NM2 – Smíšená variační formulace a MKP

27.4.'21

(56)

Uvažujme 1d model vedení tepla jako okr. úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu:

$$
(P)\begin{cases}
\frac{1}{k(x)}\,\tau(x) + u'(x) = 0, & x\in(0,1) \quad \text{(Four. zákon)}\\
\tau'(x) = f(x), & x\in(0,1) \quad \text{(bilance tepla)}\\
u(0) = \hat{u} & \text{(Dirichl. podm.)}\\
\tau(1) = \hat{\tau} & \text{(Neum. podm.)}
\end{cases}
$$

Přenásobme F. z. test. funkcí $\xi\in H^1(0,1)$: $\xi(1)=0$ a zintegrujme:

$$
\int_0^1 \frac{1}{k(x)}\,\tau(x)\,\xi(x)\,dx + \underbrace{\int_0^1 u'(x)\,\xi(x)\,dx}_{\overset{\text{per-partes}}{=}\; -\int_0^1 u(x)\,\xi'(x)\,dx + u(1)\underbrace{\xi(1)}_{=0} - \hat{u}\,\xi(0)} = 0
$$

Přenásobme bilanční rovnici jinou test. funkcí $v\in L^2(0,1)$ a zintegrujme. Dostáváme <u>smíšenou variační formulaci</u> úlohy (P)

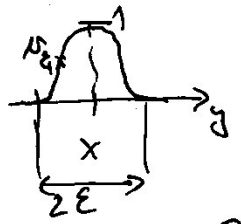
$$
(V)\begin{cases}
\text{Hledáme } \tau\in\Sigma_{\hat{\tau}} := \{\xi\in H^1(0,1) : \tau(1)=\hat{\tau}\},\ u\in L^2(0,1) =: V:\\
\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{k(x)}\,\tau(x)\,\xi(x)\,dx}_{=:\,a(\tau,\xi)} \underbrace{- \int_0^1 u(x)\,\xi'(x)\,dx}_{=:\,b(u,\xi)} = \underbrace{\hat{u}\,\xi(0)}_{=:\,g(\xi)} \quad \forall \xi\in\Sigma_0\\
\underbrace{-\int_0^1 \tau'(x)\,v(x)\,dx}_{=\,b(v,\tau)} \qquad \underbrace{= -\int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx}_{=:\,f(v)} \quad \forall v\in V
\end{cases}
$$

Platí tedy, že (τ, u) řeší $(P) \Rightarrow (\tau, u)$ řeší (V).

Je-li navíc $\tau \in C^1(\langle 0,1\rangle)$, $u \in C^2(\langle 0,1\rangle)$, pak:

(τ, u) řeší $(V) \Rightarrow (\tau, u)$ řeší (P).

<u>Důkaz</u>. 1) Pro lib. $x \in (0,1)$ zvolíme posloupnost $(v_{\varepsilon,x}(y))_{\varepsilon>0} \in C^\infty$



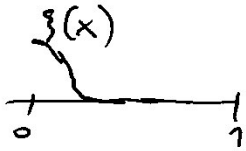
a z Lagrangeovy věty o stř. hodnotě:

$\exists\, y_1, y_2 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$: $\tau'(y_1)\, v(y_1) \cdot \cancel{2\varepsilon} = f(y_2)\, v(y_2) \cdot \cancel{2\varepsilon}$

Pro $\varepsilon \to 0_+$: $\tau'(x) = f(x)$

2) Podobně $\frac{1}{k(x)}\tau(x) + u'(x) = 0$

3) Nyní pro lib. derivovatelnou funkci $\xi(x)$:



$u(0) = \hat{u}$ $\square$

Homogenizujeme $\Sigma_{\hat{\tau}}$:

$$(V)\begin{cases} \text{Hledáme } (\tau_H, u) \in \Sigma_0 \times V: \\ a(\tau_H, \xi) + b(u, \xi) = g(\xi) - \overbrace{a(\hat{\tau}, \xi)}^{=\hat{\tau}\int_0^1 \frac{1}{k}\xi} & \forall \xi \in \Sigma_0 \\ b(v, \tau_H) = f(v) - \underbrace{b(v, \hat{\tau})}_{=-\int_0^1 \underbrace{\hat{\tau}'}_{=0} v} & \forall v \in V \end{cases}$$

Úloha má <u>sedlo-bodovou strukturu</u>:

<u>Věta</u>.

- Σ_0, Σ, V .. Hilbert. prostory
- $a: \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ ~~sesquilin~~ bilin. forma
  - omezená
  - symetrická
  - pozitivně semidef. ~~na Σ~~
- $b: V \times \Sigma \to \mathbb{R}$ .. sesquilin. forma
  - omezená
- $\hat{\tau} \in \Sigma$ $(\Rightarrow \Sigma_0 \subset \Sigma_{\hat{\tau}} := \Sigma + \hat{\tau} \subset \Sigma)$
- $g \in (\Sigma_0)^*$
- $f \in V^*$

$\Rightarrow$ $(\tau_H, u) \in \Sigma_0 \times V$ řeší (V)

$\Updownarrow$

$$\boxed{L(\tau_H, \xi) \le L(\tau_H, u) \le L(\xi, u) \quad \forall (\xi, u) \in \Sigma_0 \times V,}$$

kde L je Lagrang. funkcionál

$$L(\xi, u) := \tfrac{1}{2}a(\xi,\xi) - [g(\xi) - a(\hat{\tau}, \xi)] + b(v, \xi) - [f(v) - b(v, \hat{\tau})]$$

NM2 – Smíšená var. formulace a MKP

28.4.'21

(58)

Věta. (~~existence~~, jednoznačnost, stabilita)

- $\Sigma_0 \subset \Sigma$, V .. Hilb. (stačí Banach.) pr.
- $a: \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ .. bilin. forma
  - omezená s konst. $C_A > 0$
  - ~~Σ_0 elipt~~
  - $\operatorname{Ker} B$ - eliptická s konst. $c_A > 0$

  kde $\operatorname{Ker} B := \{\xi \in \Sigma_0 : b(v, \xi) = 0 \ \forall v \in V\}$
- $b: V \times \Sigma \to \mathbb{R}$ .. sesquilin. forma
  - omezená s konst. $C_B > 0$
  - inf-sup stabilní

$$\boxed{\exists c_B > 0 \ \forall \xi \in \Sigma_0 : \sup_{\substack{v \in V \\ \neq 0}} \frac{b(v, \xi)}{\|v\|_V} \geq c_s \|\xi\|_\Sigma}$$

- $\hat{\tau} \in \Sigma$, $g \in (\Sigma_0)^*$, $f \in V^*$
- existuje $(\tau_H, u) \in \Sigma_0 \times V$ řešení (V)

$\Rightarrow$

- (τ_H, u) je jediné řešení (V)
- $\|\tau_H\|_\Sigma \leq \frac{1}{c_A} \|G\|_{\Sigma_0^*} + \left(1 + \frac{C_A}{c_A}\right) C_B \|F\|_{V^*}$
- $\|u\|_V \leq \frac{1}{c_B} \left(1 + \frac{C_A}{c_A}\right) \times \left\{ \|G\|_{\Sigma_0^*} + C_B C_A \|F\|_{V^*} \right\}$

kde $G(\xi) := g(\xi) - a(\hat{\tau}, \xi)$,
$F(v) := f(v) - b(\hat{\tau}, v)$

Ověříme $\operatorname{Ker} B$-eliptičnost bilineární formy a:

- $\operatorname{Ker} B := \left\{ \xi \in \Sigma_0 : \int_0^1 v \xi' = 0 \ \forall v \in L^2(0,1) \right\} = \{0\}$
- $a(\tau, \tau) = \int_0^1 \frac{1}{k} \tau^2 \geq \underbrace{\frac{1}{\|k\|_{L^\infty(\Omega)}}}_{=: c_A} \cdot \|\tau\|_\Sigma^2$

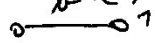
Ověříme inf-sup stabilitu b:

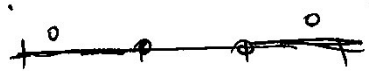
$$\xi \in \Sigma_0 : \sup_{\substack{v \in L^2 \\ \neq 0}} \frac{b(v, \xi)}{\|v\|_{L^2}} \overset{v := \xi'}{\geq} \frac{\int_0^1 (\xi')^2}{\sqrt{\int_0^1 (\xi')^2}} = \|\xi'\|_{H^1(0,1)} \overset{\text{Poincaré}}{\geq} c_B \|\xi\|_{H^1(0,1)}$$

Smíšená MKP

Prostor $\Sigma := H^1(0,1)$ aproximujeme Σ^h spojitými po částech lin. funkcemi.

Prostor $V := L^2(0,1)$ aproximujeme V^h (nespojitými) po částech konst. funkcemi.





- ~~Ker~~ B^h-eliptícita se předí, neboť
  - $\operatorname{Ker} B^h := \{\xi^h \in \Sigma_0^h : \int_0^1 v^h (\xi^h)' = 0 \ \forall v^h \in V^h\} = \{0\}$.
- Inf-sup stabilita se ale musí ověřit znovu, což naštěstí v tomto případě je analogie: $v^h := (\xi^h)'$.

Za předpokladu existence řešení (pravá strana musí být v oboru hodnot ~~operátoru~~ na levé straně), máme tedy zaručenu ~~existen~~ jednoznačnost a stabilitu MKP-aproximací.

<u>Věta</u>. (<u>konvergence</u>, lemma Céaova typu)

Nechť $\Sigma_0^h \subset \Sigma_0$, $V^h \subset V$ jsou konečně-dimenzionální podprostory a nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty pro úlohu (V) i její MKP-aproximace (V^h). Pak $\exists C > 0 \ \forall h > 0$:

$$\|\tau_H - \tau_H^h\|_\Sigma + \|u - u^h\|_V \leq C \cdot \left\{ \inf_{\xi^h \in \Sigma_0^h} \|\tau_H - \xi^h\|_\Sigma + \inf_{v^h \in V^h} \|u - v^h\|_V \right\}.$$

NM2 – Smíšená var. formulace a MKP

(V^h) je ekviv. soustavě lin. rovnic

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}^T \\ \mathbb{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_H \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{A}} \\ \hat{\mathbb{B}} \end{bmatrix} \cdot \hat{\tau}}$$

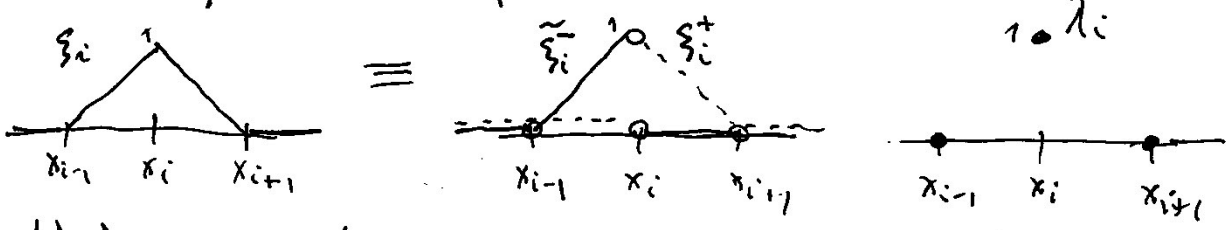
kde $\tilde{\mathbb{A}} = \begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & \times \\ 1 & \\ \vdots & \hat{\mathbb{A}} \quad \mathbb{A} \\ n & \end{array}$, $\tilde{\mathbb{B}} = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \cdots n \\ \hline 1 & & \\ \vdots & \hat{\mathbb{B}} & \mathbb{B} \\ m & & \end{array}$ atd.

Lokální matice jsou tyto:

$$\mathbb{A}^e := \frac{h}{k^e} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}^e := [-1, 1] \quad \text{viz} \int_{x_i}^{x_i+h} 1 \cdot \xi_i' \, (x) \, dx$$

Hybridizace

Spojitost $\xi^h \in \Sigma_0^h$ můžeme realizovat pomocí Lagrangeových multiplikátorů $\bar{\lambda}$



Dostáváme soustavu:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{A}} & \tilde{\mathbb{B}}^T & \mathbb{C}^T \\ \tilde{\mathbb{B}} & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_H \\ \bar{u} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \dots \quad \text{kde} \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

je tzv. matice lepení.

Po eliminaci $\tilde{\sigma}_H$ dostáváme soustavu s symetrickou pozitivně-definitní maticí, kterou lze dokonce také sestavit z lokálních příspěvků.

$$\boxed{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{B}} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbb{A}}^{-1} \cdot \left[\tilde{\mathbb{B}}^T, \mathbb{C}^T\right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \dots}$$

$\bar{\lambda}$ má fyzikální význam teploty v uzlech sítě.