NM2 - Matematické modelování

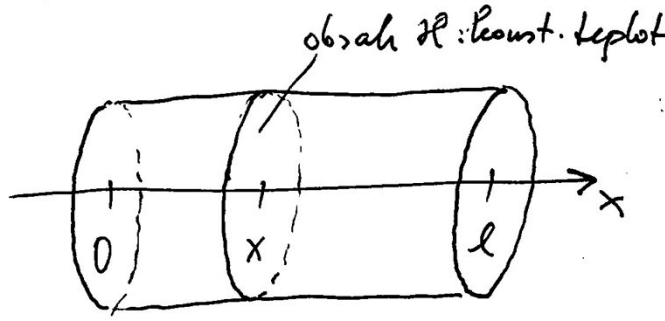
(9.2.'21)

Matematický model zahrnuje
- (fyzikální) veličiny
- a vztahy mezi nimi

popisující např. nějaké fyzikální pole či technické zařízení.

V mat. modelování rozlišujeme několik typů chyb:
- chyba modelování např. zanedbáním některých zákonů (jevů) nebo zjednodušením např. materiálových (konstitutivních) vztahů z nelineárních na lineární,
- chyba diskretizace např. chyba aproximace, metodou konečných prvků, kterou se budeme v tomto předmětu zabývat
- chyba numerické metody (např. metoda sdružených gradientů), zaokrouhlovací chyby.

Mat. model 1d vedení tepla (stacionární)



Veličiny – teplota $u(x)$

– teplotní „spád" $\varepsilon(x) = u'(x)$

– tepelný tok $\tau(x)$ ve směru osy x

Zákony: – Fourierův zákon (mater. zákon)

$$\boxed{\tau(x) = -k(x)\cdot\varepsilon(x)}$$

kde $k = k(x) > 0$ je koeficient tepelné vodivosti

– Zákon zachování tepla

$\forall x > 0\ \forall h > 0 : \langle x, x+h\rangle \subset (0,l)$

$$\boxed{\underbrace{-\mathcal{H}\,\tau(x) + \mathcal{H}\,\tau(x+h)}_{\text{teplo vycházející z části tyče } \langle x,x+h\rangle} = \underbrace{\int_x^{x+h} \mathcal{H} f(\xi)\,d\xi}_{\text{teplo vzniklé v tyči}}}$$ (tepelná bilance)

kde f je ~~hustota~~ tepelná hustota.

Je-li f spojitá, pak z Lagr. věty o stř. hod.:

$$\exists y_{x,h} \in (x, x+h) : \int_x^{x+h} \mathcal{H} f(\xi)\,d\xi = \mathcal{H} f(y_{x,h})\cdot h$$

Je-li navíc $\tau(x)$ spojitě diferencovatelná, lze pak tepelnou bilanci napsat jako diferenciální rovnici:

$$\boxed{\tau'(x) = f(x), \quad x \in (0,l)}$$

- okrajové podmínky

• Na levém konci tyče je udržována teplota $\hat{u}$.

$\boxed{u(0) = \hat{u}}$ (Dirichletova okrajová podmínka)

• Na pravém konci je dán tepelný tok $\hat{\tau}$.

$\boxed{\tau(\ell) = \hat{\tau}}$ (Neumannova okrajová podmínka)

Dostáváme okrajovou úlohu vedení tepla:

$$(P_1)\begin{cases} -(k(x)u'(x))' = f(x), & x \in (0,\ell) \\ u(0) = \hat{u} \\ -k(\ell)u'(\ell) = \hat{\tau} \end{cases}$$

Realističtější okrajové podmínky popisují přestup tepla; tzv. Robinovy (Newtonovy) okraj. podmínky

$$\underbrace{-k(0)u'(0)}_{=\tau(0)} = \alpha \cdot \underbrace{(\hat{u} - u(0))}_{>0,\ \text{pokud jde teplo ve směru } +x}$$

$$\underbrace{-k(\ell)u'(\ell)}_{=\tau(\ell)} = \alpha \cdot (u(\ell) - \hat{u})$$

kde $\alpha > 0$ je koeficient přestupu tepla.

Uvažujeme-li také přestup tepla plášťem, bilanční rovnice se změní takto:

$$-\mathcal{H}\,\tau(x) + \mathcal{H}\,\tau(x+h) + \underbrace{2\pi R}_{\text{obvod } \omega}\,\alpha \int_x^{x+h} (u(\xi) - \hat{u})\,d\xi = \int_x^{x+h} \mathcal{H} f(\xi)\,d\xi$$

a dostáváme okrajovou úlohu:

$$(P_2)\begin{cases} -\left(k(x)u'(x)\right)' + \underbrace{\frac{\alpha\omega}{\varkappa}}_{=:k_0} u(x) = f(x) + k_0\hat{u}, \; x\in(0,l) \\ \alpha u(0) - k(0)u'(0) = \alpha\hat{u} \\ -\alpha u(l) - k(l)u'(l) = -\alpha\hat{u} \end{cases}$$

Poznamenejme, že přestup tepla pláštěm není v souladu s předpokladem konstantní teploty v průřezu, viz chyby modelu.

Představme si dále, že tyč představuje taveninu, která se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí $p\in\mathbb{R}$. Do bilanční rovnice se přidá člen tzv. konvekce

$$c\rho\varkappa\, p\cdot\left(u(x+h)-u(x)\right),$$

kde c je měrné teplo a ρ je hustota taveniny. Diferenciální rovnice se změní takto:

$$(P_3)\begin{cases} -\left(k(x)u'(x)\right)' + c\rho p\, u'(x) + k_0 u(x) = f(x) + k_0\hat{u}, \\ \qquad + \text{okr. podmínky} \qquad\qquad x\in(0,l) \end{cases}$$

Nelineární materiálový model (např. nelin. Four. z.)

Koeficienty materiálu mohou záviset na řešení ~~např~~ např. $k = k(x, u(x))$

$$\boxed{\mathcal{Q}(x) = -k(x,u(x))\cdot\mathcal{E}(x)} \rightsquigarrow \begin{cases} -(k(u)u)' = f \\ + \text{okr. p.} \end{cases}$$

NM2 – Mat. modelování

Heterogenní materiál, podmínky přechodu

Uvažujme tyč složenou ze dvou materiálů

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & x \in (0,a) \\ k_2, & x \in (a,\ell) \end{cases}, \quad k_1 \neq k_2 \; ; \; k_1, k_2 > 0$$

Mat. model (P_1) pak bude složen ze dvou:

$$(P_4^a) \begin{cases} -k_1 u_1''(x) = f(x), & x \in (0,a) \\ u_1(0) = \hat{u} \\ -k_2 u_2''(x) = f(x), & x \in (a,\ell) \\ -k_2 u_2'(\ell) = \hat{\tau} \end{cases}$$

Tento model musí být doplněn o tzv. podmínky přechodu:

$$(P_4^b) \begin{cases} \text{- spojitost } u: & \boxed{u_1(a) = u_2(a)} \\ \text{- spojitost } \tau: & \boxed{-k_1 u_1'(a_-) = -k_2 u_2'(a_+)}, \end{cases}$$

což lze odvodit z bilanční rovnice na intervalu $\langle a-h, a+h \rangle$.