

# Matematické modelování, numerické metody a aplikace



Dalibor Lukáš

Kat. aplikované matematiky, FEI VŠB–TU Ostrava

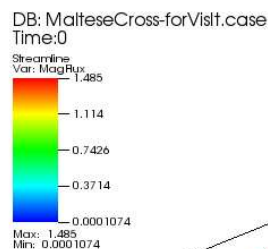
<http://home1.vsb.cz/~luk76>  
[dalibor.lukas@vsb.cz](mailto:dalibor.lukas@vsb.cz)



# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

Matematické modelování je mezioborová disciplína.

aplikace



matematika

fyzika

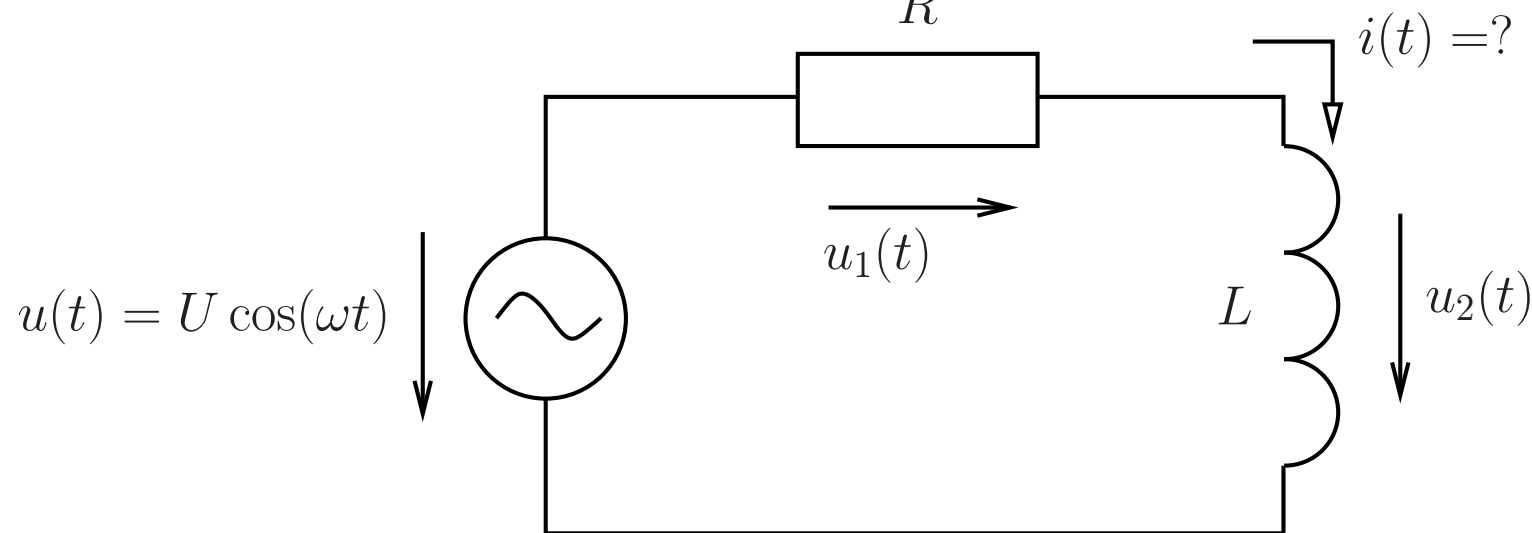
user: Tomas  
Wed Mar 16 14:02:27 2011

informatika

# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

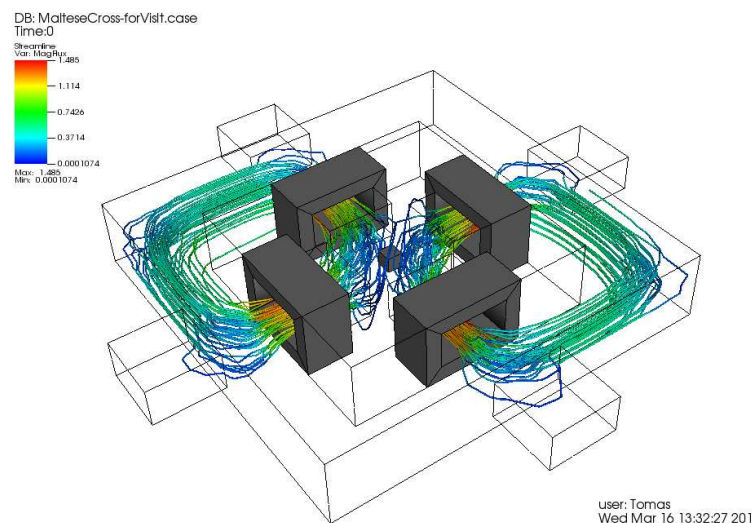
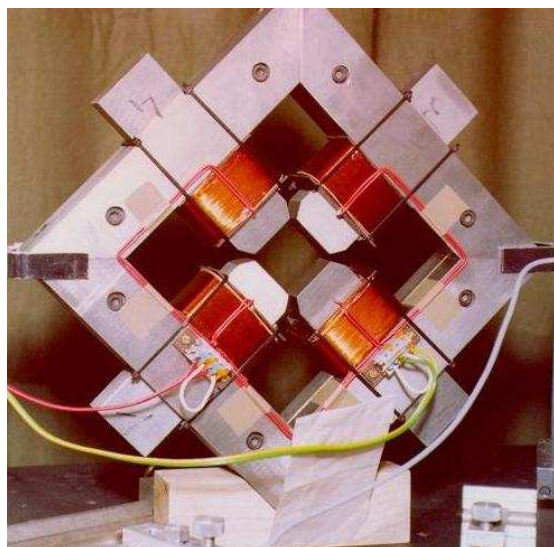
Soustavy rovnic: RL obvod — 1 rovnice/neznámá

$$(R + i\omega L)\hat{I} = U \quad \rightsquigarrow \quad i(t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{I}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \right\}$$

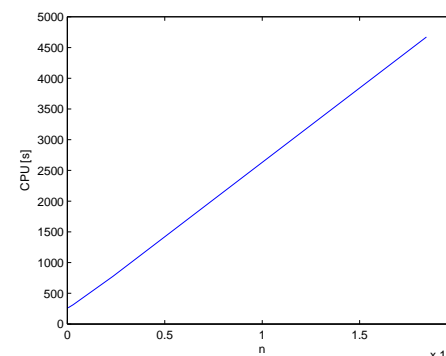


# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

Soustavy rovnic: mag. pole elektromagnetu — 18 milionů rovnic/neznámých



úroveň	počet hran	PCG iter.	CPU	Mem
0	39.310	1	4 min 23 s	269 MB
1	299.166	3	5 min 20 s	834 MB
2	2.333.312	3	13 min	5,14 GB
3	18.428.912	3	1 h 18 min	39,64 GB



1 hodina na notebooku: Multigrid 14 milionů rovnic vers. 18 rovnic Kramer. pravidlem.

# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

## Kramerovo pravidlo pro řešení soustav lin. rovnic

Jakou největší čtvercovou soustavu lineárních rovnic by vypočítal za 1 hodinu druhý nejlepší, viz [www.top500.org](http://www.top500.org), počítač na světě, čínský Tianhe-2, Kramerovým pravidlem bez použití řádkových úprav, uvažujeme-li pouze instrukce sčítání, odčítání, násobení a dělení, kterých provede  $33,8 \cdot 10^{15}$  za sekundu?

# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

## Kramerovo pravidlo pro řešení soustav lin. rovnic: počet operací

Uvažujme soustavu  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých mající právě jedno řešení.

Kramerovo pravidlo

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n$$

vyžaduje  $n$  dělení a výpočet  $n + 1$  determinantů řádu  $n$ . Např. pro  $n = 3$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

je třeba  $N(3) = 3 + 3 N(2) = 3 + 3 \cdot 2$  násobení a  $M(3) = 2 + 3 M(2)$  sčítání/odčítání.

Kramerovo pravidlo s výpočtem determinantů rozvojem podle řádků vyžaduje

- $n$  dělení,
- $(n + 1) N(n)$  násobení, kde  $N(n) = n (1 + N(n - 1))$  a  $N(1) = 0$  a
- $(n + 1) M(n)$  sčítání/odčítání, kde  $M(n) = n - 1 + n M(n - 1)$  a  $M(1) = 0$ .

# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

## Kramerovo pravidlo pro řešení soustav lin. rovnic: počet operací

Kramerovo pravidlo s výpočtem determinantů rozvojem podle řádků vyžaduje

$$\text{Op}(n) = n + (n + 1) (N(n) + M(n)) \text{ operací, } \text{CPU}(n) = \frac{\text{Op}(n)}{33,8\text{e}15} [\text{s}],$$

kde  $N(n) = n(1 + N(n - 1))$ ,  $N(1) = 0$  a  $M(n) = n(1 + M(n - 1)) - 1$ ,  $M(1) = 0$ .

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N(n)$	0	2	9	40	205	1236	8659	69280	623529	6236300
$M(n)$	0	1	5	23	119	719	5039	40319	362879	3628799
$\text{Op}(n)$	1	5	17	67	329	1961	13705	109607	986417	9864109
$\text{CPU}(n)$	3,0e-17	1,5e-16	5,0e-16	2,0e-15	9,7e-15	5,8e-14	4,1e-13	3,2e-12	2,9e-11	2,9e-10
$n$	11	12	13	14	15	...	18	19	20	21
$N(n)$	6,9e7	8,2e8	1,1e10	1,5e11	2,2e12	...	1,1e16	2,1e17	4,2e18	8,8e19
$M(n)$	4,0e7	4,8e8	6,2e9	8,7e10	1,3e12	...	0,6e16	1,2e17	2,4e18	5,1e19
$\text{Op}(n)$	1,1e8	1,3e9	1,7e10	2,4e11	3,6e12	...	1,7e16	3,3e17	6,6e18	1,4e20
$\text{CPU}(n)$	3,2e-9	3,9e-8	5,0e-7	7,0e-6	1,1e-4	...	0,5	9,8	195,7	4,1e3

# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

## Kramerovo pravidlo pro řešení soustav lin. rovnic

Jakou největší čtvercovou soustavu lineárních rovnic by vypočítal za 1 hodinu nejlepší, viz [www.top500.org](http://www.top500.org), počítač na světě, čínský Tianhe-2, Kramerovým pravidlem bez použití řádkových úprav, uvažujeme-li pouze instrukce sčítání, odčítání, násobení a dělení, kterých provede  $33,8 \cdot 10^{15}$  za sekundu?

**20 rovnic**



## Motto

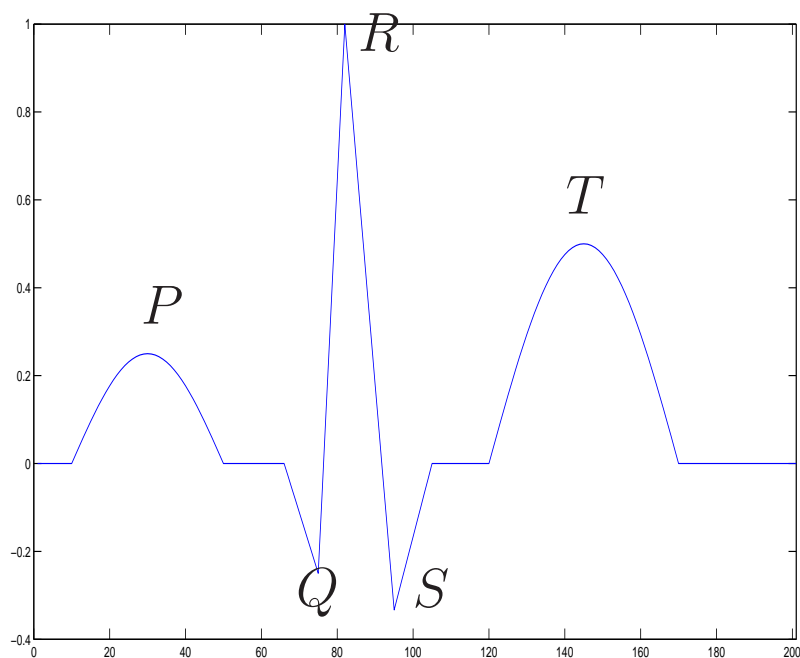
*„Raději budu počítat na starém počítači novou metodou než naopak.“*

Prof. Philippe Toint

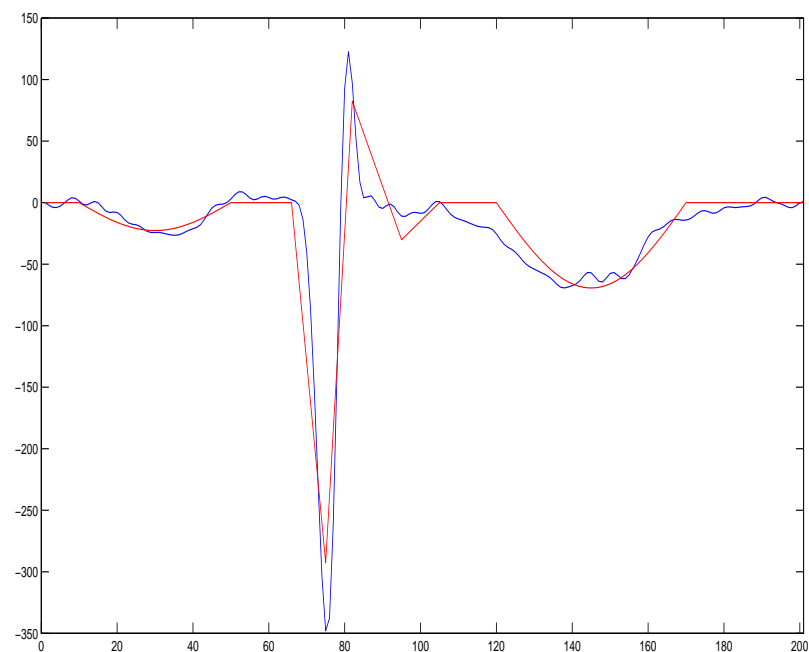
# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

## Projekce vektoru do (hyper)roviny: zpracování EKG signálu

model EKG-signálu



„fitování“ naměřeného signálu modelem



# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

## Projekce vektoru do (hyper)roviny: JPEG komprese

bitmapa



5%-komprese Fourierovou bází



# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

Projekce vektoru do (hyper)roviny: Lena — „první dáma internetu“

Lena Sjööblom, playmate 1972

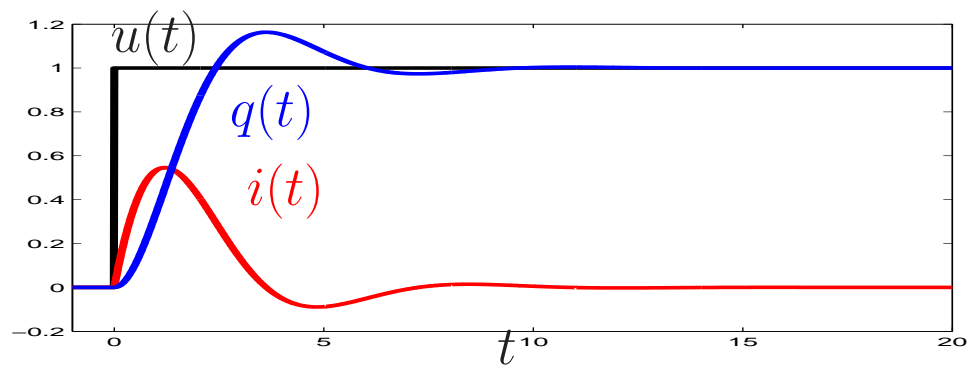
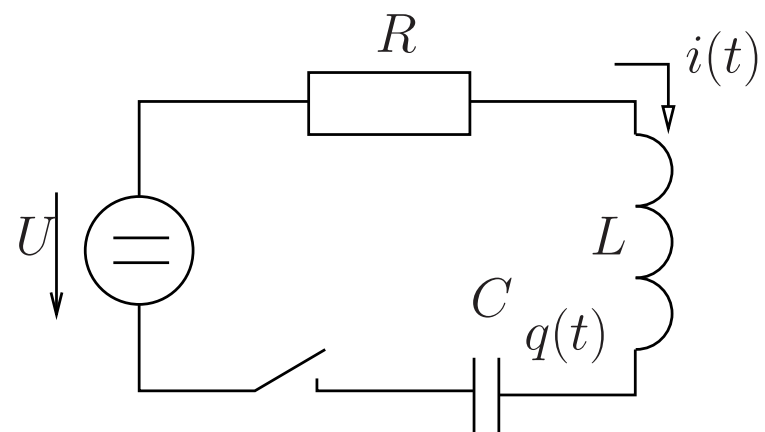
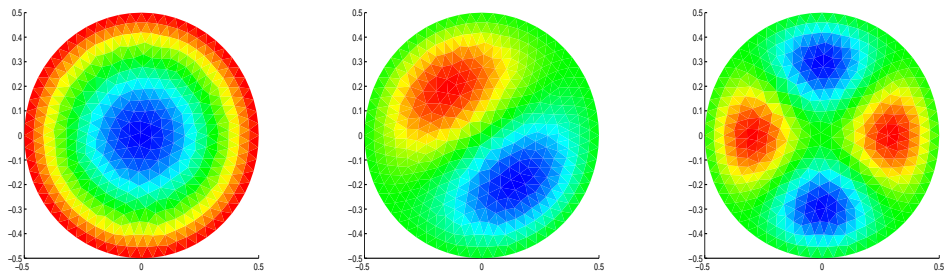
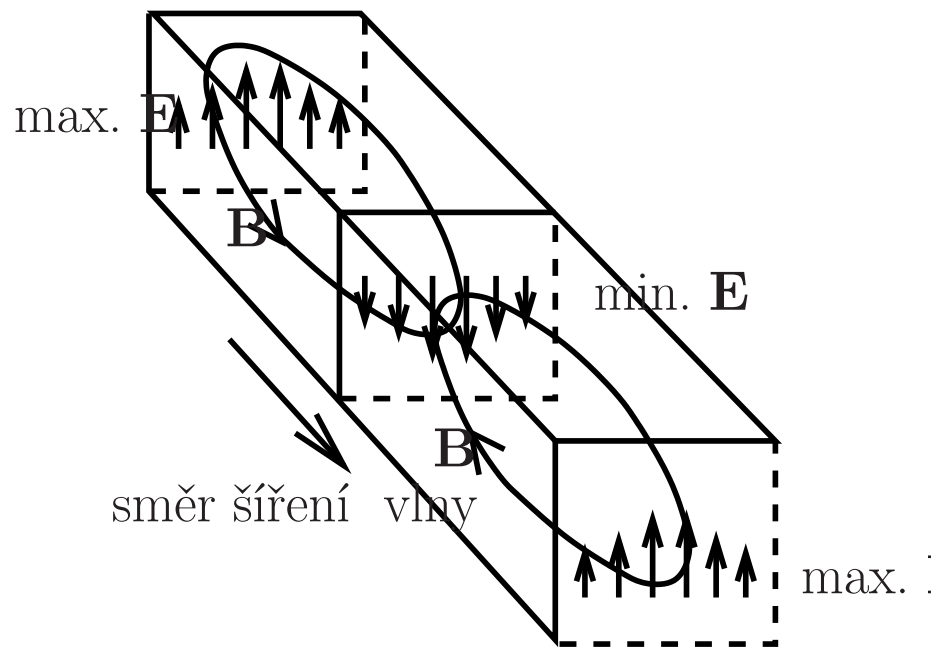


Lena Söderberg, 1997



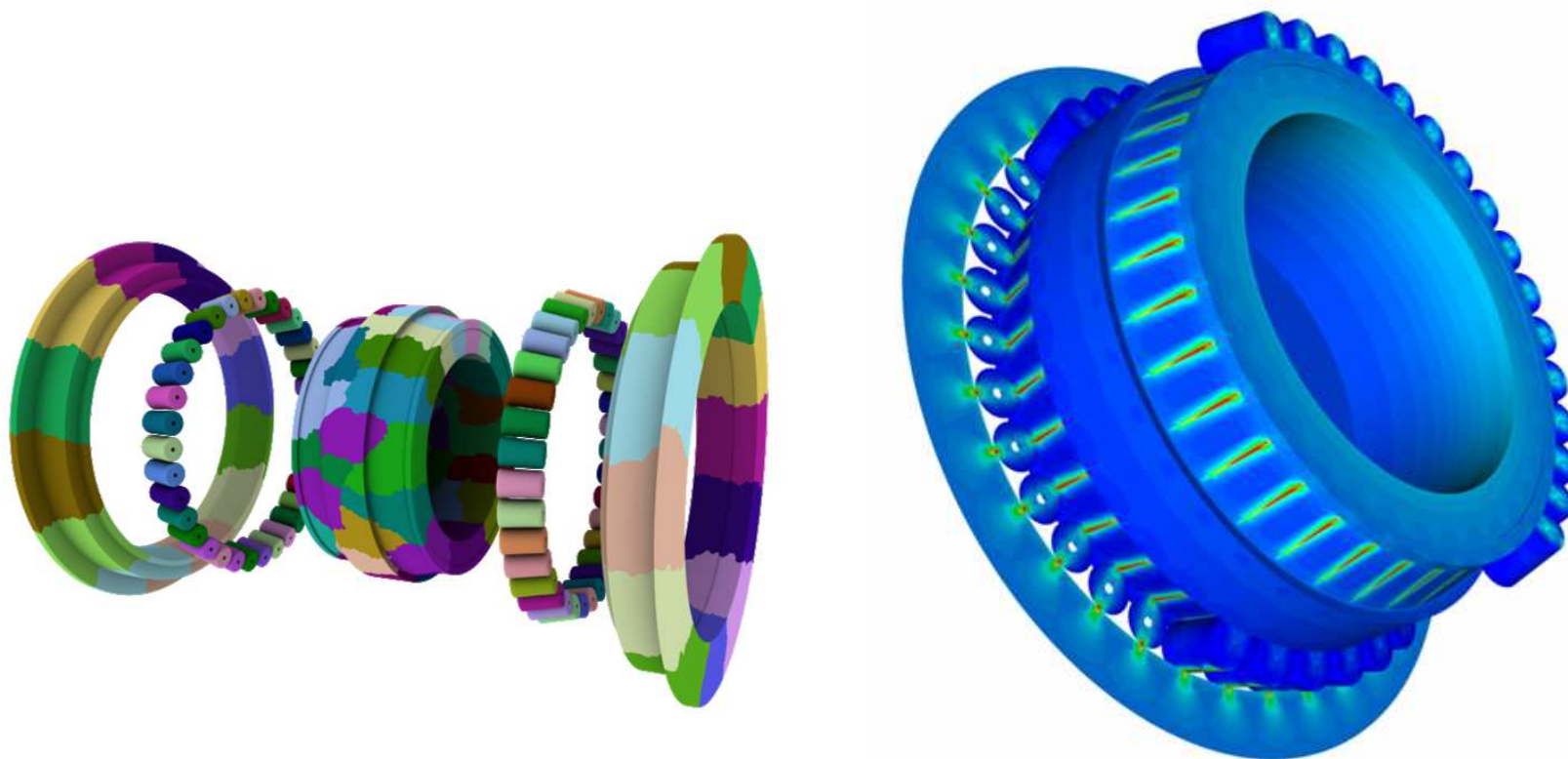
# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

## Vlastní frekvence: vlnovody, přechodové jevy



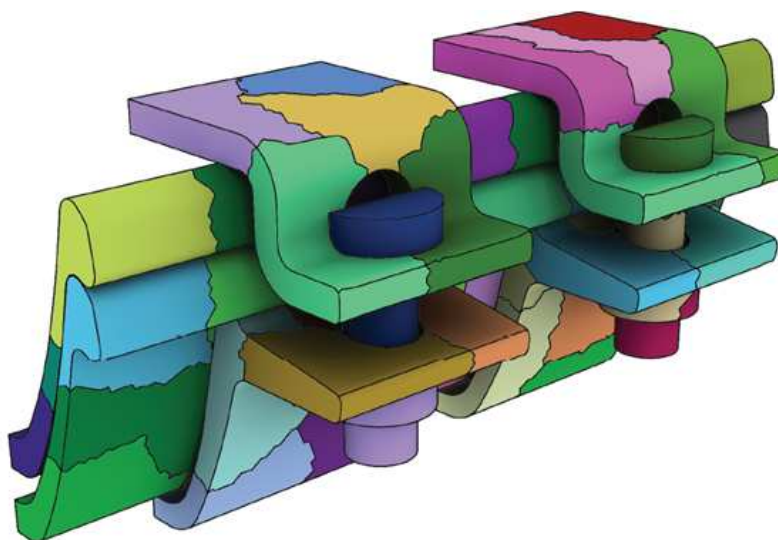
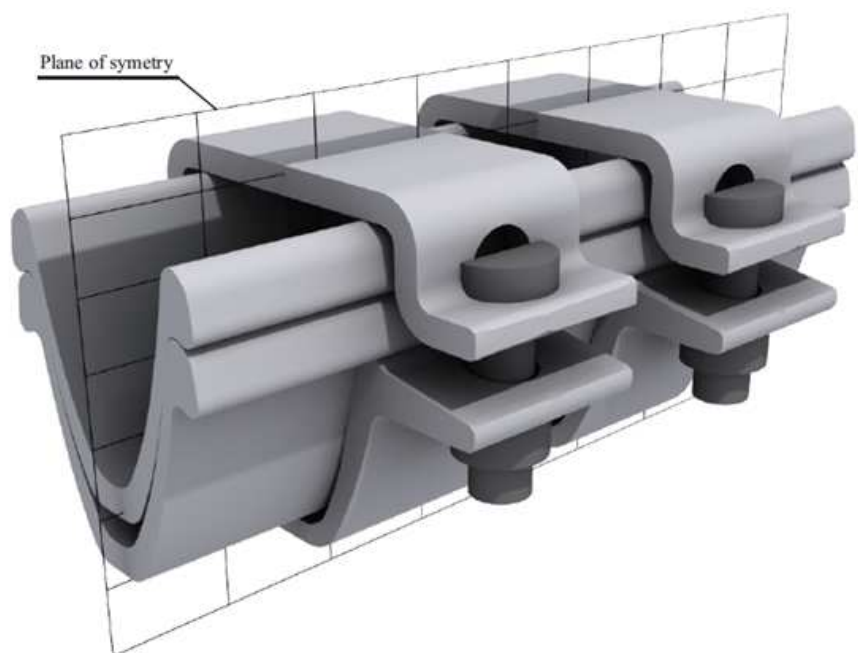
# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

Kontaktní úloha: zatížení ložiska větrné elektrárny, 960 procesorů



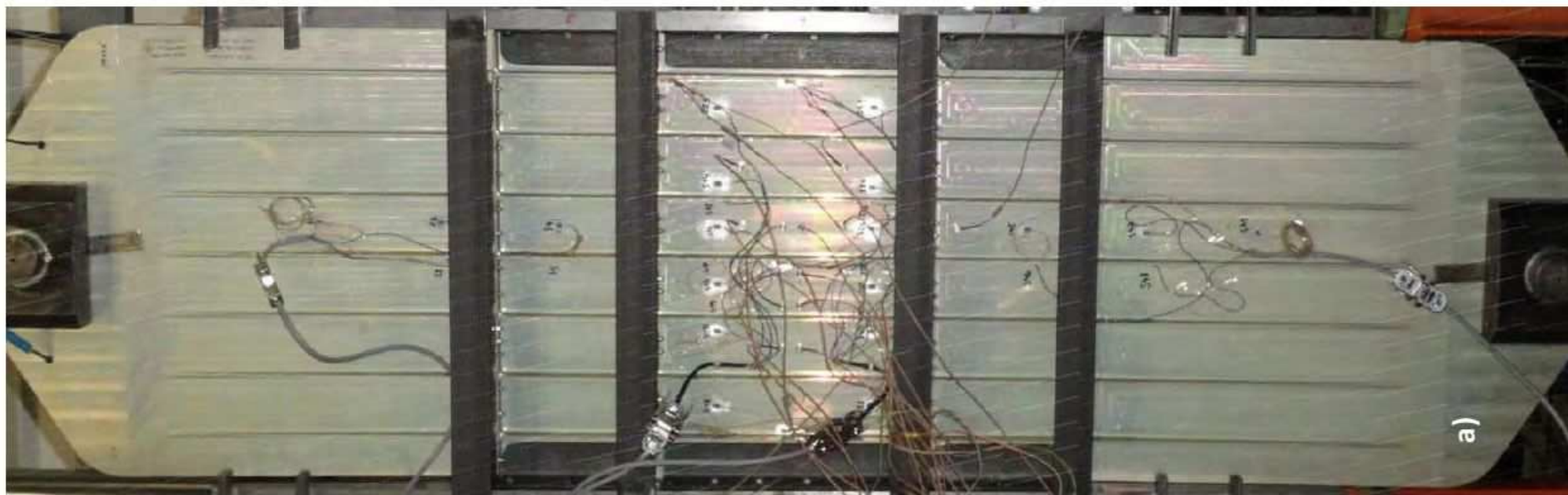
# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

Kontaktní úloha: zatížení hajcmana, paralelní výpočet



# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

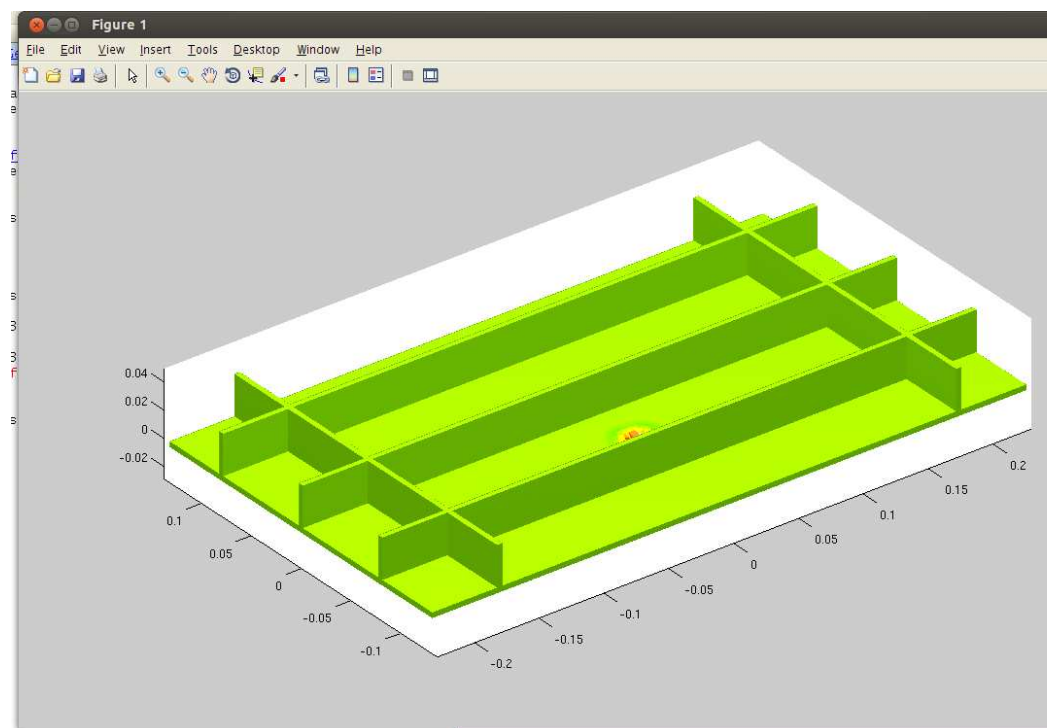
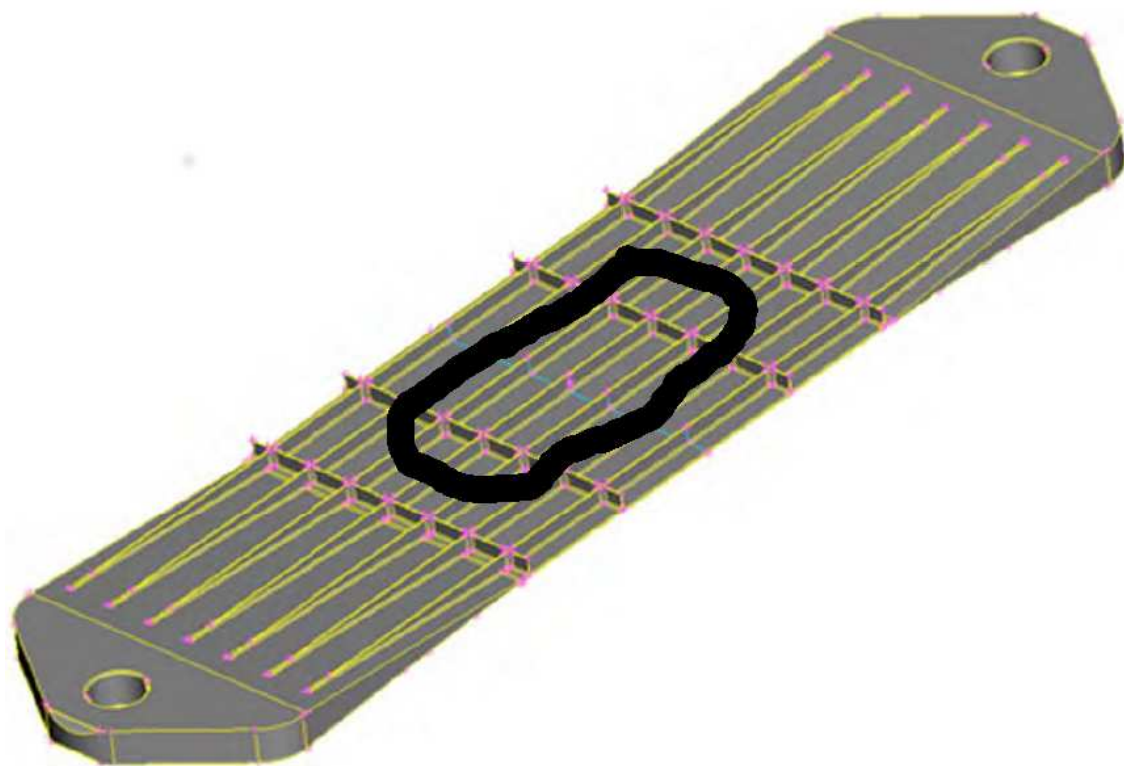
Monitorování zdraví letadla, spolupráce s Honeywell





# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

Monitorování zdraví letadla, spolupráce s Honeywell



# Matematické modelování, numerické metody a aplikace

## Monitorování zdraví letadla, spolupráce s Honeywell

