chyby interpolace v předmětu Numerické metody 1.

<u>Věta</u>. (Chyba MKP-interpolace)

$u \in C^2_{(pw)}(\langle 0,1\rangle)$ (stačí $u \in H^2(0,1)$) $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \cdot\ \|u - I^h u\|_0 \leq h^2 \|u''\|_0 \\ \cdot\ \|(u - I^h u)'\|_0 \leq h \cdot \|u''\|_0 \end{cases}$

a tedy $\boxed{\|u - I^h u\|_1 = O(h)}$

NM2 – 1d metoda konečných prvků

23.3.'21

36

Důkaz. (Věty o chybě 1d-MKP interpolace)

Označme chybu interpolace $e(x) := u(x) - (I^h u)(x)$

Na každém prvku (x_{e-1}, x_e):

$$e(x) = \underbrace{e(x_{e-1})}_{=0} + \int_{x_{e-1}}^{x} 1 \cdot e'(y)\,dy \qquad (*)$$

Z Rolleovy věty: $\exists \xi_e \in (x_{e-1}, x_e): e'(\xi_e) = 0$

tj. $$e'(y) = \underbrace{e'(\xi)}_{=0} + \int_{\xi}^{y} \underbrace{e''(z)}_{= u''(z) - \underbrace{(I^h u)''(z)}_{=0}}\,dz = \int_{\xi}^{y} 1 \cdot u''(z)\,dz$$

$$|e'(y)| \overset{\text{Cauchy-Schw.}}{\leq} \sqrt{\int_{\xi}^{y} 1^2\,dz} \cdot \sqrt{\int_{\xi}^{y} (u''(z))^2\,dz} \leq \sqrt{h} \cdot \|u''\|_{L^2(x_{e-1}, x_e)}$$

Podobně aplikujeme Cauchy-Schw. nerovnost na $(*)$:

$$|e(x)| \leq \underbrace{\sqrt{\int_{x_{e-1}}^{x_e} 1^2\,dx}}_{=\sqrt{h}} \cdot \sqrt{\int_{x_{e-1}}^{x_e} [e'(y)]^2\,dy} \leq \sqrt{h^3}\, \|u''\|_{L^2(x_{e-1}, x_e)}$$

A tedy:

- $$\|u - I^h u\|_0^2 = \|e\|_0^2 = \sum_{e=1}^{m} \|e\|^2_{L^2(x_{e-1}, x_e)} \leq \sum_{i=1}^{m} h^3 \|u''\|^2_{L^2(x_{e-1}, x_e)} \cdot \underbrace{\int_{x_{e-1}}^{x_e} 1^2\,dx}_{=h}$$
$$= h^4 \cdot \|u''\|_0^2$$

- $$\|(u - I^h u)'\|_0^2 = \sum_{e=1}^{m} \|e'\|^2_{L^2(x_{e-1}, x_e)} \leq \sum_{e=1}^{m} h \cdot \|u''\|^2_{L^2(x_{e-1}, x_e)} \underbrace{\int_{x_{e-1}}^{x_e} 1^2\,dx}_{=h}$$
$$= h^2 \|u''\|_0^2$$

$\square$

Důsledek.

$$\boxed{\|u-u^h\|_1 \leq \sqrt{h^2+h^4}\cdot\|u''\|_0 = O(h)}$$

Poznámka.

Pokud skoky v $k(x)$ ~~nerespektuje~~ nejsou sledovány (nejsou v uzlech) MKP-diskretizace, lze dokázat pouze $\|u-u^h\|_1 = O(\sqrt{h})$.

Věta. (Konvergence MKP bez regularity řešení)

$$u \in H^1((0,1)) \longrightarrow u^h \xrightarrow{h\to 0_+} u \text{ v } H^1((0,1))$$

Důkaz. Ukážeme, že pro lib. malé $\varepsilon > 0$ existuje $h_0(\varepsilon) > 0$ tak, že $\forall h \leq h_0(\varepsilon): \|u-u^h\|_1 \leq \varepsilon$.

- $H^2((0,1))$ je hustá v $H^1((0,1))$ tj.

$$\exists \tilde{u}_\varepsilon \in H^2((0,1)) : \|u-\tilde{u}_\varepsilon\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{m}{M},$$

m, M viz Céaovo lemma

- Z věty o interpolaci:

$$\|\tilde{u}_\varepsilon - I^h\tilde{u}_\varepsilon\|_1 \leq \underbrace{\sqrt{h^2+h^4}\,\|\tilde{u}_\varepsilon''\|_0 \overset{!}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{m}{M}}$$

Zjevně $\exists h_0(\varepsilon) > 0$ $\forall h \leq h_0(\varepsilon)$ nerovnost „$\overset{!}{\leq}$" platí.

Nyní z trojúhelníkové nerovnosti:

$$\|u-u^h\|_1 \overset{\text{Céa}}{\leq} \frac{M}{m}\cdot\|u-I^h\tilde{u}_\varepsilon\|_1 \overset{\Delta\text{-ner.}}{\leq} \frac{M}{m}\Big\{\underbrace{\|u-\tilde{u}_\varepsilon\|_1 + \|\tilde{u}_\varepsilon - I^h\tilde{u}_\varepsilon\|_1}_{\leq \varepsilon\cdot\frac{m}{M}}$$

$\pm\tilde{u}_\varepsilon$

$\square$