Numerická integrace (kvadratura)

19.10.'16

(11)

Dány: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá

Chceme spočítat $\boxed{I := I(f) := I(f,a,b) := \int_a^b f(x)\,dx}$

přibližnou metodou $\boxed{I_m := I_m(f) := \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i)}$,

kde $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$, ~~$w_i \in \mathbb{R}$~~, $w_i \in \mathbb{R}$,

takovou, že $\boxed{I(p_m) = I_m(p_m) \quad \forall p_m \in P_m}$ $(*)$

Z linearity $I(f)$ a $I_m(f)$ stačí $(*)$ ověřit na libovolné bázi P_m. Integrační váhy $w_i \in \mathbb{R}$ jsou pak jednoznačně určeny volbou integračních bodů x_i.

- V bázi monomiálů $1, x, \dots, x^m$ dostáváme soustavu lin. rovnic s Vandermondovou maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_m \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (x_0)^m & (x_1)^m & \dots & (x_m)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b 1\,dx = b-a \\ \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^m - a^m}{m} \end{pmatrix}.$$

- V Lagrangeově bázi ~~dosto~~ $L_i^m(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ dostáváme pomocí vzorce

$$\boxed{w_i = \int_a^b L_i^m(x)\,dx}$$

Cvičení: Dokažte to.

Odtud vidíme, že $\forall f \in C(\langle a,b\rangle)$; $f_m(x) := \sum_{i=0}^{m} f(x_i) \cdot L_i^m(x)$ .. Lagr. interp.

$$\boxed{I(f_m)} = \int_a^b \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\, L_i^m(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m} \int_a^b L_i^m(x)\,dx \cdot f(x_i) = \boxed{I_m(f)}$$

Zbývá pouze určit integrační body.

Newton-Cotesova kvadratura, $n \geq 1$

$$\boxed{x_i := a + i\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=:h}, \quad i = 0,1,\dots,n}$$

$$\boxed{w_i = \int_a^b L_i^n(x)\,dx} = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\,dx = \left|\begin{matrix}\text{subst.: } x = a+th \\ dx = h\,dt\end{matrix}\right|$$

$$= \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{\cancel{a}+th-\cancel{a}-jh}{\cancel{a}+ih-\cancel{a}-jh}\,h\,dt = \frac{b-a}{n}\int_0^n \underbrace{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j}\,dt}_{=:\tilde{w}_i}$$

tj.

$$\boxed{I_n(f) = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\tilde{w}_i f(x_i)}$$

$n=1$: $x_0 = a$, $x_1 = b$ .. lichoběžníkové pravidlo

$$\tilde{w}_0 = \int_0^1 \frac{t-1}{0-1}\,dt = \frac{1}{2}, \quad \tilde{w}_1 = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0}\,dt = \frac{1}{2}$$

tj.

$$\boxed{I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]}$$

Chyba: $I - I_1 = \int_a^b f(x) - f_1(x)\,dx$

$$= \int_a^b \underbrace{\frac{1}{2!}f''(\xi(x))\cdot(x-a)\cdot(x-b)}_{\text{viz chyba interpolace}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))\cdot\underbrace{\overbrace{(x-a)\cdot(b-x)}^{=:s'(x)}}_{>0 \text{ v } (a,b)}\,dx$$

Předp. $f \in C^2(\langle a,b\rangle)$

$$\overset{\text{1. substituce ??}}{=} -\frac{1}{2}\int_{s(a)}^{s(b)} f''(\xi(x(s)))\,ds$$

$$s(x) = \int (x-a)(b-x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + (a+b)\frac{x^2}{2} - abx$$

Jelikož $s'(x) > 0$ v (a,b), je $s(x)$ rostoucí, tudíž prostá v $\langle a,b\rangle$, tudíž k $s(x)$ na $\langle a,b\rangle$ existuje inverzní funkce $x(s)$, a tudíž můžeme použít první substituční metodu:

$$I - I_1 = -\frac{1}{2}\int_{s(a)}^{s(b)} f''(\xi(x(s)))\,ds \underset{\exists \eta\in(a,b)}{\overset{\text{Lagr. věta}}{=}} -\frac{1}{2}\cdot\left[s(b)-s(a)\right]\cdot f''(\eta) = +\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot f''(\eta)$$

$$s(b) - s(a) = -\frac{b^3}{3} + (a+b)\frac{b^2}{2} - ab^2 + \frac{a^3}{3} - (a+b)\frac{a^2}{2} + a^2 b = \frac{1}{6}(b-a)^3$$

"$m=0$": $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $w_0 = b-a$ ... obdélníkové pravidlo

19.10.'16

(13)

$$\boxed{I_0(f) := (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

Chyba: $I - I_0 \underset{f\in C^2}{\overset{\text{Taylor.v.}}{=}} \int_a^b \Big\{ \underbrace{f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{1}{2} f''(\xi(x))\cdot\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^2}_{=f(x)} \underbrace{- f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)}_{f_0(x)} \Big\} dx$

$$\int_a^b x - \frac{a+b}{2}\, dx = 0$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))\cdot \underbrace{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}_{=:s'(x)>0 \text{ v } (a,b)\setminus\left\{\frac{a+b}{2}\right\}} dx$$

$\Rightarrow s(x)$ je prostá v (a,b) $\Rightarrow \exists$ inv. $x(s)$

$$\overset{\text{1. substitucí}}{=} \frac{1}{2}\int_{s(a)}^{s(b)} f''(\xi(x(s)))\, ds \overset{\text{Lagr.v.}}{=} \frac{1}{2}\left(s(b)-s(a)\right)\cdot f''(\eta)$$

$$s(x) = \int \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3$$

$$s(b)-s(a) = \frac{1}{3}\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{24}\cdot 2(b-a)^3 = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

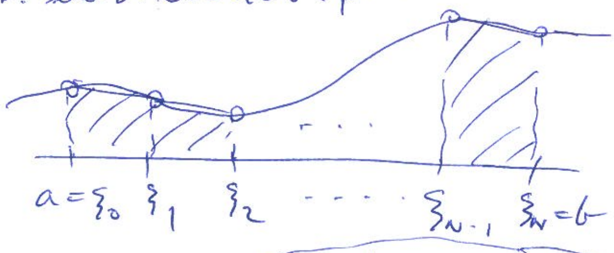
$$= \underline{\frac{1}{24}(b-a)^3\cdot f''(\eta)}$$

$m=2$: $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ ... Simpsonovo pravidlo

$\tilde{w}_0 = \frac{1}{3}$, $\tilde{w}_1 = \frac{4}{3}$, $\tilde{w}_2 = \frac{1}{3}$

Chyba: $I - I_2 = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

př. slož. lichob. pr.



Složená kvadratura

$$\boxed{I_{N,m}(f;a,b) := \sum_{k=1}^{N} I_m(f;\xi_{k-1},\xi_k)}$$

kde $\xi_k = a + k\cdot \underbrace{\frac{b-a}{N}}_{=:H}$, $k=0,\dots,N$.

kde $|I - I_m| = O(H^p)$

Složená Newton-Cotesova kv. dává algebr. rychlost konvergence $\boxed{|I - I_{N,m}| = O(N^{1-p})}$

Gaussova kvadratura

Integrační uzly x_i volíme v kořenech L^2_w-ortogonálních polynomů. $I^G_m(f) := \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i)$, kde $w_i = \int_I L_i^m(x)\,dx$

Věta. Mějme ~~souvislý~~ ~~otevřený~~ interval $I \subset \mathbb{R}$ (nemusí být omezený), kladnou váhovou funkci $w(x): I \to \mathbb{R}^+$ takovou, že $\int_I w(x)\,dx < \infty$ a systém $L^2_w(I)$-ortogonálních polynomů $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Pak $u_n(x)$ má v I n různých kořenů.

Důkaz. $u_0(x) := 1$ .. 0 kořenů

(indukce)

$k=1$: ~~$u_1(x) := x$~~ $\int_I u_n(x) \underbrace{w(x)}_{>0}\,dx = 0$ $\quad u_1 \perp 1$

implikuje, že $u_n(x)$ mění znaménko a tudíž má kořen $x_0 \in I$. Funkce $(x-x_0)u_n(x)$ nemění znaménko v x_1.

indukční krok: $k < n$

Předp., že $u_n(x)$ má různé kořeny $x_0, x_2, \dots, x_{k-1} \in I$

a funkce $(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})u_n(x)$ nemění znaménko

v $x_0, x_2, \dots, x_{k-1}$, ale

$$\int_I (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})\,u_n(x)\,w(x)\,dx \overset{u_n \perp P_k}{=} 0$$

tudíž $\exists$ kořen $x_k \in I \setminus \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$: $u_n(x)$ mění znaménko v x_k. □

Věta. $\forall p(x) \in P_{2m+1} : I(p) = I^G_m(p)$.

Důkaz. Buď $q(x)$ Lagrangeův interpolant $p(x)$ v uzlech $x_0, \dots, x_m$.

Pak $\underset{P_{2m+1}}{p(x)} - \underset{P_m}{q(x)} = u(x) \cdot \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m)}_{\in P_{m+1}} \Rightarrow u(x) \in P_m$

ortog. polynom $u_{m+1}(x)$

Platí: $I(p) = \int_I p(x)\,w(x)\,dx = \underbrace{\int_I q(x)\,w(x)\,dx}_{= I_m^G(p)} + \underbrace{\int_I \underset{\in P_m}{u(x)} \cdot u_{m+1}(x)\,w(x)\,dx}_{u_{m+1} \perp P_m \;=\; 0}$

$\cancel{= I(q)}$ $\square$

Platí. Je-li funkce f analytická v $I\langle -1,1\rangle$, tj. její Taylorův rozvoj konverguje v každém bodě I, pak

$$\exists K>0: \boxed{\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - I_{m}^{GL}(f) \right| \leq K \cdot 10^{-m}.}$$

Příklady

- Gauss-Legendreova kvadratura $I_m^{GL}(f)$

  $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i)$, kde x_i jsou kořeny Legendreova polynomu $P_{m+1}(x)$.

- Gauss-Čebyševova kvadratura $I_m^{GC}(f)$

  $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i)$, kde $\boxed{x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2(m+1)}}$, $i=0,\dots,m$ jsou kořeny Čeb. polynomu $T_{m+1}(x)$.

  $$\boxed{w_i = \frac{\pi}{m+1}}$$

- Gauss-Laguerrova kvadratura

  aproximuje $\int_0^{\infty} f(x)\,\underbrace{e^{-x}}_{=:w(x)}\,dx$

- Gauss-Hermitova kvadratura

  aproximuje $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-x^2}\,dx$