11.12.'16

(29)

Numerické řešení obyčejných dif. rovnic

Mějme $f : \langle t_0, T\rangle \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Hledáme

$$\boxed{y \in C^1(\langle t_0, T\rangle) : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in \langle t_0, T\rangle \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}} \quad (P)$$

… Cauchyho úloha

Diferenciální rovnice je ekvivalentní integrální rovnici,

$$\boxed{y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau},$$

pokud je $f(\cdot, y(\cdot)) \in C(\langle t_0, T\rangle)$.

Dk. „$\Downarrow$" plyne ze spojitosti $f(\cdot, y(\cdot))$.

„$\Uparrow$" Integrál o proměnnou horní mezí je spojitá funkce a splňuje $y(t_0) = y_0$. $y(t)$ je navíc primitivní funkcí ke spojité funkci $f(\cdot, y(\cdot))$, je tedy $y \in C^1(\langle t_0, T\rangle)$ a splňuje dif. rovnici.

Lokální existence a jednoznačnost

Věta. (Picardova-Lindelöfova)

f je lokálně lipschitzovsky spojité ~~v oko~~ v okolí (t_0, y_0) v proměnné y, tj.

$$\left.\begin{aligned} &\exists L > 0\ \exists \Delta t > 0\ \exists \Delta y > 0\ \forall t \in \overbrace{\langle t_0, t_0 + \Delta t\rangle}^{=:I}\ \forall y_1, y_2 \in \overbrace{\langle y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y\rangle}^{=:\Sigma} : \\ &\quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2| \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$
- Existuje právě jedno $y \in C^1(J)$ řešící (P) na J
- Pevně-bodové iterace $y_0(t) := y_0$, $y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_n(\tau))\, d\tau$ konvergují k $y(t)$.

kde $J := \left\langle t_0, t_0 + \min\left\{\Delta t, \frac{\Delta y}{\max_{I \times \Sigma} |f(t, y)|}, \frac{1}{L}\right\}\right\rangle$.

Důkaz. Důsledek Banachovy věty o pevném bodě zobecněné do úplného normovaného lineárního prostoru.

Def.
Uvažujme $\delta \in C(\langle t_0, T\rangle)$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ a perturbovanou úlohu

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) + \delta(t) & \forall t \in \langle t_0, T\rangle \\ z(t_0) = y_0 + \delta_0 . \end{cases}$$

Říkáme, že původní Cauchyho úloha (P) je stabilní (ve smyslu Ljapunova), pokud existuje $\varepsilon_0 > 0$:

$\cancel{\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)}$ $\forall \delta_0 \ \forall \delta(t) \ \exists C > 0 \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$:

$$\boxed{|\delta_0| < \varepsilon, \ \forall t \in \langle t_0, T\rangle : |\delta(t)| < \varepsilon \implies \forall t \in \langle t_0, T\rangle : |y(t) - z(t)| < C \cdot \varepsilon}$$

Lze ukázat (pomocí Gronwallova lemmatu),
že Cauchyho úloha je stabilní, pokud f je stejnoměrně lipsch. spojitá v proměnné y.

Jedno-krokové metody

Rozdělíme čas. interval na ekvidistantní díly s krokem h

$$t_0 < t_1 := t_0 + h < t_2 := t_0 + 2h < \dots < T = t_0 + N \cdot h$$

Hledáme	u_0	u_1	u_2	$\dots$	u_N
	$=$	$\approx$	$\approx$		$\approx$
	y_0	$y(t_1)$	$y(t_2)$		$y(T)$

Dopředná Eulerova metoda

$$\boxed{u_{n+1} := u_n + h \cdot f(t_n, u_n)}$$ … explicitní

Zpětná Eulerova metoda

$$\boxed{u_{n+1} := u_n + h \cdot f(t_{n+1}, u_{n+1})}$$ → implicitní

Crankova-Nicholsonova (lichoběžníková) metoda

$$\boxed{u_{n+1} := u_n + \frac{h}{2} \left\{ f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}) \right\}}$$ → implicitní

Heunova metoda

$$\boxed{u_{n+1} := u_n + \frac{h}{2} \cdot \left\{ f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + h\, f(t_n, u_n)) \right\}}$$ → explicitní

Explicitní jedno-kroková metoda

11.12.'16

$$\boxed{u_{n+1} := u_n + h \cdot \Phi(t_n, u_n, h)}$$

Def. Metoda je konzistentní řádu p, pokud ex. $c > 0$, nezávislé na h, takové, že

$$\boxed{\left| \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \Phi(t_n, y(t_n), h) \right| \leq c \cdot h^p}$$

Dopředná Euler. metoda je řádu $p = 1$:

$$y(t_{n+1}) \overset{\text{Taylor}}{=} y(t_n) + \underbrace{y'(t_n)}_{\overset{\shortparallel}{f(t_n, y(t_n))}} \cdot h + \underbrace{\frac{1}{2} y''(\xi) \cdot h^2}_{\Rightarrow\ c := \max\limits_{\xi \in (t_n, t_{n+1})} \frac{|y''(\xi)|}{2}}$$

Chyba metody:

$$e_{n+1} := |y(t_{n+1}) \overset{\pm \tilde{y}_{n+1}}{-} u_{n+1}| \qquad \tilde{y}_{n+1} := y(t_n) + h \cdot \Phi(t_n, y(t_n), h)$$

$$\leq \underbrace{|y(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}|}_{\text{chyba integrace}} + \underbrace{|\tilde{y}_{n+1} - u_{n+1}|}_{\text{kumulativní chyba}}$$

- $|y(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}| = \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underbrace{f(\tau, y(\tau))}_{= y'(\tau)} \, d\tau - h \cdot \Phi(t_n, y(t_n), h) \right|$

$$= h \cdot \left| \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \Phi(t_n, y(t_n), h) \right| \overset{\text{řád metody } p}{\leq} c \cdot h^{p+1}$$

- $|\tilde{y}_{n+1} - u_{n+1}| = |y(t_n) - u_n + h \cdot \Phi(t_n, y(t_n), h) - h \cdot \Phi(t_n, u_n, h)|$

$$\leq |y(t_n) - u_n| + h \cdot |\Phi(t_n, y(t_n), h) - \Phi(t_n, u_n, h)|$$

$$\overset{\text{Lipsch. sp.}}{\leq} (1 + L \cdot h) \cdot |y(t_n) - y_n|$$

Tedy

$$\boxed{e_{n+1}} \leq c \cdot h^{p+1} + (1 + L \cdot h) \cdot e_n$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} (1 + L h)^i \cdot c \cdot h^{p+1} = \frac{1 - (1 + L h)^{n+1}}{1 - 1 + L h} c \, h^{p+1} \leq \frac{c}{L} (1 + L h)^{n+1} \cdot h^p$$

$$\leq \frac{c}{L} \cdot e^{h L (k+1)} \cdot h^{p+1} = \underline{\frac{c}{L} e^{L \cdot (t_{k+1} - t_0)} \cdot h^p}$$

Absolutní stabilita (A-stabilita)

$\lambda > 0$

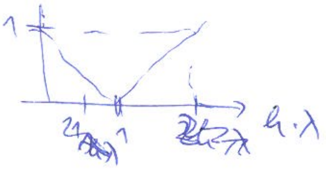
~~Def.~~ (*) $\begin{cases} y'(t) = -\lambda \cdot y(t), & t \in \langle 0, \infty) \\ y(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y(t) = 1 \cdot e^{-\lambda t}$

Def. Numerická metoda pro úlohu (*) se nazývá A-stabilní, pokud

$$|u_n| \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty.$$

- Dopředná Eulerova metoda

$$|u_{n+1}| = |u_n - h \cdot \lambda u_n| = \underbrace{|1 - h\lambda|}_{<1} |u_n| \to 0$$



T) $\boxed{0 < h < \frac{2}{\lambda}}$

- Zpětná Eulerova metoda

$$u_{n+1} = u_n - h \cdot \lambda \cdot u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1 + h\lambda}}_{<1} \cdot u_n$$

vždy A-stabilní

- Crankova-Nicholsonové metoda

$$u_{n+1} = u_n - \frac{h}{2}\{\lambda u_n + \lambda u_{n+1}\} \Leftrightarrow u_{n+1} = \underbrace{\frac{1 - \frac{h\lambda}{2}}{1 + \frac{h\lambda}{2}}}_{<1} u_n$$

vždy A-stab.

- Heunova metoda

$$u_{n+1} = u_n - \frac{h}{2}\{\lambda u_n + \lambda(u_n - h\lambda u_n)\}$$

$$= \underbrace{\left\{1 - h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right\}}_{|\cdot\cdot| < 1 \Leftrightarrow \boxed{0 < h < \frac{2}{\lambda}}} u_n$$

Metody Rungeho - Kutta

$$\boxed{u_{n+1} := u_n + h\,\Phi(t_n, u_n, h)}$$

$$\Phi(t_n, u_n, h) := \sum_{i=1}^{s} b_i K_1, \quad \text{kde } K_i := f\Big(t_n + c_i \cdot h,\, u_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\Big)$$

$$i = 1, \dots, s$$

Butcherova tabulka

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array} \qquad \text{Předp.: } \forall i \; \boxed{c_i = \sum_j a_{ij}}$$

Pokud $a_{ij} = 0$ pro $j \geq i$, pak je metoda <u>explicitní</u>, jinak musíme v každém kroku vypočítat ~~[illegible]~~ nelineární $s \times s$ soustavu

Příklady odvození explicitních RK metod

$\underline{s=1}$: $$u_{n+1} = u_n + h \cdot b_1 \cdot \underbrace{f(t_n + c_1 h, u_n)} \qquad c_1 = a_{11} = 0$$

$$= f(t_n, u_n) + O(h)$$

a zároveň

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \cdot \overset{f(t_n, y(t_n))}{\overset{\|}{y'(t_n)}} + O(h^2)$$

tj. $\underline{b_1 = 1}$ – dopředný Euler

$\underline{s=2}$: $$u_{n+1} = u_n + h \cdot \{ b_1 f(t_n + c_1 h, u_n + h \cdot 0)$$

$$c_1 = 0$$

$$+ b_2 \cdot f(t_n + \underbrace{c_2 \cdot h, u_n + h \cdot a_{21}}_{c_2 = a_{21}} K_1) \}$$

$$= u_n + h \cdot \{ b_1 f(t_n, u_n)$$

$$+ b_2 \cdot f(t_n + c_2 h, u_n + h c_2 f(t_n, u_n)) \}$$

~~$= u_n + h \cdot \{ b_1 [y'(t_n$~~

$$= u_n + h \cdot \{ b_1 [f(t_n, u_n) + O(h)]$$

$$+ b_2 [f(t_n, u_n) + c_2 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, u_n)$$

$$+ c_2 h f(t_n, u_n) \cancel{c_2 h} \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, u_n) + O(h^2)]$$

$$= u_n + \boxed{h \cdot (b_1 + b_2)} f(t_n, u_n)$$

$$+ \cancel{c_2 h} \boxed{b_2 c_2 h^2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, u_n) + f(t_n, u_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, u_n) \right]$$

$$+ O(h^2)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \boxed{h} \overset{f(t_n, u_n)}{y'}(t_n) + \boxed{\frac{h^2}{2}} y''(t_n)$$

$$y''(t_n) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) \cdot y'(t_n)$$

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

$+ O(h^2)$

tj. $b_1 + b_2 = 1$, $b_2 c_2 = \frac{1}{2}$

$b_1 = \frac{1}{2} = b_2$, $c_2 = 1$ → Heunova metoda

→ modifikovaná Eulerova metoda

$$\boxed{u_{n+1} := u_n + h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} f_n)}$$

→ ∞

---

explicitní RK 4-řádu je poslední, kde $s \equiv p$

$$u_{n+1} := u_n + \frac{h}{6} \{ k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \}$$

$$k_1 := f_n, \quad k_2 := f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 := f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} k_2), \quad k_4 := f(t_{n+1}, u_n + h \cdot k_3)$$