NM2 – Vlastnosti var. formulace II

2.3.'21

(18)

Var. formulace

$$(V)\begin{cases} \text{Hledám } u \in U_D := V + \hat{u} : \\ a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

kde
- $V \subset U$ jsou vekt. prostory ($\Rightarrow V \subset U_D \subset U$)
- $\hat{u} \in U$ afinní prostor
- $a : U \times U \to \mathbb{R}$ .. bilineární forma
- $b : U \to \mathbb{R}$ .. lineární forma (funkcionál)

Energetická formulace

$J : U \to \mathbb{R} \qquad J(w) := \frac{1}{2} a(w,w) - b(w)$ .. energetická forma (funkcionál)

$$(E)\begin{cases} \text{Hledáme } u \in U_D : \\ J(u) \leq J(w) \quad \forall w \in U_D \end{cases}$$

Věta. Je-li $a(.,.)$ navíc symetrická a nezáporná (poz. semidef.), pak:

$$u \text{ řeší } (V) \iff u \text{ řeší } (E).$$

Důkaz. „$\Rightarrow$" Nechť u řeší (V).

Vezměme $w \in U_D$, pak $v := w - u \in V$ a platí:

$$J(w) = J(u+v) = \frac{1}{2} a(u+v, u+v) - b(u+v)$$

$$\underset{(a \text{ bilin.}),\ (b \text{ lin.})}{=} \frac{1}{2} a(u,u) + \underbrace{\frac{1}{2} a(u,v) + \frac{1}{2} a(v,u)}_{\underset{(a \text{ sym.})}{=} a(u,v)} + \frac{1}{2} a(v,v) - b(u) - b(v)$$

$$= J(u) + \underbrace{a(u,v) - b(v)}_{\underset{(u \text{ řeší } (V))}{=} 0} + \underbrace{\frac{1}{2} a(v,v)}_{\underset{(a \text{ poz. def.})}{\geq} 0} \geq J(u)$$

„$\Leftarrow$": Nechť u řeší (E).

Vezměme lib. $v \in V$ a $t \in \mathbb{R}$.

u řeší (E) Definujme funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\varphi(t) := J(u+tv)$

$\Rightarrow$ • φ má minimum v $t=0$.

• $\varphi(u+tv) = \dots = \frac{1}{2} a(v,v) \cdot t^2 + (a(u,v) - b(v)) \cdot t + J(u)$ $\Rightarrow$

tj. $\varphi(t)$ je kvadrat. funkce

$$\Rightarrow \varphi'(0) = 0 \qquad \Rightarrow a(u,v) = b(v)$$

$$\varphi'(0) = \cancel{\tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot a(v,v) \cdot 0} + a(u,v) - b(v) + 0$$

$\square$

Budeme dále zkoumat spojitou závislost řešení $u(x)$ na vstupních datech f, $\hat{\tau}$, později též konvergenci přibližných řešení.

K tomu potřebujeme další pojmy z funkcionální analýzy (lineární algebry).

• Skalární součin $(u,v) : U \times U \to \mathbb{R}$

Př. $a(u,v) := \int_0^1 k(x)\, u'(x) v'(x)\, dx$ na prostoru

$V := \{ v(x) \in C^1(\langle 0,1 \rangle) : v(0) = 0 \}$

• Norma $\|\cdot\| : U \to \mathbb{R}$ (i) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$

(iii) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Δ-nerovnost)

• Norma indukovaná skal. součinem

$\|u\| := \sqrt{(u,u)}$ Cvičení. Ověřte (i), (ii), (iii).

Cauchy-Schwartzova nerovnost: $|(u,v)| \leq \sqrt{(u,u)} \cdot \sqrt{(v,v)}$

Důkaz. $0 \leq (u+tv, u+tv) = t^2 (v,v) + 2t(u,v) + (u,u) \Rightarrow 4(u,v)^2 - 4(u,u)(v,v) \leq 0$ $\square$

NM2 – Vlastnosti var. formulace II

2.3.'21

(20)

Na prostorech funkcí budeme používat následující normy (důkazy cvičením):

$$\|u\|_\infty := \max_{x\in\Omega} |u(x)| \qquad \Omega := \langle 0,1\rangle$$

$$\|u\|_{0,1} := \int_0^1 |u(x)|\,dx$$

$$\|u\|_{0,p} := \left(\int_0^1 |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad \text{pro } 1<p<\infty$$

přičemž norma $\|u\|_{0,2}$ ~~je tuto~~ $=: \|u\|_0$ je indukována skalárním součinem:

$$(u,v)_0 := \int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx.$$

Zatím stačilo, aby funkce u, v byly (po částech) spojité. Budou-li navíc po částech ~~d~~spojitě diferencovatelné a (globálně) spojité, definujeme další ~~sadu~~ normu

$$\|u\|_1 := \sqrt{\int_0^1 \left[u^2(x) + (u'(x))^2\right] dx},$$

která je indukovaná skalárním součinem

$$(u,v)_1 := (u,v)_0 + (u',v')_0.$$

Člen $|u|_1 := \sqrt{(u',u')_1}$ říkáme semi-norma, nesplňuje $|u|_1 = 0 \Rightarrow u = 0$, viz $1' = 0$.

Nyní si zavedeme pojmy, které představují smysl v lineární algebře (v konečné dimenzi),

ale jsou důležité zvl. pro prostory funkcí (nekonečná dimenze, funkcionální analýza)

• <u>Omezenost lineárního funkcionálu</u> $b: U \to \mathbb{R}$

$\exists B > 0 \ \forall u \in U: |b(u)| \leq B \cdot \|u\|$ vzhledem k normě $\|\cdot\|$.

např. 1) $b(v) := \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \overset{f \text{ spoj.}}{\leq} (f, v)_0 \overset{\text{Cauchy-Schw.}}{\leq} \underbrace{\|f\|_0}_{=B} \cdot \underbrace{\|v\|_0}_{\leq \|v\|_1}$

tj. b je omezený na $C^1(\langle 0,1\rangle)$ vzhledem k normě $\|u\|_1 := \sqrt{\int_0^1 u^2(x)\,dx + \int_0^1 (u'(x))^2\,dx}$

2) $b(v) := \int_0^1 f(x)\, v(x) + \hat{\tau}\, v(1)$ je omezený na $V := \{v \in C^1(\langle 0,1\rangle) : v(0) = 0\}$ v normě $\|v\|_1$.

<u>Důkaz</u>. $|v(1)| \leq \underbrace{v(0)}_{=0} + \left|\underbrace{\int_0^1 1 \cdot v'(z)\, dz}_{(1, v')_0}\right| \overset{\text{C.-S.}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\int_0^1 1^2}}_{=1} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_0^1 (v'(z))^2\, dz}}_{= |v|_1 \leq \|v\|_1}$

$|b(v)| \leq \|f\|_0 \cdot \|v\|_1 + |\hat{\tau}| \|v\|_1 = \underbrace{(\|f\|_0 + |\hat{\tau}|)}_{= B} \cdot \|v\|_1$

Připomeňme, že $\langle \delta_1, v \rangle = v(1)$ je Diracův delta funkcionál (bodový zdroj tepla, bodová síla).

• <u>Omezenost bilineární formy</u> $a: U \times U \to \mathbb{R}$ <u>v normě</u> $\|\cdot\|$

$\exists M > 0 \ \forall u, v \in U: |a(u,v)| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\|$

např. $\left|\underbrace{\int_0^1 k(x)\, u'(x)\, v'(x)}_{= a(u,v)}\right| \leq \max_{x \in \langle 0,1\rangle} |k(x)| \cdot \underbrace{\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx}_{= (u', v')_0}$

$\overset{\text{C.-S.}}{\leq} \max_{x \in \langle 0,1\rangle} |k(x)| \cdot \underbrace{|u|_1}_{\leq \|u\|_1} \cdot \underbrace{|v|_1}_{\leq \|v\|_1}$

<u>Poznámka</u>. Pro lineární (bilineární) formu je omezenost ekvivalentní se spojitostí.

NM2 – Vlastnosti var. formulace II

2.3.'21

(22)

• <u>V-eliptičnost</u> bilineární formy $a: V\times V \to \mathbb{R}$

$$\exists m>0 \ \forall v\in V: \ a(v,v) \geq m\cdot \|v\|^2$$

např. 1) $a(u,v) := \int_0^1 \left(k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)\right)dx$

kde $k(x)\geq k_0>0$, $q(x)\geq q_0>0 \quad \forall x\in\langle 0,1\rangle$.

Pak $a(v,v)\geq \min\{k_0,q_0\}\cdot \|v\|_1^2$ pro $\forall v\in C^1(\langle 0,1\rangle)$

2) $a(u,v) := \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,dx$ na $V := \{v\in C^1(\langle 0,1\rangle): v(0)=0\}$

$k(x)\geq k_0>0 \quad \forall x\in\langle 0,1\rangle$

a) Pro důkaz V-eliptičnosti potřebujeme odhad $\int_0^1 (v'(x))^2dx \geq \underset{>0}{c}\int_0^1 v^2$:

$$v(x) = \overset{=0}{v(0)} + \int_0^x v'(z)\,dz$$

$$v^2(x) = \Big(\underbrace{\int_0^x 1\cdot v'(z)\,dz}_{(1,v')_0}\Big)^2 \overset{C.-S.}{\leq} \underbrace{\int_0^x 1^2dx}_{x} \cdot \int_0^x (v'(z))^2dz$$

$$\int_0^1 v^2(x)dx \leq \int_0^1\Big(x^2\cdot\int_0^x (v'(z))^2dz\Big)dx \leq \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 (v'(x))^2dx$$

tzv. <u>Friedrichsova nerovnost</u>.

Výše uvedených pojmů nyní využijeme k důkazu spojité závislosti řešení (V) na vstupních datech.

$$(V)\begin{cases} \text{Hledáme } u(x)\in V := \{v(x)\in C^1(\langle 0,1\rangle): v(0)=0\} + \hat{u}: \\ \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \hat{\tau}\,v(1) \quad \forall v\in V \end{cases}$$

<u>Věta</u>. Nechť u_1 řeší (V) se vstup. daty $f_1(x), \hat{\tau}_1, \hat{u}$ a nechť u_2 řeší (V) se vstup. daty $f_2(x), \hat{\tau}_2, \hat{u}$, pak $\exists C>0$ (nez. na $f_1, f_2, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2$): $\|u_1-u_2\|_1 \leq C\cdot\left(\|f_1-f_2\|_0 + |\hat{\tau}_1-\hat{\tau}_2|\right)$.

<u>Důkaz</u>. Odečtením (V_1) a (V_2):

$$a(u_1-u_2,v) = \int_0^1 (f_1-f_2)v + (\hat{c}_1-\hat{c}_2)v(1) \quad \forall v\in V.$$

Jelikož $u_1-u_2\in V$, pak

$$a(u_1-u_2,u_1-u_2) \leq \int_0^1 (f_1-f_2)(u_1-u_2) \cancel{+(\hat{c}_1-\hat{c}_2)(u} + (\hat{c}_1-\hat{c}_2)(u_1(1)-u_2(1))$$

Z V-elipticity $a(\cdot,\cdot)$ plyne:

$$m\|u_1-u_2\|_1 \leq \left|(f_1-f_2,u_1-u_2)_0 + (\hat{c}_1-\hat{c}_2)(u_1(1)-u_2(1))\right|$$

$$\leq \|f_1-f_2\|_0 \cdot \underbrace{\|u_1-u_2\|_0}_{\leq \|u_1-u_2\|_1} + |\hat{c}_1-\hat{c}_2|\cdot|u_1(1)-u_2(1)|$$

~~Z důležitého~~

A jelikož

$$\left.\begin{aligned} u_1(1) &= \hat{u} + \int_0^1 u_1'(z)\,dz \\ u_2(1) &= \hat{u} + \int_0^1 u_2'(z)\,dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow |u_1(1)-u_2(1)| = \underbrace{\left|\int_0^1 (u_1'(z)-u_2'(z))\right|}_{\leq |u_1-u_2|_1 \leq \|u_1-u_2\|_1}$$

Tj. $C := 1$

$\square$