NM2 – Variační formulace a MKP

(16.2.'21)

(6)

Uvažujme okrajovou úlohu

$$(P)\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ -u'(1) = 1 \end{cases}$$

Tato úloha má (analytické) řešení $\underline{\underline{u(x) = -\frac{1}{2}x^2}}$.

Silná variační formulace a MKP

Diferenciální rovnici můžeme v úloze (P) zeslabit a chápat ji v integrálních průměrech:

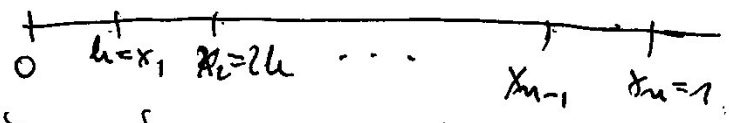
$$\int_0^1 -u''(x)\,v(x)\,dx = \int_0^1 1\,v(x)\,dx, \qquad (1)$$

kde za tzv. testovací, nebo též váhovou funkci $v(x)$ postupně volíme všechny „rozumné" integrovatelné funkce. Přesné znění naší nové formulace je toto:

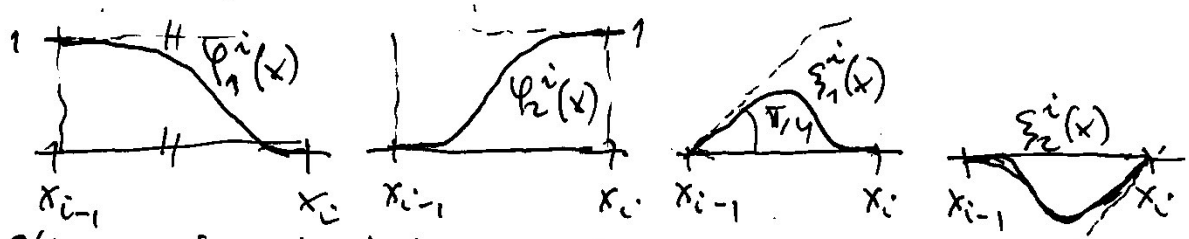
$$(S)\begin{cases} \text{Hledáme } u(x) \in H^2((0,1)) : u(0) = 0,\ -u'(1) = 1 \text{ a} \\ \int_0^1 -u''(x)\,v(x)\,dx = \int_0^1 1\,v(x)\,dx \quad \forall v(x) \in L^2((0,1)), \end{cases}$$

kde $H^2((0,1))$ je prostor funkcí, které jsou spolu se svou první i druhou derivací „rozumně" integrovatelné, přičemž derivace jsou ~~v tzv. sm~~ chápány v tzv. smyslu distribucí. $L^2((0,1))$ je onen prostor „rozumně" integrov. funkcí.

Nyní budeme chtít úlohu (S) řešit přibližně <u>metodou konečných prvků</u>.
Základem je rozdělení $\langle 0,1\rangle$ do n dílků délky $h = 1/n$



Řešení $u(x)$ budeme aproximovat funkcí $u^h(x)$ z konečně-dimensionálního prostoru spojitě-diferencovatelných splajnů. Hodí se k tomu po částech kubické bázové funkce, které reprezentují (skrz souřadnice) hodnoty $u^h(x_i)$ ~~v uzlech~~ a $u^{h\prime}(x_i)$ v uzlech sítě. Na každém prvku (úsečce) i se bázové funkce poskládají z následujících tvarových funkcí:



Okrajové podmínky zavedeme volbou příslušných souřadnic.

$$(S^h)\begin{cases} \text{Hledáme } u^h(x) = \sum_{j=0}^{m}\left(u_j\varphi_j(x) + u_j'\xi_j(x)\right) : u_0 = 0,\ u_m' = -1 \text{ a} \\ \int_0^1 -u^{h\prime\prime}(x)\,\psi_i(x)\,dx = \int_0^1 1\,\psi_i(x)\,dx,\ \forall i \in \{1,\dots,2m\}, \end{cases}$$

kde $\psi_i(x)$ tvoří libovolné nezávislé splajny nepř. to jsou Legendreovy polynomy stupně 0 a 1 ~~na~~ každém dílčím.

(S^h) je soustava $2n$ lineárních rovnic o $2n$ neznámých. Je regulární, což se dokazuje tzv. diskrétní inf-sup podmínkou.

(Slabá) variační formulace a MKP

Proveďme na levé straně (1) integraci per partes.

$$+\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \underbrace{\left[u'(x)\,v(x)\right]_{x=0}^{x=1}}_{\underbrace{u'(1)}_{=-1}v(1) - u'(0)\underbrace{v(0)}_{:\overset{def}{=}0}} = \int_0^1 1\,v(x)\,dx \qquad (2)$$

Neumannovu okrajovou podmínku splníme v tzv. slabém smyslu (implicitně), zatímco Dirichletovu okrajovou podmínku budeme vyžadovat explicitně. Navíc ~~potom~~ položíme $v(0) := 0$, čímž se „zbavíme" i druhého členu na hranici $\{0,1\}$. Dostáváme formulaci:

$$(V)\begin{cases} \text{Hledáme } u(x) \in H^1((0,1)) : u(0) = 0 \text{ a} \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 1\,v(x)\,dx - 1\,v(1) \quad \forall v(x) \in H^1((0,1)),\ v(0)=0 \end{cases}$$

Tato formulace je symetrická a, jak brzy uvidíme, vede na pozitivně definitní soustavy lin. rovnic. Proto pro nás bude hlavním východiskem. $H^1((0,1))$ značí prostor funkcí, které jsou se svou první

derivací „rozumně" integrovatelné.
Nepotřebujeme už spojitost ani integrovatelnost druhých derivací. Další výhodou je snadné zakomponování podmínek přechodu.
Konečně se ukáže, že (V) jsou podmínky nutné pro následující (energetickou) formulaci:

$$(E)\begin{cases} \text{Hledáme } u(x) \in H^1((0,1)) : u(0)=0 \text{ a} \\ J(u(x)) \leq J(w(x)) \quad \forall w(x) \in H^1((0,1)) : w(0)=0 \end{cases}$$

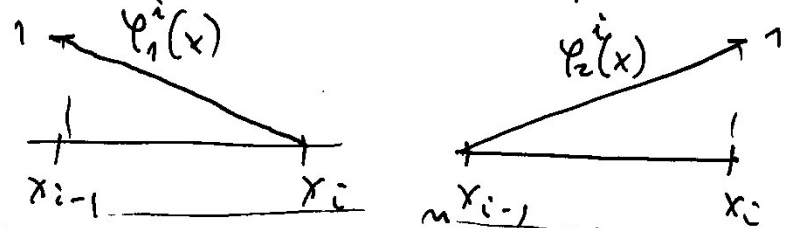
kde $J(w) := -\frac{1}{2}\int_0^1 w'(x)^2\,dx - \left(\int_0^1 w(x)\,dx - 1\,w(1)\right)$

Formulace (V) nemá vzhledem k (E) nic jiného, než „variace" funkcionálu J

$$J'(u(x))(v(x)) = 0 \quad \forall v(x) \in H^1((0,1)) : v(0)=0,$$

proto úlohám říkáme variační.

V <u>metodě konečných prvků</u> nyní stačí brát spojité po částech diferencovatelné splajny resp. lineární. Ty se skládají z následujících tvarových funkcí:



$$(V^h)\begin{cases} \text{Hledáme } u^h(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j \varphi_j(x) : u_0 = 0 \text{ a} \\ \int_0^1 u^{h\prime}(x)\,\varphi_i'(x)\,dx = \int_0^1 \varphi_i(x)\,dx - 1\,\varphi_i(1) \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\} \end{cases}$$

NM2 – Variační formulace a MKP

16.2.'21

Ultra-slabá variační formulace a MKP

Proveďme na levé straně (2) ještě jednu integraci per-partes:

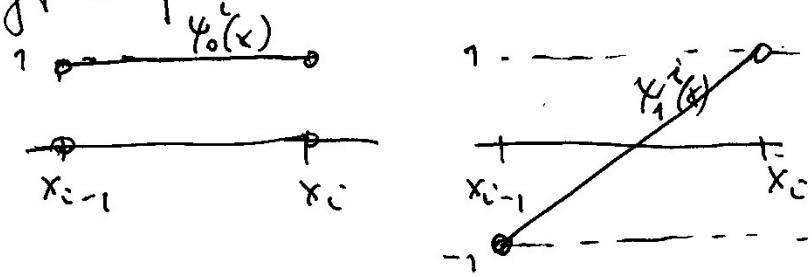
$$-\int_0^1 u(x)\,v''(x)\,dx + \underbrace{\left[u(x)\,v'(x)\right]_{x=0}^{x=1}}_{=u(1)\underbrace{v'(1)}_{:=0}-\underbrace{u(0)}_{=0}v'(0)} = \int_0^1 1\,v(x)\,dx - 1\,v(1)$$

Nyní v Dirichletovu okr. podmínku předepíšeme slabě a, abychom se zbavili i členu $u(1)v'(1)$, položme $v'(1) := 0$. Dostáváme formulaci:

$$(4)\begin{cases} \text{Hledáme } u(x) \in L^2((0,1)): \\ -\int_0^1 u(x)\,v''(x)\,dx = \int_0^1 1\,v(x)\,dx - 1\,v(1) \quad \forall v(x) \in H^2((0,1)), \\ \qquad\qquad v(0)=0 \text{ a } v'(1)=0 \end{cases}$$

Výhodou této formulace je, že můžeme dále zobecňovat funkci $f(x)$. ~~Řešení~~ Úloha může popisovat např. rázové vlny. Formulace (4) má blízko k nespojitým Galerkinovým metodám a např. k metodě konečných objemů. (4) je podobná (5) s tím, že přecházíme v MKP bázové funkce $\varphi_i(x)$, $\xi_i(x)$ popisující stavový za bázové funkce $\psi_i(x)$. Tvarové funkce pro stavový

vypadají třeba:



Metoda konečných prvků vede na soustavu lineárních rovnic daných formulací

$$
(U^h)\begin{cases}
\text{Hledáme } u^h(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(u_j \varphi_0^j(x) + \Delta_j \varphi_1^j(x)\right): \\
-\int_0^1 u^h(x)\,\varphi_i''(x)\,dx = \int_0^1 \varphi_i(x)\,dx - 1\,\varphi_i(1) \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \\
-\int_0^1 u^h(x)\,\xi_i''(x)\,dx = \int_0^1 \xi_i(x)\,dx - 1\,\xi_i(1) \quad \forall i \in \{0,\dots,n-1\}
\end{cases}
$$