Numerické řešení nelineárních rovnic

Je dán interval $\langle a,b\rangle$
a funkce f spojitá na $\langle a,b\rangle$.

(P) $\boxed{\text{Hledáme } \bar{x} \in \langle a,b\rangle : f(\bar{x}) = 0}$

~~Metoda~~ Numerická metoda bude generovat posloupnost

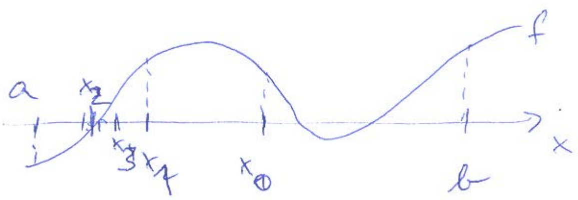
$x_0, x_1, x_2, \dots$

Má-li úloha (P) řešení, pak budeme říkat, že

- metoda je konvergentní, pokud $x_k \to \bar{x}$
- metoda je konvergentní s řádem $p \geq 1$, pokud
  $$\exists \rho > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : |x_{k+1} - \bar{x}| \leq \rho \cdot |x_k - \bar{x}|^p,$$
  přičemž navíc $\rho < 1$ pro $p = 1$.
- metoda konverguje lokálně, pokud
  $\exists \delta > 0\ \forall x_0 \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) : x_k \to \bar{x}$
- metoda konverguje globálně, pokud
  $\forall x_0 \in \langle a,b\rangle : x_k \to \bar{x}$.

Metoda půlení intervalu (bisekce)

Předp. $f \in C(\langle a,b\rangle)$, $f(a) \cdot f(b) < 0$



$x_0 := \dfrac{a+b}{2}$, $k := 0$, $a_k := a$, $b_k := b$
while $|f(x_k)| > \varepsilon$
  if $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$
    $b_{k+1} = x_k$, $a_{k+1} = a_k$
  else
    $a_{k+1} := x_k$, $b_{k+1} := b_k$
  end
  $x_{k+1} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$
  $k := k+1$
end

Věta ($\equiv$ Darbouxova vlastnost)

$$\left.\begin{array}{l} f \in C(\langle a,b\rangle) \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \tilde{x} \in \langle a,b\rangle : f(\tilde{x}) = 0$$

Důkaz. $M = \{x \in \langle a,b\rangle \mid \forall y \in \langle a,x\rangle : f(y) < 0\}$
$\tilde{x} := \sup M$, viz věta o supremu; $\tilde{x} \in \langle a,b\rangle$, viz spojitost f.
Kdyby $f(\tilde{x}) > 0$, pak ze spojitosti f plyne, že $\exists \delta > 0 : \forall y \in (\tilde{x} - \delta, \tilde{x}) : f(y) > 0$, což je spor s definicí M. Podobně nelze, aby $f(\tilde{x}) < 0$. Platí tedy: $f(\tilde{x}) = 0$. □

Konvergence metody půlení intervalu:

$$|x_0 - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$|x_1 - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^2}$$

$$\vdots$$

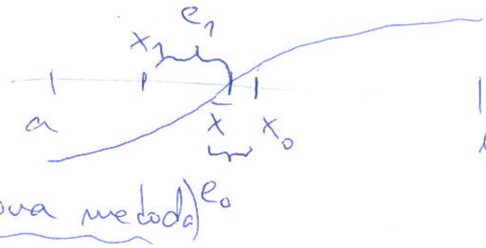
$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \to 0$$

Neplatí ale (obecně):

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq \underbrace{\rho}_{<1} |x_k - \bar{x}|$$

viz

Metoda nekonverguje monotónně.



Metoda prostých iterací (Picardova metoda)

Mějme $f \in C(\langle a,b \rangle)$ a $\Phi: \langle a,b \rangle \mapsto \langle a,b \rangle$ spojitou:

$$\forall \bar{x} \in \langle a,b \rangle : f(\bar{x}) = 0 \iff \bar{x} = \Phi(\bar{x})$$

tj. $\bar{x}$ je kořen f $\iff$ $\bar{x}$ je pevný bod Φ (def. / def.)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dáno: } x_0,\ \Phi \leftrightarrow f \\ k := 0 \\ \text{while } |x_k - \Phi(x_k)| > \varepsilon \quad (\text{nebo jiné}) \\ \quad \boxed{x_{k+1} := \Phi(x_k)} \\ \quad k := k+1 \\ \text{end} \end{array}}$$

Např. $f \in C(\langle a,b \rangle)$

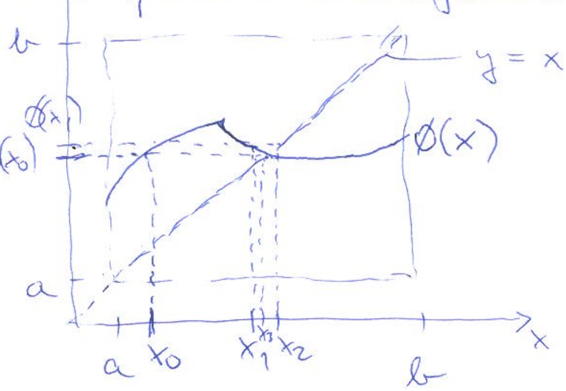
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\Phi := F \circ f},$$

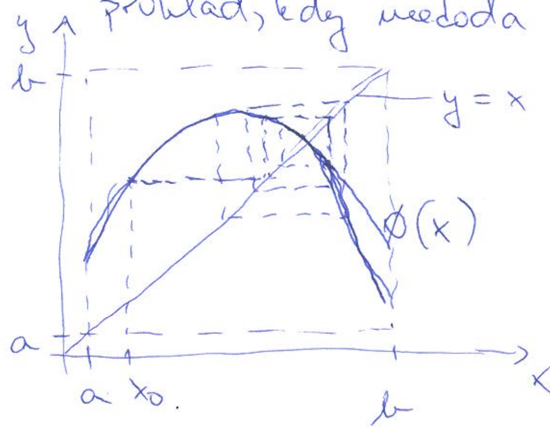
kde $F(y) = 0 \iff y = 0$

a $F \in C(\mathbb{R})$

příklad konvergence



příklad, kdy metoda nekonverguje



Def. Zobrazení $\Phi: \langle a,b \rangle \mapsto \langle a,b \rangle$, $\Phi \in C(\langle a,b \rangle)$, je kontraktivní, pokud $\exists \rho < 1\ \forall x,y \in \langle a,b \rangle$:

$$\boxed{|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \rho \cdot |x-y|}.$$

Věta (Banachova o pevném bodě)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Phi : \langle a,b\rangle \mapsto \langle a,b\rangle \\ \bullet\ \Phi \in C(\langle a,b\rangle) \\ \bullet\ \Phi \text{ je kontraktivní na } \langle a,b\rangle \\ \quad \text{s konstantou } \rho < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \exists!\, \bar{x} \in \langle a,b\rangle : \bar{x} = \Phi(\bar{x}), \\ \bullet\ \text{Metoda prostých iterací globálně} \\ \quad \text{konverguje s řádem } p = 1, \\ \bullet\ \boxed{|x_k - \bar{x}| \le \dfrac{\rho^k}{1-\rho}|x_1 - x_0|} \\ \quad \text{(apriorní odhad chyby)} \\ \bullet\ \boxed{|x_k - \bar{x}| \le \dfrac{\rho}{1-\rho}|x_k - x_{k-1}|} \\ \quad \text{(aposteriorní odhad chyby)} \end{array}\right.$$

Důkaz.

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \overset{\text{kontraktivnost}}{\le} \rho \cdot |x_k - x_{k-1}| \le \rho^k \cdot |x_1 - x_0| \qquad (*)$$

1. Dokážeme konvergenci $x_k \to \tilde{x} \in \langle a,b\rangle$.

$\forall k\ \forall p \in \mathbb{N}_0$:

$$|\underset{\pm \sum_{i=0}^{p-1} x_{k+i}}{x_{k+p} - x_k}| = |(x_{k+p} \underbrace{- x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1}}_{=0} \underbrace{- x_{k+p-2}) + \dots}_{=0} \underbrace{+ (x_{k+1}}_{=0} - x_k)|$$

$$\underset{\Delta\text{-nerovnost}}{\le} \sum_{i=0}^{p-1} |x_{k+i+1} - x_{k+i}| \overset{(*)}{\le} \sum_{i=0}^{p-1} \rho^{k+i} \cdot |x_1 - x_0|$$

$$= \rho^k \left(\sum_{i=0}^{p-1} \rho^i\right) \cdot |x_1 - x_0| = \rho^k \cdot \frac{1-\rho^p}{1-\rho} \cdot |x_1 - x_0| \le \underbrace{\frac{\rho^k}{1-\rho}}_{\to 0 \text{ pro } k \to \infty} |x_1 - x_0|$$

Posloupnost (x_k) je tedy Cauchyovská, což je (v $\mathbb{R}$) ekvivalentní konvergenci, tj. $\exists \tilde{x} \in \mathbb{R} : x_k \to \tilde{x}$.

Ze spojitosti Φ plyne, že $\tilde{x} \in \langle a,b\rangle$.

2. Ukážeme, že $\tilde{x}$ je pevný bod Φ.

$$\forall k: |\tilde{x} - \Phi(\tilde{x})| = |\tilde{x} \underbrace{- \Phi(x_k) + \Phi(x_k)}_{=0} - \Phi(\tilde{x})| \overset{\Delta\text{-nerov.}}{\le} |\tilde{x} - \Phi(x_k)| + |\Phi(x_k) - \Phi(\tilde{x})|$$

$$\le \underbrace{|\tilde{x} - x_{k+1}|}_{\to 0} + \rho \cdot \underbrace{|x_k - \tilde{x}|}_{\to 0}$$

a ze spojitosti Φ plyne, že $\tilde{x} = \Phi(\tilde{x})$.

3. Apriorní odhad chyby nyní plyne z 1. a 2.

4. Jednoznačnost (sporem): $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |\Phi(\bar{x}_1) - \Phi(\bar{x}_2)| \overset{\text{kontraktivnost}}{<} |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

5. Aposteriorní odhad: $\underline{|x_k - \bar{x}|} = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\bar{x})| \le \rho |x_{k-1} - \bar{x}| \le \rho(|x_{k-1} - x_k| + \underline{|x_k - \bar{x}|})$ $\square$

Poznámka.

Je-li navíc $\Phi \in C^1(\langle a,b\rangle)$, pak lze konvergenci pevně-bodových iterací dokázat z Taylorova rozvoje:

$$|x_{k+1}-\bar{x}| = |\Phi(x_k) - \Phi(\bar{x})| \overset{T.}{=} |\Phi'(\eta_k)\cdot(x_k-\bar{x})| \leq \rho\cdot|x_k-\bar{x}|, \quad \eta_k \text{ leží mezi } x_k \text{ a } \bar{x}.$$

Věta. (super-lineární lokální konvergence)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \Phi \in C^p(\langle a,b\rangle) \\ \bullet\ \exists \bar{x}\in\langle a,b\rangle : \bar{x} = \Phi(\bar{x}) \\ \bullet\ \Phi'(\bar{x}) = \dots = \Phi^{(p-1)}(\bar{x}) = 0, \\ \quad \Phi^{(p)}(\bar{x}) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists U_\delta(\bar{x}) := \{y\in\langle a,b\rangle : |y-\bar{x}| < \delta\}\ \forall x_k \in U_\delta(\bar{x}): \\ |x_{k+1}-\bar{x}| \leq \frac{1}{p!} \max\limits_{y\in U_\delta(\bar{x})} |\Phi^{(p)}(y)|\cdot|x_k-\bar{x}|^p \end{array}$$

Důkaz. Taylorův rozvoj: $x_{k+1} = \Phi(x_k) = \underbrace{\Phi(\bar{x})}_{=\bar{x}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{p-1} \frac{\Phi^{(m)}(\bar{x})}{m!}(x_k-\bar{x})^m}_{=0} + \frac{\Phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-\bar{x})^p$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ze spojitosti } \Phi^{(p)} \\ \Phi^{(p)}(\bar{x}) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists U_\delta(\bar{x}),\ \forall y \in U_\delta(\bar{x}) : \Phi^{(p)}(y) \neq 0. \qquad \square$$

Newtonova metoda

Hledejme pevně-bodové zobrazení $\Phi : \langle a,b\rangle \mapsto \langle a,b\rangle$ ve tvaru

$$\Phi(x) := x + \omega(x)\cdot f(x)$$

tak, aby $\Phi'(\bar{x}) = 0$, tj. maximální kontraktivita v $\bar{x}$.

$$\Phi'(\bar{x}) = 1 + \omega'(\bar{x})\underbrace{f(\bar{x})}_{=0} + \omega(\bar{x})\cdot f'(\bar{x}) \overset{!}{=} 0$$

tj. $\boxed{\omega(x) := -\frac{1}{f'(x)}}$

$$\boxed{x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Předchozí věta říká, že Newtonova metoda bude v okolí pevného bodu $\bar{x}$ konvergovat alespoň kvadraticky.

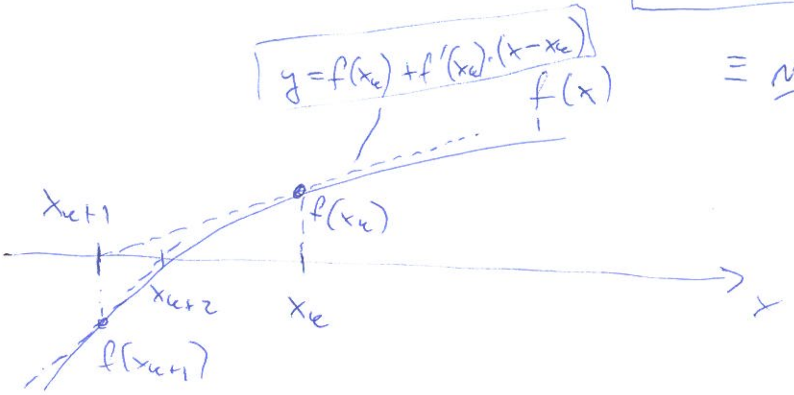
Př. $f(x) := \sin x$, $x_0 := 1$ $\rightsquigarrow$ kvadrat. konvergence   Př. $f(x) := \operatorname{atan} x$, $x_0 := 1$ $\rightsquigarrow$ kubická konv.!

Newtonova metoda má i geometrickou interpretaci:

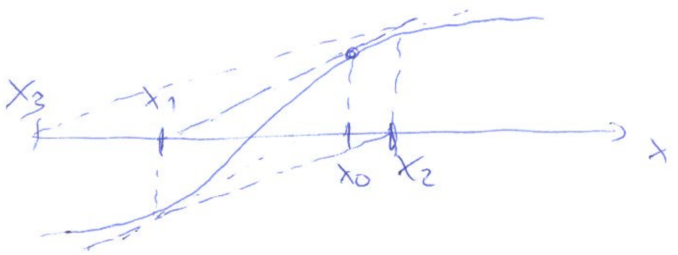
V každé iteraci úlohu $f(x)=0$ linearizujeme:

$$\boxed{f(x_k) + f'(x_k)\cdot(x_{k+1} - x_k) = 0}$$

$\equiv$ metoda tečen



Metoda nemusí konvergovat globálně:



~~Kritér~~

Glob. konvergenci zaručíme kontraktivitou Φ:

$$|\Phi'(x)| = \left|\cancel{1} - \frac{\cancel{f'(x)^2} - f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}\right| = \boxed{\frac{|f(x)\cdot f''(x)|}{f'(x)^2} < 1 \quad \forall x \in \langle a,b\rangle}$$

Pevně-bodové iterace, tedy i Newtonovu metodu, lze zobecnit na soustavy nelineárních rovnic

$$\bar F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\bar x_{k+1} := \bar x_k - \underbrace{\left[\bar F'(\bar x_k)\right]}_{=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar x_k), & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\bar x_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\bar x_k), & \dots, & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar x_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}}^{-1} \cdot \bar F(\bar x_k)}$$