NM2 – Vlastnosti var. formulace III

2.3.'21

(22)

• <u>V-eliptičnost</u> bilineární formy $a: V\times V\to\mathbb{R}$

$$\exists m>0\ \forall v\in V:\ a(v,v)\geq m\cdot\|v\|^2$$

např. 1) $a(u,v):=\int_0^1\left(k(x)u'(x)v'(x)+q(x)u(x)v(x)\right)dx$

kde $k(x)\geq k_0>0,\ q(x)\geq q_0>0\quad\forall x\in\langle 0,1\rangle$.

Pak $a(v,v)\geq\min\{k_0,q_0\}\cdot\|v\|_1^2$ pro $\forall v\in C^1(\langle 0,1\rangle)$

2) $a(u,v):=\int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,dx$ na $V:=\{v\in C^1(\langle 0,1\rangle): v(0)=0\}$.

$k(x)\geq k_0>0\quad\forall x\in\langle 0,1\rangle$

a) Pro důkaz V-eliptičnosti potřebujeme odhad $\int_0^1(v'(x))^2dx\geq \underset{>0}{c}\int_0^1 v^2$:

$$v(x)=\underbrace{v(0)}_{=0}+\int_0^x v'(z)\,dz$$

$$v^2(x)=\Big(\underbrace{\int_0^x 1\cdot v'(z)\,dz}_{(1,v')_0}\Big)^2\overset{C.-S.}{\leq}\underbrace{\int_0^x 1^2dx}_{x}\cdot\int_0^x(v'(z))^2dz$$

$$\int_0^1 v^2(x)dx\leq\int_0^1\Big(x^2\cdot\int_0^x(v'(z))^2dz\Big)dx\leq\frac{1}{2}\cdot\int_0^1(v'(x))^2dx$$

tzv. <u>Friedrichsova nerovnost</u>.

Výše uvedených pojmů nyní využijeme k důkazu spojité závislosti řešení (V) na vstupních datech.

$$(V)\begin{cases}\text{Hledáme } u(x)\in V:=\{v(x)\in C^1(\langle 0,1\rangle): v(0)=0\}+\hat{u}:\\ \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,dx=\int_0^1 f(x)v(x)dx+\hat{c}\,v(1)\quad\forall v\in V\end{cases}$$

<u>Věta</u>. Nechť u_1 řeší (V) se vstup. daty $f_1(x),\hat{c}_1,\hat{u}$ a nechť u_2 řeší (V) se vstup. daty $f_2(x),\hat{c}_2,\hat{u}$, pak $\exists C>0$ (nez. na $f_1,f_2,\hat{c}_1,\hat{c}_2$): $\|u_1-u_2\|_1\leq C\cdot(\|f_1-f_2\|_0+|\hat{c}_1-\hat{c}_2|)$.

<u>Důkaz</u>. Odečtením (V_1) a (V_2):

$$a(u_1-u_2,v) = \int_0^1 (f_1-f_2)v + (\hat{c}_1-\hat{c}_2)v(1) \quad \forall v\in V.$$

Jelikož $u_1-u_2\in V$, pak

$$a(u_1-u_2,u_1-u_2) \leq \int_0^1 (f_1-f_2)(u_1-u_2) \cancel{+(\hat{c}_1-\hat{c}_2)(u} + (\hat{c}_1-\hat{c}_2)(u_1(1)-u_2(1))$$

Z V-eliptičnosti $a(\cdot,\cdot)$ plyne:

$$m\|u_1-u_2\|_1 \leq \left|(f_1-f_2,u_1-u_2)_0 + (\hat{c}_1-\hat{c}_2)(u_1(1)-u_2(1))\right|$$

$$\leq \|f_1-f_2\|_0 \cdot \underbrace{\|u_1-u_2\|_0}_{\leq \|u_1-u_2\|_1} + |\hat{c}_1-\hat{c}_2|\cdot|u_1(1)-u_2(1)|$$

~~Z důležitého~~

A jelikož

$$\left.\begin{aligned} u_1(1) &= \hat{u} + \int_0^1 u_1'(z)\,dz \\ u_2(1) &= \hat{u} + \int_0^1 u_2'(z)\,dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow |u_1(1)-u_2(1)| = \underbrace{\left|\int_0^1 (u_1'(z)-u_2'(z))\right|}_{\leq |u_1-u_2|_1 \leq \|u_1-u_2\|_1}$$

Tj. $C := 1$

$\square$

NM2 – Vlastnosti var. formulace III

10. 3. '21

(24)

Existence řešení a úplnost

Mějme
- V .. vektorový prostor se skal. součinem
- $a: V\times V \to \mathbb{R}$ bilineární forma, která je symetrická, na V omezená a eliptická ($\Leftrightarrow$ poz. definitní)
- $b: V \to \mathbb{R}$ lineární forma, která je na V omezená.

Uvažujme úlohu

$$(V)\begin{cases} \text{Hledám } u \in V: \\ a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Už víme, že (V) je ekvivalentní (díky symetrii a poz. def.)

$$(E)\begin{cases} \text{Hledáme } u \in V: \\ J(u) \leq J(w) \quad \forall w \in V \end{cases}, \text{ kde } J(u) := \frac{1}{2}a(u,u) - b(u).$$

Existenci řešení úlohy (E) můžeme zkoumat takto:

- J je zdola omezený tj. $\exists \mu \in \mathbb{R}: \forall v \in V \; J(v) \geq \mu$

Důkaz. $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - b(v) \overset{\text{elip., omez. } b}{\geq} \frac{1}{2}m\|v\|_V^2 - B\|v\|_V$

$$\geq \min_{t \geq 0}\underbrace{\left\{\frac{1}{2}mt^2 - Bt\right\}}_{=:\varphi(t)} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{m} - \frac{B^2}{m} = -\frac{1}{2}\frac{B^2}{m} =: \mu$$

$\varphi'(t) = mt - B \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow t = \frac{B}{m}$

$\varphi''(t) = m > 0$ $\square$

- Existuje minimizující posloupnost $(v_i)_{i=1}^{\infty}$, ~~která je~~ ~~$\|v_i - \mu\| \to 0$~~ Cauchyovská tj. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall i,j \geq m: \|v_i - v_j\| \leq \varepsilon$

Důkaz. Zvolme v_i: $J(v_i) \leq \mu^* + 1/i$,

kde $\mu^* := \inf_{v \in V} J(v)$, které existuje díky větě o supre

$$m\|v_i - v_j\|^2 \leq a(v_i - v_j, v_i - v_j) = 2a(v_i, v_i) + 2a(v_j, v_j) - a(v_i + v_j, v_i + v_j)$$

$$= 4\left\{\underbrace{\tfrac{1}{2}a(v_i,v_i) - b(v_i)}_{J(v_i)}\right\} + 4\left\{\underbrace{\tfrac{1}{2}a(v_j,v_j) - b(v_j)}_{J(v_j)}\right\}$$ (25)

$$- 8\cdot\left\{\underbrace{\tfrac{1}{2}a\left(\tfrac{v_i+v_j}{2}, \tfrac{v_i+v_j}{2}\right) - b\left(\tfrac{v_i+v_j}{2}\right)}_{=J\left(\frac{v_i+v_j}{2}\right)}\right\}$$

$$\leq 4\underbrace{J(v_i)}_{\leq \mu^* + \frac{1}{i}} + 4\underbrace{J(v_j)}_{\leq \mu^* + \frac{1}{j}} - 8\mu^* \leq \frac{4}{i} + \frac{4}{j}$$

tj. $\|v_i - v_j\| \leq \sqrt{\frac{4}{m}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right)} \xrightarrow{i,j\to\infty} 0$ $\square$

- J je spojitý tj. $\|v_n - v\| \to 0 \Rightarrow |J(v_n) - J(v)| \to 0$

~~Důkaz~~

$$a(u-v, u-v) = a(u,u) + a(v,v) - 2a(u,v)$$

Cauchy-Sch.

$$\geq a(u,u) + a(v,v) - 2\sqrt{a(u,u)}\cdot\sqrt{a(v,v)}$$

$$= \left(\sqrt{a(u,u)} - \sqrt{a(v,v)}\right)^2 \qquad (*)$$

Díky tomu

$$|J(u) - J(v)| \leq \tfrac{1}{2}|a(u,u) - a(v,v)| + |\underbrace{b(u-v)}_{\leq B\cdot\|u-v\|}|$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\underbrace{\left|\sqrt{a(u,u)} + \sqrt{a(v,v)}\right|}_{\leq \sqrt{M}(\|u\|+\|v\|)}\cdot\underbrace{\left|\sqrt{a(u,u)} - \sqrt{a(v,v)}\right|}_{\leq \sqrt{a(u-v,u-v)} \leq \sqrt{M}\|u-v\|} + B\|u-v\|$$

$$\leq \underbrace{\left[\tfrac{1}{2}M\left(\|u\| + \|v\|\right) + B\right]}_{>0}\cdot\|u-v\|$$

Nyní stačí ukázat, že $\|v_n - v\| \to 0 \Rightarrow \|v_n\| \to \|v\|$

$$\|v_n - v\|^2 = \|v_n\|^2 - 2(v_n, v) + \|v\|^2 \overset{C.-S.}{\geq} \underbrace{\|v_n\|^2 - 2\|v_n\|\cdot\|v\| + \|v\|^2}_{= \left(\|v_n\|^2 - \|v\|^2\right)}$$ $\square$

NM2 – Vlastnosti var. formulace III

(10. 3. '2

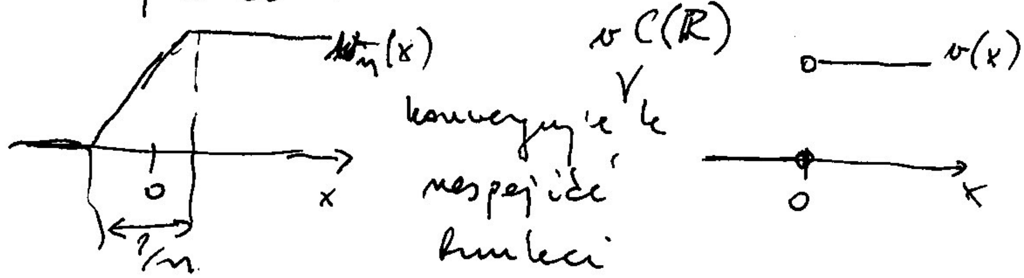
㉖

Máme tedy • Cauchyovskou posloupnost (u_n) : $J(u_n) \to \mu^* = \inf_{v \in V} J(v)$

• J je spojitý.

Aby existovala limita $u \in V$: $J(u) = \mu^*$,
(minimum)
musel by být prostor V úplný tj. každá cauchyovská posloupnost má limitu ve V.
To bohužel neplatí!

Např.



Prostory $C(\langle 0,1\rangle)$, $C^1(\langle 0,1\rangle)$ atd. musíme zúplnit ve vhodných normách. Dostaneme Sobolevovy prostory

- $L^2((0,1)) := \overline{C(\langle 0,1\rangle)}^{\|\cdot\|_0}$, kde $\|v\|_0 := \sqrt{\int_0^1 v^2(x)}$
- $H^1((0,1)) := \overline{C^1(\langle 0,1\rangle)}^{\|\cdot\|_1}$, kde $\|v\|_1 := \sqrt{\int_0^1 (v^2 + (v')^2)\,dx}$
- ~~V_n:~~
- $\boxed{V := \{ v \in H^1((0,1)) : v(0) = 0 \}}$ ... $\boxed{\text{Hilbertův prostor}}$

V tomto prostoru již má naše úloha jednoznačné řešení, které spojitě závisí na vstupních datech $f, \hat{c}$:

$$\boxed{(V) \begin{cases} \text{Hledám } u(x) \in V + \hat{u} =: U_D \\ \int_0^1 k(x)\, u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx + \hat{c}\, v(1) \ \forall v \end{cases}}$$

Výše uvedené shrnuje Lax-Milgramovo lemma

Věta. (Lax, Milgram)

- V, U ... Hilbertovy prostory, $V \subset U$
- $a : U \times U \to \mathbb{R}$ bilineární forma
  - omezená na U
  - V-eliptická s konstantou $m > 0$
- $b : V \to \mathbb{R}$ lineární forma
  - omezená na V s konstantou $B > 0$
- $\hat{u} \in U \Rightarrow V \subset U_D \subset U$
- ~~Hledáme $u \in U_D$: $a(u,v) = b(v)$ $\forall v \in V$~~

$\Rightarrow$ $\exists!\, u \in U_D$:
- $a(u,v) = b(v)$ $\forall v \in V$
- $\|u\| \leq \frac{B}{m}$

Pozn. Koncept úplnění prostorů se skalárním součinem na Hilbertovy prostory je stejný jako konstrukce reálných čísel z racionálních.

~~Neúplný~~,

Úplný prostor vytvoříme z tříd Cauchyovských posloupností tj. pomocí relace ekvivalence

$$[u_i] \sim [v_i] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall i,j \geq n_\varepsilon : \|u_i - v_i\| < \varepsilon$$

V prostoru $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ se pak funkce z dané třídy budou lišit v nejvýše spočetně mnoha bodech (na množině míry nula).